【9】

氏名・（本籍）　金子　宏（かね こ ひろし）

学位の種類　理学博士

学位記番号　第 8399 号

学位授与の日付　昭和63年12月14日

学位授与の要件　理学研究科数学専攻
学位規則第5条第1項該当

学位論文題目　**正則拡散過程と Liouville 型定理**

論文審査委員　（主査）
教授　福島　正俊
（副査）
教授　池田　信行　教授　渡辺　毅　助教授　中尾慎太郎

論文内容の要旨

近年，多重劣調和関数から生成されたディリクレ形式および対応する拡散過程を用いて多重劣調和関数族のポテンシャル論的側面を明確化する研究がいくつか行なわれた。その結果，古典ポテンシャル論と類似した局所的性質がいくつか導出され，ほぼ完成された理論ができあがっている。ここで用いられる拡散過程は任意の多重劣調和関数との合成が局所劣マルティンゲールとなるという有用な性質を持つ。このような拡散過程は正則拡散過程と呼ばれている。

一方，いろいろな非コンパクト複素多様体において，非定数有界多重劣調和関数がその上に存在するか否かは多変数複素関数論における重要な問題の一つである。本論文ではこの大域的問題に上述の確率論的手法を適用し，ある種の再帰性を持つ正則拡散過程が存在する連結複素多様体において有界多重劣調和関数は定数に限ることを示し，この Liouville 型定理に対する確率論的方法が有効となる複素多様体の例を与えた。

Mを非有界かつ多重劣調和な exhaustion Ψ を持つ $m \geqq 2$ 次元連結複素多様体とする。ここでカレント $\theta = (dd^c \Psi)^{m-1}$ が正則拡散過程を生成し，それが適切な Ψ についての擬球に確率1で到達するように次の二つの条件を Ψ に課する。第一の条件はある擬球 $\{\Psi \leqq C\}$ の外部の任意複素局所座標近傍の上で Lebesgue 測度が正の Radon 測度 $\theta \wedge dd^c p$ に対して絶対連続となるような強多重劣調和関数 p が $\{\Psi > C\}$ に存在することであり，第二の条件は $\{\Psi > C\}$ において不等式 $(dd^c \Psi)^m \leqq \rho(\Psi)\, \theta \wedge d\Psi \wedge d^c \Psi$ がみたされることである。ただし ρ は〔c, ∞〕上の非負連続関数で，微分方程式 $g_\rho''(x) = -\rho(x) g_\rho'(x)$ の解 $g_\rho(x)$ が $x \to \infty$ のとき無限大に発散するものとする。これらの条件の下で θ の生成する正則拡散過程は論文中に述べられた再帰条件をみたすことがわかり，その結果次の定理が得られる。

（定　理）

M上の $\lim_{R\to\infty}(\max_{\Psi(z)\leq R} u(z))/g_{\rho}(R)=0$ をみたす多重劣調和関数uは定数に限る。

この主定理の応用として極を持つ Kähler 多様体の radial curvature に適当な条件を与えれば次の Liouville 型定理が導出できることがわかる。

（　系　）

Mを極を持つ複素次元 $n\geqq 2$ の Kähler多様体，rを極からの距離関数とする。
radial curvature　kがある正定数 $\delta<1/(9n-1)$ と $a>\exp(2(1+2\delta))$ について不等式 $|k|\leqq\delta/(r+a)^2\log(r+a)$ を $\{r>0\}$ 上でみたすならば $\lim_{s\to\infty}(\max_{r(z)\leq s} u(z))/\log\log s=0$ をみたす多重劣調和関数uは定数である。

Hessian 比較定理により $p=r^2$ として第一の条件がみたされること，および第二の条件をみたすΨが距離関数rから構成できることがわかるため上記の系が証明できる。

論文審査の結果の要旨

多重劣調和関数は多変数複素関数論における正則領域の研究に関連して導入された概念であるが，それは C^n 上全体で有界なら定数に限るという著しい性質（Liouville 型の性質）をもつことが知られている。R^n 上の普通の劣調和関数に対してはこの性質は $n\leqq 2$ のときに限って成立し，これは又ブラウン運動がその時に限って再帰的であることに基づいて確率論的にも証明されている。本論文はブラウン運動の複素多変数版ともいうべき正則拡散過程のうち再帰的なものをうまく構成することによって，多重劣調和関数に関する Liouville 型定理が C^n を含むあるクラスの複素多様体上で成立することを確率論的に証明したものである。

すなわちMを多重劣調和な exhaustion function ϕ をもつ $n(\geqq 2)$ 次元連結複素多様体とするとき，ϕ に一定の大域的条件を課すとカレント $(dd^c\phi)^{n-1}$ の定めるディィリクレ形式に対応する正則拡散過程は再帰的となり，その結果M上の多重劣調和関数が有界かもしくは再帰度に応じた増大度しかもたなければ定数に限ることが本論文において示されている。ϕ に対するこの大域的条件はMが C^n に十分近いことを意味する条件であるが，極をもつ Kähler 多様体で C^n との解析的同型性がわかっていないものでこの条件を満たす例が構成されている。

近年正則拡散過程は多重劣調和関数の局所的性質の研究に応用されてきたが，このような大域的性質の研究への応用は初めてであり確率過程論への貢献は大きい。

又得られた結果は幾何学的にも新しい内容をもつ興味深いものである。このように金子君の論文は理学博士の学位論文として十分価値あるものと認める。