

Title	On the Darboux transformation of the second order differential operator of Fuchsian type on the Riemann sphere
Author(s)	大宮, 真弓
Citation	大阪大学, 1990, 博士論文
Version Type	
URL	https://hdl.handle.net/11094/36943
rights	
Note	著者からインターネット公開の許諾が得られていないため、論文の要旨のみを公開しています。全文のご利用をご希望の場合は、 〈a href="https://www.library.osaka-u.ac.jp/thesis/#closed"〉 大阪大学の博士論文について 〈/a〉 をご参照ください。

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

氏名・(本籍)	おお 大	みや 宮	ま 真	ゆみ 弓
学位の種類	理	学	博	士
学位記番号	第	9023	号	
学位授与の日付	平成2年3月19日			
学位授与の要件	学位規則第5条第2項該当			
学位論文題目	On the Darboux transformation of the second order differential operator of Fuchsian type on the Riemann sphere (2階Fuchs型常微分作用素のDarboux変換について)			
論文審査委員	(主査) 教授	池田 信行		
	(副査) 教授	村上 信吾	教授	井川 満 助教授 辻下 徹

論文内容の要旨

2階常微分作用素 $L(P) = d^2/dx^2 - P(x)$ は、微分方程式 $L(P)Y = 0$ の解の基本系 $Y(x) = {}^t(y_1, y_2)$ 及び $\zeta = [\xi_1 : \xi_2] \in P_1$ に対して $A_{\pm}(\zeta) = d/dx \pm (\log(\xi_1 y_1 + \xi_2 y_2))'$ とおけば、 $L(P) = A_+(\zeta)A_-(\zeta)$ と分解される。この分解における左右因子を置き換えると、 $\zeta \in P_1$ をパラメータに持つ常微分作用素 $L^*(P; \zeta, Y) = A_-(\zeta)A_+(\zeta)$ を得る。これを $L(P)$ の Darboux 変換という。

本論文では $L(P)$ が P_1 上 Fuchs 型である場合に Darboux 変換を考察する。すなわち、Fuchs 型常微分作用素の Darboux 変換が再び Fuchs 型になるとき、特に有理 Darboux 変換と言うが、ここではある特殊なクラスの 2階 Fuchs 型常微分作用素の有理 Darboux 変換を用いて高次 KdV 方程式の有理解を構成する。そこで、その結果をモノドロミー保存変形の観点から見直すことにより、有理 Darboux 変換について閉じた 2階 Fuchs 型常微分作用素の集合を構成的に定め、さらにその集合の中での Darboux 変換の様子を考察する。

有理 Darboux 変換が可能な 2階 Fuchs 型常微分作用素全体を F とおく。このとき F の元 $L(P)$ は、方程式 $L(P)Y = 0$ の射影的モノドロミーが単位元のみからなる作用素として特徴付けられる。ゆえに解 $Y(x)$ は求積法で求められる。また方程式 $L^*(P; \zeta, Y)Y^*$ の解 $Y^*(x; \zeta)$ は、古典的な Darboux の補題により、解 $Y(x)$ から有理的に構成できる。そこで n 次 KdV 多項式 $X_n(P)$ に対して、 F の元 $L(P)$ で $X_j(P) \neq 0$ ($1 \leq j \leq n-1$)、 $X_n(P) \equiv 0$ となるもの全体を F_n とおく。すると $L(P) \in F_n$ ならば方程式 $L(P)Y = 0$ の解 $Y_{\infty}(x)$ を適当にえらぶことにより Darboux 変換 $L^*(P; \zeta, Y_{\infty})$ の係数 $P^* = P^*(x; \zeta)$ は n 次 KdV 方程式 $c_{\mu}(t_{\mu}) \partial P^* / \partial t_{\mu} = X_n(P^*)$ の有理解になる。ここに t_{μ} ($\mu = 0, \infty$) はそれぞれパラメータ $\zeta \in P_1$ の原点及び無限遠点の局所変数、 $c_{\mu}(t_{\mu})$ は t_{μ} の有理関数である。その n 次 KdV 方程式モ

ノドロミー保存変形を記述する関係式と見なし、さらに $Y^*(x; \zeta)$ のモノドロミーのパラメータ ζ への依存の仕方を考慮すると、 $L^*(P; \zeta, Y_\infty) \in F_{n+1}$ ($\zeta \neq \infty$) が結論される。これは、 $F^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ とおけば、集合 F^* は有理 Darboux 変換で閉じた集合であることを示している。

論文の審査結果の要旨

$L(P)$ はリーマン球面 P_1 上の Fuchs 型 2 階常微分作用素

$$L(P) = D^2 - P(x), \quad D = d/dx$$

で $P(x)$ が

$$P(x) = \sum_{j=1}^n \alpha_j (x - a_j)^{-2}$$

の形に表されるものとする。さらに $Y(x) = {}^t(y_1(x), y_2(x))$ は $W(Y(x)) = 1$ をみたす微分方程式 $L(P)Y = 0$ の解の基本系とする。ここで $W(Y(x))$ は $Y(x)$ のロンスキアンを表す。そのとき、 $\zeta = (\xi_1, \xi_2) \in P_1$ に対し

$$A_{\pm}(\zeta) = D \pm \frac{\partial}{\partial x} \log(\xi_1 y_1(x) + \xi_2 y_2(x))$$

とおけば $L(P) = A_+(\zeta) A_-(\zeta)$ の形に分解される。大宮君は $L(P)$ の Darboux 変換 $L^*(P; \zeta, Y) = A_-(\zeta) A_+(\zeta)$ の性質の解明を行い、その成果を高次 KdV 方程式の研究に応用している。

F は上に述べた条件を満たす Fuchs 型 2 階常微分作用素 $L(P)$ でしかも $y_2(x)/y_1(x)$ が有理関数になるもの全体とする。そのとき、 $L(P)$ の Darboux 変換 $L^*(P; \zeta, Y)$ がすべての ζ に対し再び Fuchs 型になることと $L(P) \in F$ となることが同等になる。さらに F の元 $L(P)$ に対し $x(L(P)) = \#\{\zeta; L^*(P; \zeta, Y) \in F\}$ とおけば $x(L(P)) = 0, 1$ または ∞ となる。本論文において大宮君は解析学の諸分野で重要な役割を果たしているモノドロミー保存変形概念を用い F の元の特徴付けと、 $F_\nu = \{L(P) \in F \mid x(L(P)) = \nu\}$, $\nu = 0, 1, \infty$ の性質の解明を進め、さらにこれらに関連して 2 階 Fuchs 型微分作用素の Darboux 変換を用い高次 KdV 方程式の有理解を構成している。KdV 方程式については近年種々の立場からの研究が行われ顕著な成果が得られているが、大宮君の研究はそれらの中で Adler と Moser による成果に密接に関連しており、彼等による有理解の構成法を違った観点から考察している。これらの成果は 2 階微分作用素の Darboux 変換に関連する研究に新たな視点を与え、その理論の発展に貢献している。

以上、本論文における大宮君の研究は Darboux 変換の研究を発展させ、解析学の研究に寄与する所が極めて大きく、理学博士の学位論文として十分価値あるものと認められる。