【28】

氏名・（本籍）	大宮真弓（おおみやまゆみ）
学位の種類	理学博士
学位記番号	第 9023 号
学位授与の日付	平成 2 年 3 月 19 日
学位授与の要件	学位規則第5条第2項該当
学位論文題目	On the Darboux transformation of the second order differential operator of Fuchsian type on the Riemann sphere （2階Fuchs型常微分作用素のDarboux変換について）
論文審査委員	（主査） 教授 池田 信行 （副査） 教授 村上 信吾　教授 井川 満　助教授 辻下 徹

論文内容の要旨

2階常微分作用素$L(P)=d^2/dx^2-P(x)$は，微分方程式$L(P)Y=0$の解の基本系$Y(x)={}^t(y_1,y_2)$及び$\zeta=[\xi_1:\xi_2]\ \mathbf{P}_1$に対して$A_\pm(\zeta)=d/dx\pm(\log(\xi_1 y_1+\xi_2 y_2))'$とおけば，$L(P)=A_+(\zeta)A_-(\zeta)$と分解される。この分解における左右因子を置き換えると，$\zeta\in\mathbf{P}_1$をパラメータに持つ常微分作用素$L^*(P;\zeta,Y)=A_-(\zeta)A_+(\zeta)$を得る。これを$L(P)$のDarboux変換という。

本論文では$L(P)$が$\mathbf{P}_1$上Fuchs型である場合にDarboux変換を考察する。すなわち，Fuchs 型常微分作用素のDarboux変換が再びFuchs型になるとき，特に有理Darboux変換と言うが，ここではある特殊なクラスの2階Fuchs型常微分作用素の有理Darboux変換を用いて高次KdV方程式の有理解を構成する。そこで，その結果をモノドロミー保存変形の観点から見直すことにより，有理Darboux変換について閉じた2階Fuchs型常微分作用素の集合を構成的に定め，さらにその集合の中でのDarboux 変換の様子を考察する。

有理Darboux変換が可能な2階Fuchs 型常微分作用素全体を$\mathbf{F}$とおく。このとき$\mathbf{F}$の元$L(P)$は，方程式$L(P)Y=0$の射影的モノドロミーが単位元のみからなる作用素として特徴付けられる。ゆえに解$Y(x)$は求積法で求められる。また方程式$L^*(P;\zeta,Y)Y^*$の解$Y^*(x;\zeta)$は，古典的なDarboux の補題により，解$Y(x)$から有理的に構成できる。そこでn次KdV多項式$X_n(P)$に対して，$\mathbf{F}$の元$L(P)$で$X_j(P)\neq 0$ $(1\leq j\leq n-1)$，$X_n(P)\equiv 0$となるもの全体を$\mathbf{F}n$とおく。すると$L(P)\in\mathbf{F}n$ならば方程式$L(P)Y=0$の解$Y_\infty(x)$を適当にえらぶことによりDarboux変換$L^*(P;\zeta,Y_\infty)$の係数$P^*=P^*(x;\zeta)$はn次KdV方程式$c_\mu(t_\mu)\partial P^*/\partial t_\mu=X_n(P^*)$の有理解になる。ここに$t_\mu$ $(\mu=0,\infty)$はそれぞれパラメータ$\zeta\in\mathbf{P}_1$の原点及び無限遠点の局所変数，$c_\mu(t_\mu)$はt_μの有理関数である。そのn次KdV 方程式モ

ノドロミー保存変形を記述する関係式と見なし，さらに$Y^*(x;\zeta)$のモノドロミーのパラメータζへの依存の仕方を考慮すると，$L^*(P;\zeta,Y_\infty)\in F_{n+1}$ $(\zeta\neq\infty)$が結論される。これは，$F^*=\cup_{n=1}^{\infty}F_n$とおけば，集合$F^*$は有理Darboux変換で閉じた集合であることを示している。

論文の審査結果の要旨

L(P)はリーマン球面P_1上のFuchs型2階常微分作用素

$$L(P)=D^2-P(x),\qquad D=d/dx$$

でP(x)が

$$P(x)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j(x-a_j)^{-2}$$

の形に表されるものとする。さらに$Y(x)={}^t(y_1(x),\ y_2(x))$はW(Y(x))＝1をみたす微分方程式L(P)Y＝0の解の基本系とする。ここでW(Y(x))はY(x)のロンスキアンを表す。そのとき，$\zeta=[\xi_1,\ \xi_2]\in P_1$に対し

$$A_\pm(\zeta)=D\pm\frac{\partial}{\partial x}\log(\xi_1y_1(x)+\xi_2y_2(x))$$

とおけば$L(P)=A_+(\zeta)A_-(\zeta)$の形に分解される。大宮君はL(P)のDarboux変換$L^*(P;\zeta,Y)=A_-(\zeta)A_+(\zeta)$の性質の解明を行い，その成果を高次KdV方程式の研究に応用している。

Fは上に述べた条件を満たすFuchs 型2階常微分作用素L(P)でしかも$y_2(x)/y_1(x)$が有理関数になるもの全体とする。そのとき，L(P)のDarboux変換$L^*(P;\zeta,Y)$がすべてのζに対し再びFuchs 型になることとL(P)∈Fとなることが同等になる。さらにFの元L(P)に対し$\chi(L(P))=\#\{\zeta;L^*(P;\zeta,Y)\in F\}$とおけば$\chi(L(P))=0$，1または∞となる。本論文において大宮君は解析学の諸分野で重要な役割を果たしているモノドロミー保存変形の概念を用いFの元の特徴付けと，$F_\nu=\{L(P)\in F\mid\chi(L(P))=\nu\}$，$\nu=0,1,\infty$の性質の解明を進め，さらにこれらに関連して2階Fuchs型微分作用素のDarboux変換を用い高次KdV方程式の有理解を構成している。KdV方程式については近年種々の立場からの研究が行われ顕著な成果が得られているが，大宮君の研究はそれらの中でAdlerとMoserによる成果に密接に関連しており，彼等による有理解の構成法を違った観点から考察している。これらの成果は2階微分作用素のDarboux変換に関連する研究に新たな視点を与え，その理論の発展に貢献している。

以上，本論文における大宮君の研究はDarboux変換の研究を発展させ，解析学の研究に寄与する所が極めて大きく，理学博士の学位論文として十分価値あるものと認められる。