Title	Lower bounds for the Morse index of complete minimal surfaces in Euclidean 3-space
Author(s)	納谷, 信
Citation	
Issue Date	
Text Version	none
URL	http://hdl.handle.net/11094/37064
DOI	
rights	
Note	

【17】

氏名・(本籍)	納谷(なや) 信(しん)
学位の種類	理学博士
学位記番号	第 9054 号
学位授与の日付	平成 2 年 3 月 24 日
学位授与の要件	理学研究科数学専攻 学位規則第5条第1項該当
学位論文題目	Lower bounds for the Morse index of complete minimal surfaces in Euclidean 3-space (完備極小曲面のモース指数の下からの評価)
論文審査委員	(主査) 教授 尾関 英樹 (副査) 教授 村上 信吾　講師 加須栄 篤

論文内容の要旨

MをR^3内の完備で向き付け可能な極小曲面とする。Mの面積の第1変分は，コンパクト台をもつすべての変分に対して零である。第2変分を負にするような変分空間の次元の上限を，Mの(Morse)指数と呼びInd(M)で表す。Fischer-Colbrie, Gulliver-Lawsonは，Ind(M)が有限であることと，Mの全曲率(以下，TC(M)と書く)が有限であることとが，同値であることを示した。また，TyskはInd(M)のTC(M)による上からの評価を与えている。

本論文では，Ind(M)をMの幾何的不変量によって下から評価するという問題を考察する。

Fischer-Colbrieらの結果によれば，TC(M)が有限な場合を考えれば十分である。この場合，MのGauss写像$G: M \to S^2$(S^2はR^3内の単位球面)は，Mのコンパクト化$\overline{M}$からの正則写像$\overline{G}$に拡張される(Ossermanの定理)。$\overline{M}$の部分集合Aに対して，Aの各点での$\overline{G}$の分岐指数の和を$b(\overline{G}, A)$と書く。本論文の主定理は次の通りである。

定理．S^2の任意の大円S^1に対して，

$$\mathrm{Ind}(M) \geq b(\overline{G}, \overline{G}^{-1}(S^1)) + 1 - 2g$$

が成り立つ。ここで，gはMの種数である。

系1．$\overline{G}$のすべての臨界値が，S^2のある大円に含まれているとき，

$$\mathrm{Ind}(M) \geq \frac{1}{2\pi} TC(M) - 1$$

が成り立つ。

系2．Mの種数が0であるとする。Mが平面(指数0)，カテノイド，Enneper曲面(以上，指数1)のいずれでもなければ，$\mathrm{Ind}(M) \geq 3$

が成り立つ。

定理の証明は，MのJacobi場の零点集合の構造，更にその補集合の連結成分の個数を調べ，Courantの結節領域定理を使うことによりなされる。

定理を用いて，Jorge−Meeks曲面，Costa曲面などいくつかの極小曲面について，その指数の下からの評価が得られる。

一方，Jorge−Meeks曲面のJacobi作用素に随伴する固有値問題は，実際に解くことができ，その指数が計算される。それによると，定理，系の評価はsharpであることが分かる。

論文の審査結果の要旨

空間内の極小曲面については，その局所的理論はWeierstrass-Enneperによる表示公式で一応の完結を見たと云えるが，近来，完備極小曲面の大域的研究が盛んに行われ，曲面の位相的性質，全曲率，Gauss写像等との関連や，さらにはCosta曲面の発見など，目覚ましい成果をあげつつある。曲面のモース指数は，その曲面を面積が減少する方向に変形する自由度とも云え，曲面の大域的性質を与える幾何学的に重要な量であるが，現在の所，与えられた曲面のモース指数を具体的に計算するのは未だ困難である。

納谷君は空間内の向きづけられた完備極小曲面に対し，そのモース指数の下限の評価を与えた。この評価は現時点で最良のものであり，いくつかの具体的応用をもつ。

いま，極小曲面Mに対し，その拡張されたGauss写像$\bar{G}$を考察する。$\bar{G}$の領域である2次元球面内に任意に大円S^1をとり，$\bar{G}$のS^1上での分岐指数の総和を$b(\bar{G}, \bar{G}^{-1}(S^1))$とする。このとき，Mのモース指数Ind(M)に対し，

$$\mathrm{Ind}(M) \geq b(\bar{G}, \bar{G}^{-1}(S^1)) + 1 - 2g$$

なる不等式が成立することを主定理で示した。ここに，gはMの種数を表わす。

この定理の応用として，いくつかの具体的極小曲面に対し，それらのモース指数の下限の評価を与えた。さらに，カテノイドの一般化であるk−endsカテノイドについては，その曲面のJacobi作用素に随伴する固有値問題を実際に解き，モース指数がちょうど2k−3となることを示した。

以上述べた如く，納谷君のモース指数に関する研究は，極小曲面の大域的理論の分野での重要な成果を示しており，この方面での研究に寄与する所大であり，理学博士の学位論文として十分価値あるものと認める。