

Title	Lower bounds for the Morse index of complete minimal surfaces in Euclidean 3-space
Author(s)	納谷, 信
Citation	大阪大学, 1990, 博士論文
Version Type	
URL	https://hdl.handle.net/11094/37064
rights	
Note	著者からインターネット公開の許諾が得られていないため、論文の要旨のみを公開しています。全文のご利用をご希望の場合は、 〈a href="https://www.library.osaka-u.ac.jp/thesis/#closed"〉 大阪大学の博士論文について <a>〉 をご参照ください。

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

氏名・(本籍)	なや 納	たに 谷	しん 信
学位の種類	理	学	博 士
学位記番号	第	9 0 5 4	号
学位授与の日付	平成 2 年 3 月 24 日		
学位授与の要件	理学研究科数学専攻 学位規則第 5 条第 1 項該当		
学位論文題目	Lower bounds for the Morse index of complete minimal surfaces in Euclidean 3-space (完備極小曲面のモース指数の下からの評価)		
論文審査委員	(主査)	教授 尾関 英樹	
	(副査)	教授 村上 信吾 講師 加須栄 篤	

論 文 内 容 の 要 旨

M を R^3 内の完備で向き付け可能な極小曲面とする。 M の面積の第 1 変分は、コンパクト台をもつすべての変分に対して零である。第 2 変分を負にするような変分空間の次元の上限を、 M の (Morse) 指数と呼び $\text{Ind}(M)$ で表す。Fischer-Colbrie, Gulliver-Lawson は、 $\text{Ind}(M)$ が有限であることと、 M の全曲率 (以下、 $\text{TC}(M)$ と書く) が有限であることが、同値であることを示した。また、Tysk は $\text{Ind}(M)$ の $\text{TC}(M)$ による上からの評価を与えている。

本論文では、 $\text{Ind}(M)$ を M の幾何的不変量によって下から評価するという問題を考察する。

Fischer-Colbrie らの結果によれば、 $\text{TC}(M)$ が有限な場合を考えれば十分である。この場合、 M の Gauss 写像 $G: M \rightarrow S^2$ (S^2 は R^3 内の単位球面) は、 M のコンパクト化 \bar{M} からの正則写像 \bar{G} に拡張される (Osseman の定理)。 \bar{M} の部分集合 A に対して、 A の各点での \bar{G} の分岐指数の和を $b(\bar{G}, A)$ と書く。本論文の主定理は次の通りである。

定理. S^2 の任意の大円 S^1 に対して、

$$\text{Ind}(M) \geq b(\bar{G}, \bar{G}^{-1}(S^1)) + 1 - 2g$$

が成り立つ。ここで、 g は M の種数である。

系 1. \bar{G} のすべての臨界値が、 S^2 のある大円に含まれているとき、

$$\text{Ind}(M) \geq \frac{1}{2\pi} \text{TC}(M) - 1$$

が成り立つ。

系 2. M の種数が 0 であるとする。 M が平面 (指数 0), カテナイド, Enneper 曲面 (以上, 指数 1) のいずれでもなければ、 $\text{Ind}(M) \geq 3$

が成り立つ。

定理の証明は、 M のJacobi場の零点集合の構造、更にはその補集合の連結成分の個数を調べ、Courantの結節領域定理を使うことによりなされる。

定理を用いて、Jorge-Meeks曲面、Costa曲面などいくつかの極小曲面について、その指数の下からの評価が得られる。

一方、Jorge-Meeks曲面のJacobi作用素に随伴する固有値問題は、実際に解くことができ、その指数が計算される。それによると、定理、系の評価はsharpであることが分かる。

論文の審査結果の要旨

空間内の極小曲面については、その局所的理論はWeierstrass-Enneperによる表示公式で一応の完結を見たと言えるが、近来、完備極小曲面の大域的研究が盛んに行われ、曲面の位相的性質、全曲率、Gauss写像等との関連や、さらにはCosta曲面の発見など、目覚ましい成果をあげつつある。曲面のモース指数は、その曲面を面積が減少する方向に変形する自由度とも云え、曲面の大域的性質を与える幾何学的に重要な量であるが、現在の所、与えられた曲面のモース指数を具体的に計算するのは未だ困難である。

納谷君は空間内の向きづけられた完備極小曲面に対し、そのモース指数の下限の評価を与えた。この評価は現時点で最良のものであり、いくつかの具体的応用をもつ。

いま、極小曲面 M に対し、その拡張されたGauss写像 \bar{G} を考察する。 \bar{G} の領域である2次元球面内に任意に大円 S^1 をとり、 \bar{G} の S^1 上での分岐指数の総和を $b(\bar{G}, \bar{G}^{-1}(S^1))$ とする。このとき、 M のモース指数 $\text{Ind}(M)$ に対し、

$$\text{Ind}(M) \geq b(\bar{G}, \bar{G}^{-1}(S^1)) + 1 - 2g$$

なる不等式が成立することを主定理で示した。ここに、 g は M の種数を表わす。

この定理の応用として、いくつかの具体的極小曲面に対し、それらのモース指数の下限の評価を与えた。さらに、カテナイドの一般化である k -endsカテナイドについては、その曲面のJacobi作用素に随伴する固有値問題を実際に解き、モース指数がちょうど $2k-3$ となることを示した。

以上述べた如く、納谷君のモース指数に関する研究は、極小曲面の大域的理論の分野での重要な成果を示しており、この方面での研究に寄与する所大であり、理学博士の学位論文として十分価値あるものと認める。