【 8 】

氏名・（本籍）	許（きょ）　天（てん）　維（い）
学位の種類	理　学　博　士
学位記番号	第　9045　号
学位授与の日付	平成 2 年 3 月 24 日
学位授与の要件	理学研究科数学専攻 学位規則第 5 条第 1 項該当
学位論文題目	Spectral properties of differential operators related to stochastic oscillatory integrals （確率振動積分に関連した微分作用素のスペクトル）
論文審査委員	（主査） 教 授　池田　信行 （副査） 教 授　渡辺　毅　　助教授　中尾慎太郎

論 文 内 容 の 要 旨

R^d 上の滑らかな 1 次微分形式 $\alpha(x)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j(x)\,dx^j$ に対し，

$$L(\alpha)=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d}\left(\sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial x^j}+\alpha_j(x)\right)^2 \tag{1}$$

は磁場 $d\alpha$ を持つシュレディンガー作用素と呼ばれ，本質的自己共役である。その作用素の $L^2_C(R^d, dx)$ 内の自己共役拡張を $H(\alpha)$ とする。その時，d 次元ブラウン運動 $\{P_x;\ x\in R^d\}$ を考え，$f\in L^2_C(R^d, dx)$ に対し

$$T_t f(x)=E_x[e^{\sqrt{-1}S(t,w,\alpha)}f(w(t))] \tag{2}$$

とおけば，T_t は $L^2_C(R^d, dx)$ 上の半群で，その生成作用素は $-H(\alpha)$ になる。ここで $S(t, w, \alpha)$ は α のブラウン運動の道にそった確率的線積分で，E_x は P_x に関する平均を表す。$H(\alpha)$ のスペクトルの構造は α および $d\alpha$ の R^d 上の平坦計量に関するノルム $\|\alpha\|(x)$ および $\|d\alpha\|(x)$ の $|x|\to\infty$ の時の漸近状態に密接に関連していることが知られている。

本論文では R^2 で，極座標 (r, θ) で考えたリーマン計量の係数が

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & g(r)^2\end{pmatrix} \tag{3}$$

で与えられる場合を考える。ここで$g(r)$は$(0,\infty)$において正数値C^2-関数で，ある定数α_1，$\alpha_2 \geq 1$，$K>0$，$0<r_1<r_2$が存在して，$0<r\leq r_1$の時，$g(r)=r^{\alpha_1}$，$r\geq r_2$の時，$g(r)=Kr^{\alpha_2}$になるものとする。さらに，$\mathbf{R}^2$上の１次微分形式$\alpha(r,\theta)=k(r)d\theta$を考える。ここで$k(r)$は$(0,\infty)$において滑らかな正数値関数で$\lim_{r\to 0}k(r)=0$とする。この時，$C_0^\infty(\mathbf{R}^2)^C$上の微分作用素

$$L(\alpha)f=-\frac{1}{2}(\Delta f+2\sqrt{-1}<df,\alpha>)+\frac{1}{2}(\sqrt{-1}\delta\alpha+\|\alpha\|^2)f$$

の$\mathbf{R}^2$上のリーマン体積要素dmに関する２乗可積分な複素数値関数の作るヒルベルト空間$L^2_C(\mathbf{R}^2,dm)$内の自己共役拡張を$H(\alpha)$とする。ここで$<\cdot,\cdot>$と$\|\cdot\|$はそれぞれ与えられたリーマン計量に対応するエルミート的内積およびノルムとする。特に，$g(r)=r$ならば，リーマン計量は平坦になり，この$L(\alpha)$は(1)で与えられる作用素と一致する。この場合も$-H(\alpha)$に対応する$L^2_C(R^2, dm)$上の半群は(3)で与えられた$\mathbf{R}^2$上のリマーン計量に対応する拡散過程を用い，(2)と類似の確率振動積分で表される。

本論文においてはまず$\lim_{|x|\to 0}\|d\alpha\|(x)=0$の場合に$\|\alpha\|(x)$の$|x|\to\infty$の時の漸近状態に関連した$H(\alpha)$のスペクトルの特徴付けを行い，さらに$\lim_{|x|\to\infty}\|d\alpha\|(x)=\infty$の時は離散スペクトルのみを持つことを示す。次に関数kがある$p>\alpha_2+1$と定数r_0が存在し$k(r)=r^p$，$r\geq r_0$となることを仮定し，$N(\lambda)$をλより小さい$H(\alpha)$の固有値の数とすれば$\lambda\to\infty$の時，$N(\lambda)$の漸近状態について平坦計量の場合と類似の事実が成り立つことを示す。これらの証明には$L(\alpha)$の極座標表示と$-H(\alpha)$に対応する半群の確率振動積分による表示を用いる。

論 文 の 審 査 結 果 の 要 旨

２階偏微分作用素の性質をその作用素に対応する積分核のWiener空間上の積分表現を用いて研究する方法は解析学や幾何学の種々の問題に広く応用され顕著な成果を得ている。許君は本論文においてWiener空間上の確率振動積分と呼ばれる積分表現を用い，Schrödinger 作用素のスペクトルの性質の研究を行っている。

一般にRiemann多様体M上の１次微分形式αに対し，磁場$d\alpha$を持つSchrödinger作用素

$$L(\alpha)f=-\frac{1}{2}\{\Delta f+2\sqrt{-1}\langle df,\alpha\rangle-(\sqrt{-1}\delta\alpha+\|\alpha\|^2)f\},\qquad f\in C_0^\infty(M)$$

を考える。ここで$C_0^\infty(M)$はコンパクトな台を持つ滑らかなM上の複素数値関数の空間で，△はRiemann計量gに対応するLaplace-Beltrami作用素である。$L(\alpha)$に対応する$L^2(M;dm)$上の半群$\{T_t\}$が確率振動積分によって積分表現されることはMalliavin等によって示されている。ここで$L^2(M;dm)$はRiemann体積要素dmに関し２乗可積分な複素数値関数の空間である。許君は特に$M=\mathbf{R}^2$で

Riemann計量 g と1次微分形式 α が回転に関し不変な場合に $L(\alpha)$ の自己共役拡大 $H(\alpha)$ のスペクトルの性質を解明するために確率振動積分による表現を応用している。実際 g と α についていくつかの仮定の下で，$H(\alpha)$ のスペクトルの性質を $\|d\alpha\|(x)$，$\|\alpha\|(x)$ の $|x|\to\infty$ の時の漸近状態に応じて分類するとともに，$H(\alpha)$ が離散固有値のみを持つ場合にその漸近分布を $\{T_t\}$ の確率振動積分による表現を用いて求めている。またこれらの研究においては確率微分方程式の理論が重要な役割を果たしている。

これらの成果はSimonその他多くの人によって研究された g が $\mathbf{R}^2$ 上の平坦計量の場合の結果の一般化になっており，さらにより一般の場合の研究に大きな示唆を与えるもので極めて興味深い。

以上，本論文における許君の研究はWiener空間上の確率解析の研究を発展させ，確率論の研究に寄与する所大きく，理学博士の学位論文として十分価値あるものと認められる。