

Title	On index one covers of two-dimensional purely log terminal singularities in positive characteristic
Author(s)	有馬, 研一郎
Citation	大阪大学, 2003, 博士論文
Version Type	
URL	<a href="https://hdl.handle.net/11094/373">https://hdl.handle.net/11094/373</a>
rights	
Note	著者からインターネット公開の許諾が得られていないため、論文の要旨のみを公開しています。全文のご利用をご希望の場合は、 <a href="https://www.library.osaka-u.ac.jp/thesis/#closed">〈a href="https://www.library.osaka-u.ac.jp/thesis/#closed"〉</a> 大阪大学の博士論文について〈/a〉をご参照ください。

***Osaka University Knowledge Archive : OUKA***

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

氏名	ありま けんいちろう 有馬 研一郎
博士の専攻分野の名称	博士(理学)
学位記番号	第 17503 号
学位授与年月日	平成 15 年 3 月 25 日
学位授与の要件	学位規則第 4 条第 1 項該当 理学研究科数学専攻
学位論文名	On index one covers of two-dimensional purely log terminal singularities in positive characteristic (正標数における 2 次元純対数的端末特異点の指数 1 被覆について)
論文審査委員	(主査) 教授 宮西 正宜  (副査) 教授 藤木 明 教授 今野 一宏 助教授 並河 良典

### 論文内容の要旨

$k$  を代数的閉体、 $p$  をその標数とする。 $S$  を  $k$  上の正規曲面、 $\Delta = \sum d_i D_i$  を  $S$  上の  $\mathbf{Q}$ -因子とする。 $\Delta$  は  $0 \leq d_i \leq 1$ 、 $d_i \in \mathbf{Q}$  であるとき  $\mathbf{Q}$ -境界、 $d_i = 1 - 1/b_i$ 、 $b_i \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$  と書けるとき標準境界という。以下  $(S, \Delta)$  の芽で考える。 $(S, \Delta)$  の指数  $r = \text{index}(K_S + \Delta)$  とは  $r(K_S + \Delta)$  が Cartier 因子となるような最小の自然数のことである。 $L$  を  $S$  上の関数体、 $\varphi$  を  $L$  の元で  $\text{div}(\varphi) = r(K_S + \Delta)$  を満たすものとする。拡大体  $L(\sqrt[r]{\varphi})$  における正規化  $\pi: \tilde{S}_\varphi \rightarrow S$  を  $\varphi$  に伴う指数 1 被覆という。 $[\Delta]$  を  $\Delta$  の被約部分とする。以上の設定のもとで、正標数におけるログ極小モデル予想に関する次の問題を考える。

**問題 1.**  $k$  と  $S$  を上記のとおりとする。 $\Delta$  を標準境界で  $(S, \Delta)$  が指数  $r$  の純対数的端末特異点であるものとする。 $\varphi$  を上と同じとする。 $\varphi$  を充分一般に選び、 $(\tilde{S}_\varphi, \pi^*[\Delta])$  を標準特異点にすることができるか。そうでないならば、反例を分類せよ。

$\pi$  が分離的であるとき、反例がなく正しいことはよく知られた事実である。

正標数における指数 1 被覆は、切断の取り方に依存する。川又雄二郎氏は標数  $p \neq 2, 3$ 、 $\Delta$  が被約の場合、条件  $\text{div}(\varphi) = \text{div}(d\varphi)$  が満たされれば予想が正しいことを示した。川又氏はまた  $\varphi$  を充分一般に選べば条件  $\text{div}(\varphi) = \text{div}(d\varphi)$  が満たされることを示した。標数  $p = 2, 3$  の場合の反例については、川又氏自身によって実際に構成されている。川又氏はこの定理を正標数における 3 次元半安定フリップの存在証明に用いた。

我々は  $\varphi$  に関する条件を工夫して、上記以外の場合でも成り立つようにすることを考える。

**定理 2 (主定理).**  $k$  を標数  $p \geq 3$  の代数的閉体、 $S$  を非特異曲面、 $\Delta$  を標準境界で  $(S, \Delta)$  が指数  $r$  の純対数的端末特異点であるものとする。 $\pi: \tilde{S}_\varphi \rightarrow S$  を  $\varphi$  に伴う指数 1 被覆とする。 $\varphi$  を充分一般に選び、 $\tilde{S}_\varphi$  を標準特異点にす

ることができる。

ここで  $\varphi$  の条件は以下のとおりである：

$R = k\{x, y\}$  を  $k[x, y]_{(x,y)}$  の Hensel 化、 $\mathfrak{m}_0$  をその極大イデアルとする。  $\Delta = \sum (1-1/b_i)D_i$  とし  $f_i$  を  $D_i$  の方程式とする。  $d: O_S \rightarrow \Omega_{S,0}^1$  を微分写像、  $ev: \Omega_{S,0}^1 \rightarrow \Omega_{S,0}^1 / \mathfrak{m}_0 \Omega_{S,0}^1$  を商写像とする。  $u = \varphi / (\theta^r \prod f_i^{e_i})$  とおく。ここで  $\text{div}(\theta) = K_S$ 、  $e_i = r(1-1/b_i)$  である。このとき空でない Zariski 開集合  $U \subset \Omega_{S,0}^1 / \mathfrak{m}_0 \Omega_{S,0}^1$  で  $ev(du) \in U$  となるものが存在する。

この定理により  $S$  が非特異で標数が 3 以上の場合、例外なく肯定的に解決された。標数が 2 の場合は、 $\varphi$  に関する条件が定理のとおりでも幾つかの反例がある（現段階では反例の分類を行っている）。よって標数が 2 の場合と  $S$  に特異点が存在する場合は未解決である。

### 論文審査の結果の要旨

$S$  を正標数  $p \geq 3$  の代数的閉体  $k$  上定義された非特異代数曲面の芽 (germ) とし、  $\Delta = \sum_i (1-1/b_i)D_i$  をその標準境界とする。この対  $(S, \Delta)$  が指数  $r$  の純対数的端末特異点を持つものと仮定して、  $r(K_S + \Delta) = \text{div}(\varphi)$  となる関数  $\varphi$  を用いて指数 1 被覆  $\tilde{S}_\varphi \rightarrow S$  を構成する。このとき、 $\varphi$  を十分に一般的になるように選べば、 $\tilde{S}_\varphi$  は高々標準特異点を持つようにできることを示した。また、標数  $p=2$  の場合についても同様の考察をし反例が存在することを示した。これらの結果は正標数の体上の 2 次元の特異点に新たな知見を加えたばかりでなく、正標数の体上で 3 次元代数多様体に対する対数的半安定フリップの存在を示すために有用であると考えられる。したがって、本論分は博士（理学）の学位論文として十分価値があるものと認める。