Title	Réductions Kählériennes dans les groupes de Lie résolubles et applications
Author(s)	Boyom, Michel Nguiffo
Citation	Osaka Journal of Mathematics. 2010, 47(1), p. 237-283
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/3763
rights	
Note	

Boyom, M.N.
Osaka J. Math.
47 (2010), 237–283

RÉDUCTIONS KÄHLÉRIENNES DANS LES GROUPES DE LIE RÉSOLUBLES ET APPLICATIONS

To Thomas, Marie, Camille and Emma

MICHEL NGUIFFO BOYOM

(Received January 21, 2008, revised November 21, 2008)

Résumé

This work is devoted to the Marsden–Weinstein reduction problem for Kaehlerian metrics [34]. We focus the attention on Kaehlerian manifolds (M, ω, J) whose underlying symplectic structures (M, ω) are homogeneous under symplectic actions of completely solvable Lie groups. Homogeneous symplectic manifolds of this type always admit lagrangian foliations. In this setting the starting Kaehlerian reduction problem yields new problems involving the topology of affinely flat manifolds [36]. The KV cohomology of these affinely flat structures is computed using techniques of spectral sequences. Questions close to bi-lagrangian structures are discussed. The KV cohomology of affinely flat manifolds is used to give new proofs of some known deep theorems. For instance we revisit the fundamental conjecture of Gindikin, Piateccii–Sapiro and Vinberg [18], [19]. The global geometry of compact symplectic solvmanifolds admitting Kaehlerian metrics is revisited. Various additonal items which are closely related to the reduction problem and to lagrangian foliations are discussed.

Ce travail est consacré à l'analogue Kählérien du problème de réduction des variétés symplectiques d'après Marsden-Weinstein [34]. L'accent est mis sur les variétés Kählériennes (M, ω, J) dont les structures symplectiques sous-jacentes (M, ω) sont homogènes sous des actions symplectiques des groupes de Lie complètement résolubles. Les variétés symplectiques homogènes de ce type portent toujours des feuilletages lagrangiens. Du problème initial de réduction Kählérienne surgisent des nouvelles questions liées à la topologie des variétés affinement plates [36]. La KV cohomologie de ces structures affinement plates est calculée par des techniques de suite spectrale. Des questions en relation avec les structures bi-lagangiennes sont discutées. Dans ce même contexte la KV cohomologie est utilisée pour donner des nouvelles démonstrations de certaines conjectures devenues théorèmes. C'est le cas de la conjecture fondamentale de Gindikin, Piateccii-Sapiro et Vinberg [18], [19]. Nous avons aussi revisité la géométrie globale des soluvariétés qui admettent des métriques Kählériennes. D'autres prolongements sont explorés mais non exploités.

2000 Mathematics Subject Classification. Primary 22E25, 22E45, 53A10; Secondary 57S10.

1. Introduction

A cause de ses applications en Physique mathématique, en Mécanique hamiltonienne etc. les réductions des variétés symplectiques sont d'un immense intérêt [33], [34]. Un procédé de réduction des variétés symplectiques admettant une action hamiltonienne propre avec application moment d'un groupe de Lie est dû à J. Marsden et A. Weinstein [34]. La première partie de ce travail concerne le problème de réduction de Marsden-Weinstein des variétés Kählériennes. A cause de certaines applications que nous avons en vue, les efforts sont concentrés sur les variétés Kählériennes dont les variétés symplectiques sous-jacentes supportent des systèmes dynamiques différentiables résolubles [50]. Plus précisement on se limite aux variétés symplectiques admettant des actions simplement transitives d'un groupe de Lie complètement résoluble. Le contexte arrêté conduit á la confrontation de la géométrie des variétés bi-Lagrangiennes avec la géométrie des variétés localement plates au sens de Koszul, cf. [28], [38], [49], [50], [55]. De cette confrontation surgissent plusieurs problèmes dont deux sont étudiés en détail dans ce travail. Le premier problème prend racine dans la situation suivante.

Soit (M, ω, L) un triplet formé d'une variété symplectique (M, ω) équipée d'un feuilletage lagrangien L. Une structure presque complexe (M, J) est adapatée à (M, ω) si (M, ω, J) est une variété presque Kählérienne dans le sens qu'en tout point $x \in M,\ X, Y \in T_x M \to \omega(JX, Y) + \sqrt{-1}\omega(X, Y)$ est un produit hermitien défini positif. Dans cette situation $(L, J(L))$ est une paire de distributions lagrangiennes transverses. Immédiatement surgit la question de savoir si la deuxième distribution lagrangienne $J(L)$ est complètement intégrable.

Lorsque cette distribution Lagrangienne $J(L)$ est complètement intégrable (M, ω) est équipé de la paire $(L, J(L))$ de feuilletages Lagrangiens transverses. Ces deux feuilletages sont des feuilletages en (sous-)variétés localement plates [56]. Quand il en est ainsi M porte une unique connexion linéaire sans torsion D telle que pour tout champ de vecteurs X on a $D_X\omega = 0,\ D_X L = L$ et $D_X J(L) = J(L)$ [23]. La question cruciale est alors de savoir si le tenseur de courbure de D est identiquement nul. Posons $D_J = D$. Si le tenseur de courbure de D_J est nul alors la structure localement plate de chaque feuille de L (respectivement la structure localement plate de chaque feuille de $J(L)$) est induite par la structure localement plate (M, D_J) [23], [38]. On dit alors que la paire $(L, J(L))$ est localement (ou affinement) plate.

Les questions soulevées ci-dessus ont conduit à l'étude du problème P_2 de l'existence de structures presque complexes intégrables (M, J) qui sont adaptées à une FL-structure (M, ω, L) et qui donnent naissance à des structures bi-Lagrangiennes localement plates définies par $(L, J(L))$, (*i.e.* tel que le tenseur de courbure de D_J soit nul.) Le problème général P_2 ainsi posé est difficile. En effet il existe des variétés symplectiques n'admettant pas de structure Kählérienne. Nous recommandons les reférences [6], [16], [33], [52]. Nous avons limité notre ambition au cas des FL-structures invariantes à gauche dans les groupes de Lie complètement résolubles. Nous avons donné une solution complète du problème P_2.

En réalité pour résoudre le problème P_2 il a fallu étudier un premier problème P_1 lui aussi génériquement difficile. En voici l'énoncé. Au départ soit (M, J) une structure holomorphe adaptée à une FL-structure (M, ω, L). A priori on ne fait pas d'hypothèse de nullité du tenseur de courbure de la connexion symplectique D_J qui en est issue. On suppose donnée une action hamiltonienne (propre) avec application moment équivariante μ d'un groupe de Lie H dans (M, ω, L). On suppose que zéro est une valeur régulière de l'application μ. Ainsi $\mu^{-1}(0)$ possède un quotient qui est une réduction de Marsden-Weinstein de (M, ω, L). Alors se pose le problème P_1 de savoir si (M, J) accompagne cette réduction. En d'autres termes, (M, J) possède-t-elle une réduction qui est adaptée à la réduction symplectique donnée par $\mu^{-1}(0)$? C'est ce problème de réduction (Kählérienne) qui légitime le titre de cet article. Dans le cas des FL-structures invariantes à gauche dans les groupes de Lie complètement résolubles nous résolvons complètement ce problème P_1, voir les Théorèmes 21 et 23. Les solutions du problème P_1 servent d'ingrédients puissants pour l'étude et la résolution du problème P_2 (voir les Théorèmes 16 et 25). Soit (G, ω, L) une FL-structure invariante à gauche, G étant un groupe de Lie complètement résoluble. A propos des problèmes P_1 et P_2 on observe que chaque structure holomorphe (G, J) qui est adpatée à (G, ω, L) définit une structure localement plate (G, D_J) qui en général n'est pas invariante à gauche. On a prolongé notre champ d'intérêt pour la structure localement plate (G, D_J) à notre intérêt pour la KV cohomologie de (G, D_J) ainsi pour quelques applications de cette cohomologie à des questions d'apparence éloignées de nos préoccupations de départ. La KV cohomologie scalaire de (G, D_J) est calculée à l'aide des suites spectrales fournies par la paire $(L, J(L))$. Les paires de feuilletages Lagrangiens sont utiles à la méthode BKS de quantification géométrique [58]. Ce prolongement n'est pas abordé dans ce travail. Nous avons mis en évidence des liens étroits entre la KV cohomologie de (G, D_J) et divers aspects de la géométrie globale de (G, D_J) tels que :

(i) le problème de complétude de (M, D_J) [10], [17], [36] ;

(ii) le problème d'hyperbolicité des variétés localement plates [26], [28], [29], [54].

D'autres ramifications de la KV cohomologie de (G, D_J) sont signalées sans toute fois être traitées en détails, *e.g.* (i) le couplage entre la KV cohomologie et la KV homologie, (ii) la KV cohomologie et les réductions de Dirac des structures de Poisson. Cette dernière relation entre la KV cohomologie des algébroides de Koszul-Vinberg [39] et les travaux de Blaszak et Marciniak [8] sur les réductions de Dirac des structures de Poisson nous a été signalée par Jim Stasheff [51]. D'après Karin Erdmann et Simon Salamon [15] les méthodes de réduction Kählériennes mises en évidence dans ce travail suggèrent un autre angle de lecture des travaux de Dorfmeister [13] sur la conjecture fondamentale énoncée par S.G. Gindikin, I.I. Piatecckii-Sapiro et E.B. Vinberg concernant la fibration des variétés Kählériennes homogènes au-dessus des domaines bornés [14], [18], [19]. Cette suggestion est examinée à la section 4. L'utilisation de la KV cohomologie permet en effet de redémontrer plus rapidement le cas (c) de la conjecture fondamentale, cf. Théorème 49.

Ce travail comprend quatre sections.

Section 1. Cette section est consacrée à l'introduction.

Section 2. Elle est consacrée à la réduction des groupes de Lie symplectiques et aux rappels des théorèmes de construction des structures bi-Lagrangiennes affinement plates Kählériennes dans certains espaces symplectiques homogènes [37].

Section 3. Elle est consacrée aux réductions des structures holomorphes (G, J) qui sont adaptées à une FL-structure invariante à gauche (G, ω, L). Sur le plan technique les principaux résultats sont les Théorèmes 16, 21, 23, et 25. Le problème de platitude de la connexion symplectique D_J fait l'objet de la sous-section 3.5 (cf. Théorème 31). En vue de certaines applications (*e.g.* deux conjectures de Benson-Gordon, cf. Théorème 43), le Théorème 33 est l' âme de la sous-section 3.5.

Section 4. Cette section est consacrée entre autres à des applications variées du Théorème 33. Le cas (c) de la conjecture fondamentale ainsi que deux questions formulées par C. Benson et C. Gordon sont revisitées. Dans le cadre de la géométrie des FL-structures un cas particulier de la première conjecture de Benson-Gordon se déduit du Théorème 43. Ce qui est qualifié de Conjecture 42 est infirmée par un exemple ; (cf. Remarque 45). La sous-section 4.3 est consacrée à des KV complexes de chaine attachés aux algèbres de Koszul-Vinberg. Des exemples et diverses applications de la KV cohomologie sont donnés. En particulier cette cohomologie est utlisée pour donner une nouvelle démonstration du cas (c) de la conjecture fondamentale, cf. Théorème 49. Ce faisant nous avons répondu affirmativement à une interrogation de Karin Erdmann et Simon Salamon [15]. Du point de vue de calcul effectif on a construit quelques suites spectrales qui convergent vers la KV cohomologie des algèbres de Koszul-Vinberg. En outre l'examen des KV complexes à coefficients dans les fibrés des tenseurs a permis de construire une suite spectrale mettant en lunmière un isomorphisme canonique entre la cohomologie des formes différentielles d'ordre supérieur introduite et étudiée par Jean-Louis Koszul dans [30] et la cohomologie du complexe pionnier de Albert Nijenhuis étudié dans [44], cf. Théorème 60. Cette suite spectrale fournit des interprétations inédites de ces deux cohomologies. Le Lemme 50 est en fait la première tentative réussie de définition d'une théorie d'homologie des KV algèbres. De ce point de vue ce lemme est fondateur de la théorie d'homologie des algèbres de Koszul-Vinberg à coefficients dans leurs bi-modules. En dimension finie on a rappelé le couplage naturel entre la KV cohomologie et la KV homologie lorsque le module des coefficients est un module à gauche. Ce couplage a été introduit dans [41]. On a rappelé également l'utilisation de la KV cohomologie pour construire les structures de Poisson et leurs réductions de Dirac [8], [39]. A la sous-section 4.7 on signale l'existence des k-tissus Lagrangiens dans certaines variétés Kählériennes. Le seul résultat concernant ces tissus est leur linéarisation locale.

2. Groupes de Lie symplectiques

2.1. Réductions d'une 2-forme différentielle fermée. Tous les groupes de Lie qui sont considérés sont réels, résolubles, connexes et simplement connexes. Soit G un groupe de Lie. L'algèbre de Lie de G est la sous-algèbre g des champs de veteurs invariants par les translations gauche dans G. On désigne par $\Omega_l^2(G)$ l'espace vectoriel des 2-formes différentielles fermées qui sont invariantes par les translations à gauche.

Etant donné $\omega \in \Omega_l^2(G)$ on s'intéresse aux suites finies (H_j, G_j) de paires de sous-groupes de Lie connexes fermés de G satisfaisant la condition suivante : la sous-algèbre de Lie qui détermine le sous-groupe H_j engendre le noyau de la 2-forme $\omega_j = i^\star\omega$ où $i : G_j \mapsto G$ est l'application inclusion. Pour tout $\omega \in \Omega_l^2(G)$ il existe une suite (H_j, G_j) satisfaisant les deux conditions suivantes :
(1) $G_{j+1} \subset G_j$,
(2) $\operatorname{codim}(G_j) = j$.
Un groupe de Lie complètement résoluble est un groupe de Lie résoluble satisfaisant la condition suivante : les valeurs propres de la représentaion adjointe de G sont des fonctions réelles. Dans la suite on se servira des suites de paires (H_j, G_j) dont l'existence est garantie par le résultat élémentaire suivant.

Lemme 1. *Soit G un groupe de Lie complètement résoluble. Soit $\omega \in \Omega_l^2(G)$ une forme symplectique. Alors il existe une suite (H_j, G_j) de paires de sous-groupes de Lie fermés jouissant des quatre propriétés suivantes* :
(1) *dans chaque paire (H_j, G_j) le sous-groupe H_j est distingué dans G_j,*
(2) *$H_j \subset H_{j+1}$ et $G_{j+1} \subset G_j$,*
(3) *la codimension de G_j dans G est égale à j,*
(4) *la sous-algèbre de Lie h_j qui définit le sous-groupe de Lie H_j engendre le noyau de $\omega_j = i^\star\omega$, $i : G_j \to G$ est l'application inclusion.*

Démonstration. On procède par recurrence sur la dimension de G. Si la dimension de G est deux alors la conclusion du Lemme 1 est trivialement vraie. Supposons que le Lemme 1 soit vrai jusqu'à la dimension $2m$. Considérons un groupe de Lie complètement résoluble G de dimension $2m + 2$. On suppose que G porte une forme symplectique $\omega \in \Omega_l^2(G)$. Soit g l'algèbre de Lie de G. L'algèbre de Lie g contient un idéal de dimension 1, h_1. Soit H_1 le sous-groupe de Lie distingué connexe de G déterminé par la sous-algèbre de Lie h_1. Désignons par g_1 le sous-espace vectoriel orthogonal symplectique de h_1 dans g. En d'autres termes on a $\omega(X, Y) = 0$, $\forall X \in h_1$, $\forall Y \in g_1$. Puisque ω est fermée g_1 est une sous-algèbre de Lie de codimension 1 de g. Soit G_1 le sous-groupe de Lie connexe déterminé par g_1 et soit ω_1 l'image inverse de ω par l'application inclusion de G_1 dans G. De la forme différentielle ω_1 le groupe de Lie quotient G_1/H_1 hérite d'une forme symplectique invariante par les translations à gauche. Puique $\dim(G_1/H_1) = 2m$ l'hypothèse de recurrence du Lemme 1 assure que G_1/H_1 possède une suite de paires $(H'_j, (G_1/H_1)_j)$ satisfaisant les quatre proppriétés du

Lemme 1 pour la forme symplectique héritée de ω_1. L'image inverse de $(H'_j, (G_1/H_1)_j)$ par l'homomorphisme π de G_1 sur G_1/H_1 détermine dans (G, ω) une suite (H_j, G_j) qui satisfait les quatre propriétés du Lemme 1. □

Corollaire 2. *Tout groupe de Lie complètement résoluble G muni d'une forme symplectique $\omega \in \Omega^2_l(G)$ contient un sous-groupe Lagrangien.*

Démonstration. On procède par recurrence sur la dimension de G. Soit $\omega \in \Omega^2_l(G)$ une forme symplectique. En dimension 2 la conclusion du corollaire est vraie. En dimension $2m + 2$ on choisit un sous-groupe connexe distingué de dimension 1 $H_1 \subset G$. Conformément à la notation adoptée dans la démonstration du Lemme 1 on désigne par G_1 le sous-groupe de Lie connexe dont l'algèbre de Lie g_1 est le sous-espace vetoriel ω-orthogonal à l'algèbre de Lie h_1 de H_1. L'argument de recurrence assure l'existence d'un sous-groupe de Lie Lagrangien L_m dans G_1/H_1. L'image inverse $L_{m+1} = \pi^{-1}(L_m)$ par l'homomorphisme canonique $\pi : G_1 \to G_1/H_1$ est un sous-groupe de Lie Lagrangien du groupe G. Ceci termine la démonstration du corollaire. □

Dans la suite un couple (G, ω) avec $\omega \in \Omega^2_l(G)$ est appelé groupe de Lie symplectique si ω est une forme symplectique. D'après le Corollaire 2 du Lemme 1 tout groupe de Lie symplectique complètement résoluble possède un feuilletage Lagrangien L invariant par les translations à gauche. La démonstration du Lemme 1 assure que l'on peut en fait choisir la suite (H_j, G_j) et le sous-groupe Lagrangien L de sorte que L se projette sur un sous-groupe Lagrangien $L_j \subset G_j/H_j$ dans chaque groupe de Lie symplectique $(G_j/H_j, \omega_j)$.

Conformément à la notation utilisée ci-dessus ω_j désigne (abusement) à la fois la restriction de ω au sous-groupe G_j et la forme symplectique du groupe de Lie G_j/H_j héritée de ω_j. Notons i l'homomorphisme inclusion $G_{j+1} \to G_j$ alors la forme différentielle ω_j et la forme symplectique $\omega_{j+1} \in \Omega^2_l(G_{j+1}/H_{j+1})$ sont liées par $\pi^\star \omega_{j+1} = i^\star \omega_j$.

DÉFINITION 3. Une structure bi-Lagrangienne dans une variété symplectique (M, ω) est une paire (F_1, F_2) de feuilletages Lagrangiens partout transverses.

Dans la suite une structure bi-Lagrangienne dans (M, ω) sera présentée sous la forme d'un quadruplet (M, ω, F_1, F_2). Il existe une unique connexion symplectique sans torsion D qui préserve chacun des feuilletages F_1 et F_2. (Voir Section 3 pour la définition précise de D).

DÉFINITION 4. Une structure bi-Lagrangienne (M, ω, F_1, F_2) est dite Kählérienne si la connexion symplectique D qu'elle détermine est la connexion de Levi-Civita d'une structure Kählérienne (M, h) dont la forme de Kaehler est ω.

Dans la définition 4 ci-dessus dire que ω est la forme de Kaehler de (M, h) signifie que M porte une structure presque complexe intégrable (M, J) dont le tenseur J définit le produit hermitien h par la formule

$$h(X, Y) = \omega(JX, Y) + \sqrt{-1}\omega(X, Y).$$

Retournons aux feuilletages Lagrangiens L_j dans les $(G_j/H_j, \omega_j)$. Alors dans chaque G_j/H_j le feuilletage L_j est facteur d'une structure bi-Lagrangienne Kählérienne $(G_j/H_j, \omega_j, L_j, N_j)$ [37], [38]. Plus précisement on a

Théorème 5. *Il existe dans chaque $(G_j/H_j, \omega_j)$ un deuxième feuilletage Lagrangien N_j transverse à L_j tel que la structure bi-Lagrangienne (L_j, N_j) est affinement plate et se projette sur $(L_j + 1, N_j + 1)$ dans le sens suivant : π et i étant respectivement la projection de G_{j+1}/H_j sur G_{j+1}/H_{j+1} et l'inclusion de G_{j+1}/H_j dans G_j/H_j on a $\pi_\star(i_\star^{-1}(N_j)) = N_{j+1}$.*

En conjuguant la géométrie affine et la géométrie symplectique des groupes de Lie complètement résolubles [37], on a plus précisement

Théorème 6. *On peut construire les feuilletages Lagrangiens N_j de sorte que chaque structure bi-Lagrangienne $(G_j/H_j, \omega_j, L_j, N_j)$ soit affinement plate Kählérienne.*

REMARQUE 7. Tout groupe de Lie symplectique complètement résoluble possède une structure bi-Lagrangienne affinement plate Kählérienne (L, N) compatible avec une suite (H_j, G_j) dans le sens du théorème énoncé 5 ci-dessus.

3. Problème de réduction des structures analytiques complexes adaptées aux *FL*-structures

3.1. Notation-Définitions. Soit (G, ω) un groupe de Lie symplectique complètement résoluble. On fixe une fois pour toutes une structure bi-Lagrangienne affinement plate Kaehlŕeienne (L, N) et une suite (H_j, G_j) satisfaisant les conditions suivantes.
(1) Le feuilletage L est invariant gauche,
(2) H_j est distingué dans G_j,
(3) Chacun des groupes de Lie symplectiques $(G_j/H_j, \omega_j)$ hérite de (L, N) d'une structure bi-Lagrangienne affinement plate Kählérienne $(G_j/H_j, \omega_j, L_j, N_j)$,
(4) (L_{j+1}, N_{j+1}) est la projection de (L_j, N_j) dans le sens de Théorème 5 ci-dessus.
On désigne par J_j le tenseur de la structure presque complexe du produit hermitien de $(G_j/H_j, \omega_j, L_j, N_j)$.

En particulier le produit hermitien h_0 de (G, ω) est donné par la formule

$$h_0(X, Y) = \omega(J_0X, Y) + \sqrt{-1}\omega(X, Y).$$

Ainsi le triplet $(G_j/H_j, \omega_, J_j)$ représente la structure Kählérienne plate définie par (L_j, N_j). Conformément au formalisme de réduction de Marsden-Weinstein la variété Kählérienne $(G_{j+1}/H_{j+1}, \omega_{j+1}, J_{j+1})$ est une réduction (Kählérienne) de $(G_j/H_j, \omega_j, J_j)$. Dans la variété holomorphe $(G_j/H_j, J_j)$ les feuilletages L_j et N_j sont totalement réels et orthogonaux pour la métrique Riemannienne $g_j(X, Y) = \omega_j(J_j X, Y)$. En d'autres termes on a $J_j(L_j) = N_j$.

REMARQUE 8. On observe que dans le quadruplet $(G_j/H_j, \omega_j, L_j, N_j)$ seuls sont invariants par l'action du groupe de Lie G_j le couple (ω_j, L_j).

DÉFINITION 9. Une FL-variété symplectique (ou FL-structure symplectique) est une variété symplectique (M, ω) munie d'un feuilletage Lagrangien L.

Chaque feuille de tout feuilletage Lagrangien L porte une connexion linéaire ∇ dont les tenseurs de torsion et de courbure sont nuls. La dérivation covariante ∇ de cette connexion est donnée par la formule suivante

$$\omega(\nabla_X(Y), Z) = (L_X i_Y \omega)(Z),$$

dans laquelle les champs de vecteurs X, Y sont tangents au feuilletage L, L_X et i_Y sont respectivement la dérivation de Lie dans la direction du champ de vecteurs X et le produit intérieur par le champ de vecteurs Y.

Soit (M, ω, L, N) une structure bi-Lagrangienne. Comme on l'a signalé M porte une unique connexion symplectique sans torsion D qui vérifie la condition suivante : pour tout champ de vecteurs X et tout champ de vecteurs Y tangent à L (resp. tangent à N) $D_X(Y)$ est tangent à L (resp. est tangent à N). Pour écrire la fomrule explicite donnant la connexion D on décompose tout champ de vecteurs tangents à M comme il suit $X = (X_1, X_2) \in TF \oplus TN$. Alors la dérivation covariante D est donnée par la formule suivante

$$D_{(X_1, X_2)}(Y_1, Y_2) = (\nabla_{X_1}(Y_1) + [X_2, Y_1]_1, \nabla_{X_2}(Y_2) + [X_1, Y_2]_2).$$

Les composantes $\nabla_{X_1}(Y_1)$ et $\nabla_{X_2}(Y_2)$ ont été définies ci-dessus par la formule $\omega(\nabla_X(Y), Z) = (L_X i_Y \omega)(Z)$. Rappelons que la structure bi-Lagrangienne est dite affinement plate si le tenseur de courbure de D est nul.

DÉFINITION 10. Une structure bi-Lagrangienne (G, ω, L, N) est dite complète si la connexion symplectique D qu'elle définit est géodésiquement complète.

La géométrie Kählérienne d'une FL-variété consiste en la compatibilité entre la géométrie analytique complexe et la FL-structure dans le sens de la défintion suivante.

DÉFINITION 11. Une structure presque complexe intégrable (M, J) est adaptée à une FL-structure (M, ω, L) si les conditions suivantes sont vérifiées
(i) le triplet (G, ω, J) définit une structure de variété Kählérienne,
(ii) le quadruplet $(G, \omega, L, J(L))$ définit une structure bi-Lagrangienne.

Toute structure symplectique (M, ω) possède des structures presque complexes (M, J) qui lui sont adaptées dans le sens que J est une isométrie de ω et qu'en tout point x de M la forme quadratique $\langle q\rangle$ définie dans l'espace vectoriel tangent par la formule $\langle q\rangle(X) = \omega_x(JX, X)$ est définie positive. Dans ce cas $(L, J(L))$ est une paire de distributions Lagrangiennes qui sont transverses en tout point. Il existe des structures symplectiques ne possédant aucune structure presque complexe intégrable adaptée [11], [16], [33], [52].

PROBLÈME 12. L'étude du module des structures presque complexes intégrables adaptées à une FL-structure dans le sens de la définition 9 est sûrement un problème largement ouvert. Nous allons en traiter un aspect plus modeste en nous limitant à certaines FL-structures symplectiques homogènes.

En effet soit $TL \subset TM$ le sous-fibré tangent à un feuilletage Lagrangien L ; TL est un algébroide de Lie. L'algèbre de Lie $\Gamma(TL)$ des sections de TL est l'algèbre des commutateurs de l'algèbre de Koszul-Vinberg dont la multiplication est définie par $X, Y \to \nabla_X Y$, $\forall X, Y \in \Gamma(TL)$ [37], [38], [56]. Compte tenu de l'unicité de connexion symplectique sans torsion associée à une structure bi-Lagrangienne, une structure presque complexe intégrable (M, J) adaptée à une FL-structure symplectique (M, ω, L) donne lieu à une unique connexion symplectique sans torsion D qui preserve la structure bi-Langrangienne $(L, J(L))$ [23], [37]. La restriction de D à chaque feuille du feuilletage L (resp. du feuiletage $J(L)$) y définit une structure localement plate dans le sens de Koszul. Le tenseur de courbure de D est l'unique obstruction à l'existence des coordonnées (locales) de Darboux constituées des intégrales premières respectives de L et de $J(L)$, (cf. les conditions (1), (2), (3), (4) du théorème 17 ci-dessous).

EXEMPLE 13. Considérons le plan réel $(x, y) \in R^2$ muni de la forme différentielle sympectique $\omega = \exp(xy)\, dx \wedge dy$. Les deux feuilletages par les droites $x =$ constant et par $y =$ constant sont Lagrangiens. Le tenseur de courbure de la connexion symplectique correspondant n'est pas nul. Par contre si $\omega = (\exp(x) + \exp(y))\, dx \wedge dy$ alors la même paire de feuilletages Lagrangiens $((x = \text{constant}), (y = \text{constant}))$ done lieu à une connexion linéaire dont le tenseur de courbure est nul.

PROBLÈME 14. Un autre problème intéressant est le problème de réduction (à la Marsden-Weinstein) des structures presque complexes (resp. des structures presque complexes intégrables) adpatées à une FL-structure symplectique.

Nous allons étudier les problèmes 12 et 14 ci-dessus en nous limitant aux FL-structures symplectiques homogènes des groupes de Lie complètement résolubles. La principale raison de cette restriction est que nous disposons de Théorème 5 de la section 2. Dans la sous-section qui suit on va s'intéresser aux structures presque complexes intégrables qui sont quasi-adaptées (dans le sens de la définition somme toute classique ci-dessous [7]) à une FL-structure symlectique donnée. En voici la définition

DÉFINITION 15. Une structure presque complexe intégrable (M, J) est quasi-adaptée à une FL-structure symplectique (M, ω, L) si (M, ω, J) est une structure Kählérienne.

3.2. Réduction des tenseurs presque comlexes quasi-adaptés. Comme il a été annoncé on se limite aux FL-structures symplectiques homogènes des groupes de Lie complètement résolubles. Nous allons traiter en détail le cas des groupes de Lie symplectiques. Soit (G, ω, L) une FL-structure invariante à gauche dans un groupe de Lie symplectique complètement résoluble (G, ω). Posons $(G_0, \omega_0, L_0) = (G, \omega, L)$. On se place dans la configuration du Théorème 5. En vertu de ce théorème 5 on fixe une suite (H_j, G_j) qui satisfait le Lemme 1 et qui donne lieu à la suite $(G_j/H_j, \omega_j, L_j, N_j))$ des structures bi-Lagrangiennes (affinement) plates Kählérienne. La structure Kählérienne plate du groupe de Lie symplectique $(G_j/H_j, \omega)$ est définie par une structure presque complexe intégrable $(G_j/H_j, J_j)$ adaptés à la FL-structure $(G_j/H_j, \omega_j, L_j)$.

En outre $(G_{j+1}/H_{j+1}, L_{j+1}, N_{j+1})$ est une réduction de $(G_j/H_j, \omega_j, L_l, N_j)$ dans le sens du Théorème 5 ci-dessus. Un des résultats principaux de cette sous-section est le suivant

Théorème 16. *Les notations étant celles ci-dessus toute structure presque complexe intégrable* (G, J) *quasi-adaptée à la* FL*-structure symplectique* (G, ω) *lui est adpatée dans le sens de la définition* 11.

La démonstration du Théorème 16 répose sur d'autres théorèmes intéressants que nous allons énoncer. Ceux de ces théorèmes qui sont classiques seront énoncés sans démonstration mais la reférence sera donnée. Ceux de ces théorèmes qui sont nouveaux seront démontrés en détail. On va se placer au niveau des deux premiers termes (H_1, G_1) et (e, G), de la configuration du Théorème 5, e est l'élément neutre du groupe (symplectque) G. Soient h_1, g_1 et g les algèbres de Lie respectives des groupes de Lie H_1, G_1 et G.

A partir de maintenant on fixe une structure presque complexe intégrable (G, J) qui est quasi-adptée (G, ω, L). Le produit hermitien h_J de (G, ω, J) est défini par la formule

$$h_J(X, Y) = \omega(JX, Y) + \sqrt{-1}\omega(X, Y).$$

Retenons au passage que nous sommes en présence de deux métriques Kählériennes suivantes :

(i) la métrique affinement plate $h_0(X, Y) = g_0(X, Y) + \sqrt{-1}\omega(X, Y)$ avec $g_0(X, Y) = \omega(J_0 X, Y)$,
(ii) la métrique $h_J(X, Y) = g_J(X, Y) + \sqrt{-1}\omega(X, Y)$ définie par (G, ω, J).
Soit TG le fibré tangent holomorphe de (G, J). Notons T_1 et $T_2 \subset TG$ les sous-fibrés vectoriels réels engendrés par h_1 et par $J(h_1)$ respectivement. Notons T_o le sous-fibré qui est orthogonal à $T_1 \oplus T_2$ relativement à la métrique Riemannienne $g_J(X, Y) = \omega(JX, Y)$. La décomposition suivante est g_J-orthogonale

$$TG = T_o \oplus T_1 \oplus T_2.$$

En tout point $\gamma \in G_1$ les sous-espace vectoriels $T_o(\gamma)$ et $T_1(\gamma)$ sont tangents à la sous-variété γG_1. La restriction à G_1 de T_1 est tangent aux fibres de la fibration principale

$$H_1 \to G_1 \to G_1/H_1.$$

En restriction à G_1 le sous-fibré T_o est le sous-fibré g_J-othogonal à T_1. De toute évidence T_o est un sous-fibré analytique complexe de TG.

Intéressons nous maintenant à l'action par translation à gauche de H_1 dans (G, ω). Cette action est hamiltonienne. Par réduction à la Marsden-Weinstein on obtient le groupe de Lie symplectique $(G_1/H_1, \omega_1)$. Intéressons nous également aux structures bi-Lagrangiennes affinement plates définies par $(L, J_0 L)$ et par $(L_1, J_1(L_1))$. On sait que $(L, J_0 L)$ se projette sur $(L_1, J_1 L_1)$ dans le sens du Théorème 5.

Voici un énoncé extrait d'un théorème démontré dans [37].

Théorème 17. *On conserve la notation ci-dessus, à savoir* $(G_j/H_j, \omega, J_j, L_j, N_j)$. *Soit* $2 + 2m$ *la dimension de* G. *Alors tout point de* G *possède un voisinage ouvert* U *domaine des fonctions coordonnées locales* $q_1, \dots, q_{m+1}, p_1, \dots, p_{m+1}$ *qui satisfont les conditions suivantes*
(1) $\omega = \sum_i dq_i \wedge dp_i$,
(2) *les* p_i *sont des intégrales premières locales du feuilletage* L,
(3) *les* q_i *sont des intégrales premières locales du feuilletage* $N = J_0(L)$,
(4) *le système* (q_i, p_i) *est un système de coordonnées affines de la structure localement plate définie par la structure bi-Lagrangienne affinement plate* $(L, J_0(L))$,
(5) *les fonctions complexes* $z_i = q_i + \sqrt{-1}p_i$ *sont de coordonnées locales de la structure presque complexe intégrable* (G, J_0).

DÉFINITION 18. Un système de coordonnées locales qui vérifient les conditions (1) à (4) est appelé coordonnées de Darboux-Hess de $(G, \omega, L, J_0(L))$.

REMARQUE 19. La condition (5) du Théorème 17 ci-dessus équivaut à la suivante

(5′) si (q', p') et (q, p) sont des systèmes de coordonnées vérifiant les conditions (1), (2), (3), (4), (5) et dont les domaines ont une intersection non vide alors le changement coordonnées $(q', p') = A(q, p)$ est une transformation affine rigide (*i.e.* A est une isométrie de l'espace euclidien [57]).

Dorénavant nous fixons un atlas A_D dont les fonctions coordonnées locales satisfont les conditions (1), (2), (3), (4), (5) du Théorème 17 ci-dessus.

Notons S_i le champ de vecteurs hamiltonnien de la fonction p_i. Les conditions (1), (2), (3) assurent que $J_0(S_i)$ est le champ de vecteurs hamiltonien de la fonction q_i. Il en resulte que le système de vecteurs $(S_i, J_0(S_i))$ est orthonormé pour la métrique Riemannienne $g_0(X, Y) = \omega(J_0(X), Y)$.

Considérons maintenant la structure presque complexe intégrable (G, J) qui est quasi-adaptée à la FL-structure (G, ω, L).

Lemme 20. *Les champs de vecteurs S_i sont liés au tenseur J comme il suit* :

(a) $[S_i, J(S_j)]$ *est une section locale de* $J(L)$;

(b) $[J(S_i), J(S_j)]$ *est une section locale de* L.

Démonstration. On se restreint à l'ouvert U domaine des fonctions coordonnées (q, p). Soit R_U le fibré trivial $U \times R^{2m+2}$ que nous identifions avec le fibré tangent TU, $(\dim(G) = 2m + 2)$. Soit L_U la restriction à U de L. On définit l'homomorphisme injectif θ de L_U dans R_U défini par

$$\begin{aligned}\theta(x, v) &= (g_J(S_1, v), \dots, g_J(S_{m+1}, v), g_J(J_0S_1, v), \dots, g_J(J_0S_{m+1}, v))\\ &= (\omega_x(JS_1, v), \dots, \omega_x(JS_{m+1}, v), \omega_x((JJ_0S_1), v), \dots, \omega_x((JJ_0S_{m+1}), v)).\end{aligned}$$

L'image $\theta(L_U)$ est un sous-fibré trivial de R_U. Soit $c_1, \dots, c_{m+1}$ une base des sections localement constantes de $\theta(L_U)$. Chaque c_j est une application constante non nulle de U à valeurs dans $\theta(L_U) \subset R_U$. Soit $\alpha_j = \theta^{-1}(c_j)$. Le système $(\alpha_1, \dots, \alpha_{m+1})$ est une base des sections de L_U satisfaisant les conditions suivantes $\omega(JS_i, \alpha_j) = \text{constant}$ et $\omega(JJ_0S_i, \alpha_j) = \text{constant}$.

Utilisons $g_0(X, Y) = \omega(J_0X, Y)$ et la base orthonormée $(S_i, J_0(S_i))$ pour décomposer les $J(\alpha_i)$. On a ainsi

$$J(\alpha_i) = \sum_k \omega(J_0(S_k), J(\alpha_i))S_k + \sum_k \omega(J(\alpha_i), S_k)J_0S_k.$$

Rappelons les faits suivants : d'une part les $\omega(J(S_i), \alpha_j)$ et les $\omega(J(J_0(S_i)), \alpha_j)$ sont des constantes, les champs de vecteurs $S_1, \dots, S_{m+1}, J_0(S_1), \dots, J_0(S_{m+1})$ commutent deux à deux; d'autre part J_0 et J sont des isométries de ω. De ces observations on déduit la propriété de commutation $[S_k, J(\alpha_i)] = 0$ pour $j, k := 1, \dots, m + 1$.

Considérons un triplet (α_i, S_j, S_k). De l'identité $[S_j, J(\alpha_i)] = 0$ on déduit les suivantes

$$\omega([S_j, J(\alpha_i)], J(S_k)) = 0,$$
$$\omega([S_j, J(S_k)], J(\alpha_i)) = 0.$$

Puisque les $J(\alpha_i)$ engendrent le sous-fibré Lagrangien $J(L_U)$ les $[S_j, J(S_k)]$ sont des sections locales de $J(L)$. L'assertion (a) est démontrée.

(b) On sait que les champs de vecteurs S_j commutent deux à deux. Ainsi la nullité du tenseur de Nijenhuis de J se réduit à l'dentité suivante

$$[J(S_i), J(S_j)] + J([J(S_j), S_i]) + J([S_j, J(S_i)]) = 0.$$

Compte tenu de l'assertion (a) et du fait que L est Lagrangien, $[J(S_i), J(S_j)]$ est une section de L. Le Lemme 20 est démontré. □

Le Lemme 20 sert d'ingrédient pour la démonstration de plusieurs thèorèmes dont le suivant

Théorème 21. *Les distributions $T_1 \oplus T_2$ et T_0 sont complètement intégrables.*

Démonstration. Sans perte de généralité on suppose que S_1 est une section locale de T_1. On utilise le produit scalaire $g_J(X, Y) = \omega(J(X), Y)$ pour décomposer orthogonalement L

$$L = T_1 \oplus \mathrm{orth}_{g_J}(T_1).$$

Considérons l'isomorphisme ϕ du fibré L_U dans le fibré trivial $U \times R^{m+1}$ défini par

$$\phi(tS_1, v) = (\omega(tJ_0(S_1), v) + t\omega(J(S_1), v), \omega(J_0(S_2), v), \dots, \omega(J_0(S_{m+1}, v)))$$

pour $(tS_1, v) \in T_1 \times \mathrm{orth}_{g_J}(T_1)$. On peut supposer que le sous-fibré $\phi(\mathrm{orth}_{g_J}(T_1))$ est trivial sur l'ouvert U. Soit $(w_1, \dots, w_m)$ une base des sections locales constantes de $\mathrm{orth}_{g_J}(T_1)$ au-dessus de U ; posons $\beta_j = \phi^{-1}(w_j)$. Les β_j sont des sections de $\mathrm{orth}_{g_J}(T_1)$ satisfaisant les conditions suivantes

$$g_J(S_1, \beta_j) = \omega(Js_1, \beta_j) = 0,$$
$$\omega(J_0(S_k), \beta_j) = \text{constant}.$$

pour $j := 1, \dots, m$ et $k := 1, \dots, m+1$.

Maintenant on utlise le produit scalaire $\omega(J_0(X), Y)$ pour décomposer les β_j dans la base $(S_i, J_0(S_i))$

$$\beta_j = \sum_k \omega(J_0(S_k), \beta_j) S_k.$$

Maintenant on tient compte du fait que les $\omega(J_0(S_k), \beta_j)$ sont des constantes. On en déduit alors les identités suivantes

$$[S_k, \beta_j] = 0$$

pour $j := 1, \ldots, m$ et $k := 1, \ldots, m+1$.

Pour terminer on suppose que U est un voisinage de l'élément neutre de G. Alors le sous-fibré orthogonal de T_1 dans TG_1 pour le produit scalaire $g_0(X, Y) = \omega(J_0(X), Y)$ est engendré par les sections $S_2, \ldots, S_{m+1}, J_0(S_2), \ldots, J_0(S_{m+1})$.

Nous sommes maintenant en mesure de conclure.

Les sous-fibrés $T_1 \oplus T_2$ et T_o sont analytiques complexes. Nous allons appliquer le résultat classique suivant [4], [24]. $\square$

Théorème 22. *Soit (M, ω, J) une variété Kählérienne et V une distribution holomorphe complètement intégrable dans M. Soit $K = V^{\perp}$ la distribution orthogonale à V. Si K est holomorphe alors il est aussi une distribution complètement intégrable.*

En vertu du Théorème 22 énoncé ci-dessus T_0 est complètement intégrable si et seulement si $T_1 \oplus T_2$ est complètement intégrable. Puisque S_1 est un champ de vecteurs hamiltonien on a

$$S_1\omega(J(S_1), \beta_j) = \omega([S_1, J(S_1)], \beta_j) + \omega(J(S_1), [S_1, \beta_j]).$$

En vertu de Lemme 20 $[S_1, J(S_1)]$ et β_j sont des sections de JL et de L respectivement. D'un autre côté on vient de montrer que $[S_1, \beta_j] = 0$. On déduit de ces considérations l'identité

$$\omega([S_1, J(S_1)], \beta_j) = 0.$$

On a également

$$S_1\omega(J(S_1), J(\beta_j)) = \omega([S_1, J(S_1)], J(\beta_j)) + \omega(J(S_1), [S_1, J(\beta_j)]).$$

Les champs de vecteurs $J(\beta_j)$ et $[S_1, J(S_1)]$ étant des sections de JL on est conduit à l'identité suivante

$$\omega([S_1, J(S_1)], J(\beta_j)) = 0.$$

Ainsi relativement au produit scalaire $g_J(X, Y) = \omega(J(X), Y)$ le champ de vecteurs $[S_1, J(S_1)]$ est orthogonal au sous-fibré engendré par les sections β_j, $J(\beta_j)$. Ce dernier n'est pas autre chose que le sous-fibré T_0. Par consequent $[S_1, J(S_1)]$ est une section de $T_1 \oplus T_2$. Le sous-fibré $T_1 \oplus T_2$ est donc complètement intégrable. En vertu du Théorème 22 le sous-fibré T_0 est aussi complètement intégrable. Le théorème 21 est démontré.

3.3. Théorème de réduction des structures complexes quasi-adaptées. On conserve les notations et les données des sous-sections précédentes. La variété holomorphe (G, J) porte deux feuilletages analytiques complexes $T_1 \oplus T_2$ et T_0 qui sont partout transverses. En outre le feuilletage T_0 est subordonné au sous-groupe G_1 dans le sens que les feuilles de T_0 passant par les points de G_1 sont contenues dans G_1. Par ailleurs le Théorème 21 et l'identité $[S_1, \beta_j] = 0$ montrent que la restriction à G_1 de T_0 est une connexion principale plate du H_1-fibré principal

$$H_1 \to G_1 \to G_1/H_1.$$

Les groupes de Lie H_1 et G_1 étant simplement connexes chaque feuille de T_0 est difféomorphe à G_1/H_1. Soit Λ la feuille de T_0 passant par l'élément neutre. En identifiant la variété G_1 avec le produit direct $H_1 \times \Lambda$ la fibration principale ci-dessus revient à projeter sur le facteur Λ. On identifie ainsi G_1/H_1 avec la variété Kählérienne Λ. Notons encore $(G_1/H_1, J)$ la structure presque complexe de cette structure Kählérienne. En vertu du Théorème 21 la structure Kählérienne $(G_1/H_1, \omega_1, J)$ est obtenue par adaptation de $(G_1/H_1, J)$ à la FL-structure symplectique homogène $(G_1/H_1, \omega_1, L/h_1)$. Résumons ces conclusions sous la forme suivante

Théorème 23. *Soit (G, ω, L) une FL-structure invariante à gauche dans un groupe de Lie complètement résoluble et $H_1 \subset G$ le sous-groupe distingué connexe dont l'algèbre de Lie est h_1. Soit G_1 le sous-groupe de Lie connexe qui est ω-orthogonal à H_1. On suppose que L est inclu dans l'algèbre de Lie g_1 de G_1. Alors toute structure presque complexe intégrable (G, J) quasi-adaptée à (G, ω, L) possède une réduction $(G_1/H_1, J)$ qui est quasi-adaptée à la réduction $(G_1/H_1, \omega_1, L/h_1)$.*

REMARQUE 24. Comme convenu nous ne nous intéressons qu'aux FL-structures homogènes. Cependant cette propriété d'homogénéité n'est pas exigée des structures complexes qui sont quasi-adaptées aux FL-structures homogènes.

3.4. Problème de complète intégrabilité de structures bi-Lagrangiennes quasi-adaptées à une *FL*-structure. Soit (G, ω, L) une FL-structure homogène. Le groupe de Lie G est supposé être complètement résoluble. On fixe une paire (H_1, G_1) qui nous place dans la configuration du Théorème 23.

On fixe une structure complexe auxiliaire (G, J_0) adaptée à (G, ω, L) et satisfaisant les cinq propriétés du Théorème 17. Sous ces contraintes $(G, \omega, L, J_0(L))$ est affinement plate et Kählérienne. En outre $(G, \omega, L, J_0(L))$ se projette sur une structure analogue $(G_1/H_1, L/h_1, J_0(L/h_0))$ qui est affinement plate et Kählérienne.

En vertu du Théorème 23 toute structure holomorphe (G, J) qui est quasi-adaptée à (G, ω, L) se projette dans (G_1/H_1) sur une structure holomorphe que nous notons aussi $(G_1/H_1, J)$ qui est quasi-adaptée à $(G_1/H_1, \omega_1, L/h_1)$. Une fois fixées ces données nous sommes en position de démontrer le Théorème 16. Traduit en termes de problème de complète intégrabilité le Théorème 16 est équivalent au suivant.

Théorème 25. *La distribution $J(L)$ est complètement intégrable.*

Démonstration. On va procéder par recurrence sur la dimension de G.

Si G est une surface le Théorème 25 est vrai.

Nous admettons que le Théorème 25 est vrai juqu'à la dimension $2m$. Nous considérons une configuration du Théorème 23 dans laquelle la dimension de G est égale à $2m + 2$. Pour continuer on utilise la structure affinement plate Kählérienne auxiliaire $(G, \omega, L, J_0(L))$. On fixe une fois pour toutes un atlas A_{J_0} dont les fonctions coordonnées locales vérifient les cinq propriťés du Théorème 17 pour $(G, \omega, L, J_0, J_0(L))$.

On projette $(G, \omega, L, J(L))$ et $(G, \omega, L, J_0(L))$ sur leur réduction respective $(G_1/H_1, \omega_1, L/h_1, J(L/h_1))$ et $(G_1/H_1, \omega_1, L/h_1, J_0(L/h_1))$. Dans cette configuration, en vertu de l'hypothèse de recurrence Théorème 25 est vrai dans $(G_1/H_1, \omega_1, L/h_1)$. C'est à dire que $J(L/h_1)$ est complètement intégrable. Soit U un ouvert domaine des coordonnées de Darboux-Hess $q_1, \ldots, q_{m+1}, p_1, \ldots, p_{m+1}$ de $(G, \omega, L, J_0(L))$. Soit π la projection de G_1 sur G_1/H_1. Sans perte de généralité on suppose que $U_1 = \pi(U \cap G_1)$ est un domaine des coordonnées de Darboux-Hess de $(G_1/H_1, \omega_1, L/h_1, J_0(L/h1))$. En outre les fonctions coordonnées locales $q_2, \ldots, q_{m+1}, p_2, \ldots, p_{m+1}$ sont supposées être les images inverses par π des coordonnées de Darboux-Hess de $(G_1/H_1, \omega_1, L/h_1, J_1(L/h_1))$. Ces coordonnées étant définies dans $\pi(U \cap G_1))$ seront (abusivement) notées aussi $q_2, \ldots, q_{m+1}, p_2, \ldots, p_{m+1}$.

Nous conservons les notations du Lemme 20. En vertu de l'assertion (b) du Lemme 20 les champs de vecteurs $[J(S_i), J(S_j)]$ sont des sections de L/h_1 pour $i, j : 2, \ldots, m+1$. L'hypothèse de recurrence assure que $J(L/h_1)$ est complètement intégrable. On en déduit que $[J(S_i), J(S_j)] = 0$ pour $i, j := 2, \ldots, m+1$.

L'assertion (a) du Lemme 20 dit que les champs de vecteurs $[S_1, J(S_j)]$ sont des sections du fibré $J(L)$. Nous sommes en position de pouvoir appliquer un théorème de [24], [25] dont voici un énoncé partiel écrit sous la forme utilisée ici. □

Théorème 26. *Soit Ξ un feuilletage totalement géodésique dans une variété Riemannienne (M, g) dont la métrique Riemannienne g est quasi-fibrée (par rapport au feuilletage Ξ). Soit $\Xi^\perp$ la distribution orthogonale à Ξ. Si $\Xi^\perp$ est complètement intégrable alors $\Xi^\perp$ est aussi totalement géodésique.*

Maintenant continuons la démonstration du Théorème 25. On observe que la restriction à G_1 de la métrique Riemannienne $g_J(X, Y) = \omega(J(X), Y)$ est π-quasi-fibrée, π étant la projection de G_1 sur G_1/H_1. En vertu du Théorème 21 les distributions intégrables T_1 et T_0 sont totalement géodéques pour la connexion de Levi-Civita ∇ de la mtrique $\omega(JX, Y)$. Puisque J est intégrable et que ω est fermée on a

$$J\nabla_X(Y) = \nabla_X(JY)$$

quels que soient les champs de vecteurs X, Y [7]. Chaque S_j étant un champ de vecteurs hamiltonien on a

$$\omega(S_k, [JS_1, JS_j]) = JS_1\omega(S_k, JS_j) - JS_j\omega(S_k, JS_1).$$

Pour $j, k := 2, \dots, m+1$ le membre de droite de l'égalité ci-dessus vaut zéro. Calculons maintenant

$$\omega([JS_1, JS_j], JS_k) = \omega(\nabla_J S_1(JS_j), JS_k) - \omega(\nabla_{JSj}(JS_1), JS_k).$$

La connexion ∇ étant également une connexion symplectique on a

$$\omega(\nabla_{JS_j}(JS_1), JS_k) = JS_j\omega(JS_1, JS_k) - \omega(JS_1, \nabla_{JS_j}(JS_k)).$$

On observe que pour $j, k := 2, \dots, m+1$ les champs de vecteurs JS_j et JS_k sont des sections de T_0. Puisque la distribution T_0 est totalement géodésique et est orthogonale à JS_1 le membre de droite de la dernière égalité ci-dssus est donc nul, c'est à dire que l'on a

$$JS_j\omega(JS_1, JS_k) - \omega(JS_1, \nabla_{JS_j}(JS_k)) = 0.$$

On a donc

$$\omega([JS_1, JS_j], JS_k) = \omega(\nabla_{JS_1}(JS_j), JS_k) - \omega(\nabla_{JS_j}(JS_1), JS_k) = \omega(\nabla_{JS_1}(JS_j), JS_k).$$

Il faut maintenant tenir compte du fait que $J\nabla = \nabla J$. Alors le calcul ci-dessus donne

$$\begin{aligned}\omega([JS_1, JS_j], JS_k) = \omega(\nabla_{JS_1}(JS_j), JS_k) &= \omega(J\nabla_{JS_1}(S_j), JS_k) = \omega(\nabla_{JS_1}(S_j), S_k)\\ &= \omega([J(S_1), S_j], S_k) + \omega(\nabla_{S_j}(JS_1), S_k).\end{aligned}$$

Puisque S_k et $\nabla_{S_j}(S_k)$ sont orthogonaux à JS_1 le calcul ci-dessus conduit à

$$\omega([JS_1, JS_j], JS_k) = \omega([JS_1, S_j], S_k).$$

Maintenant on tient compte de ce que S_k est un champ de vecteurs hamiltonien. On en déduit

$$\omega([JS_1, S_j], S_k) = JS_1\omega(S_j, S_k) - S_j\omega(JS_1, S_k) = 0.$$

A ce stade on conclut que $[JS_1, JS_j]$ est orthogonal à T_0. En vertu du Lemme 20 $[JS_1, JS_j]$ est colinéaire S_1. Puisque S_1 et JS_1 sont sans singularité dans l'ouvert U

et sont orthogonaux à T_0 posons $f = 1/\omega(JS_1, S_1)$. On a alors $\omega(fJS_1, S_1) = 1$. Rappelons que S_1 est un champ de vecteurs hamiltonien. On a alors d'un côté

$$\begin{aligned}\omega([J(fS_11), JS_j], JS_1) &= \omega(J[J(fS_1), S_j], JS_1) + \omega(J[fS_1, JS_j], JS_1)\\ &= \omega([J(fS_1), S_j], S_1) + \omega([fS_1, JS_j], S_1)\\ &= J(fs_1)\omega(S_j, S_1) - S_j\omega(J(fS_1), S_1)\\ &\quad + fS_1\omega(JS_j, S_1) - JS_j\omega(fS_1, S_1)\\ &= 0.\end{aligned}$$

De l'autre côté on a

$$\begin{aligned}\omega([f(JS_1), JS_j], JS_1) &= f\omega([JS_1, JS_j], JS_1) - ((JS_j)f)\omega(JS_1, JS_1)\\ &= f\omega([JS_1, JS_j], JS_1).\end{aligned}$$

Il s'en suit que $\omega([JS_1, JS_j], JS_1) = 0$ pour $j := 2, \ldots, m+1$.

On conclut que les champ de vecteurs $JS_1, \ldots, JS_{m+1}$ commutent deux à deux. Cela termine la démonstration des Théorèmes 16 et 25.

3.5. Structures affines issues des structures complexes intégrables adaptées aux *FL*-structures. Soit (G, ω, L) une FL-structure homogène dans un groupe de Lie complètement résoluble G. Les Théorèmes 16 et 25 assurent que toute structure holomorphe (G, J) adaptée à (G, ω, L) définit une structure bi-Lagrangienne $(G, \omega, L, J(L))$. Cette sous-section est consacrée à l'examen du tenseur de courbure de la connexion symplectique définie par la paire $(L, J(L))$ de feuilletages Lagrangiens.

On recourt de nouveau à la machinerie utilisée dans les sous-sections précédentes. En occurrence on se place dans la configuration du Théorème 23. Pour alléger la notation on va continuer de noter $(G_1/H_1, \omega_1, J)$ la structure Kählérienne de $(G_1/H_1, \omega_1)$ obtenue par réduction (cf. Théorème 23). Plus précisement les structures $(G, \omega, J_0, L, J_0(L))$, $(G_1/H_1, \omega_1, J_0, L/h_1, J_0(L/h_1))$, $(G, \omega, J, L, J(L))$ et $(G_1/H_1, \omega_1, J, L/h_1, J(L/h_1))$ satisfont la conclusion du théorème 23. En outre $(G, \omega, J_0, L, J_0(L))$ et sa réduction $(G_1/H_1, \omega_1, J_0, L/h_1, J_0(L/h_1))$ sont affinement plates Kählériennes. On fixe également un système $(q_1, \ldots, q_{m+1}, p_1, \ldots, p_{m+1})$ des coordonnées de Darboux-Hess de $(G, \omega, J_0, L, J_0(L))$. Ces fonctions coordonnées sont définies dans un ouvert U et vérifient les conditions (1), (2), (3), (4), (5) du Théorème 17. Le sous-système $(q_2, \ldots, q_{m+1}, p_2, \ldots, p_{m+1})$ se projette en un système des coordonnées de Darboux-Hess de $(G_1/H_1, \omega_1, J_0, L/h_1, J_0(L/h_1))$ et que nous désignons aussi par $q_2, \ldots, q_{m+1}$, $p_2, \ldots, p_{m+1}$. Elles sont définies dans l'ouvert $\pi(U \cap G_1)$. Comme dans les sous-sections précédentes S_j est le champ de vecteurs hamiltonien de p_j et J_0S_j est le champ de vecteurs hamiltonien de q_j.

La variété G porte les métriques Riemanniennes $g_0(X,Y) = \omega(J_0X,Y)$ et $g_J(X,Y) = \omega(JX, Y)$. Nous notons ψ l'isomorphisme de L_U dans $U \times R^{m+1}$ ainsi défini : v étant une section de L_U on pose

$$\psi(v) = (g_J(S_1, v), \dots , g_J(S_{m+1}, v)).$$

Soit $b_1, \dots , b_{m+1}$ la base canonique de R^{m+1}. Nous notons c_j la section constante de $U \times R^{m+1}$ définie par $c_j(x) = b_j$, $\forall x \in U$. Les c_j forment une base des sections de $U \times R^{m+1}$.

Soit α_j la section de L_U définie par $\psi(\alpha_j) = c_j$. En d'autres termes on a

$$\psi(\alpha_j) = (0, \dots , \omega(JS_j, \alpha_j), 0, \dots , 0).$$

Cela montre que les α_j vérifient donc $\omega(JS_j, \alpha_k) = \delta_{jk}$. Rappelons au passage que les S_j forment une base des sections locales de L_U.

Proposition 27. *Les champs de vecteurs $J(\alpha_j)$ sont des champs hamiltoniens.*

Démonstration. Puisque $[S_j, S_k] = [JS_j, JS_k] = 0$ on a

$$d i_{J(\alpha_i)}\omega(S_j, S_k) = d i_{J(\alpha_i)}\omega(JS_j, JS_k) = 0.$$

En vertu de Lemme 20 $[S_j, JS_k]$ est une section de $J(L_U)$. On a donc

$$d i_{J(\alpha_i)}\omega(S_j, JS_k) = \omega([S_j, JS_k], J(\alpha_i)) = 0.$$

La Proposition 27 est démontrée. □

Remarque 28. On rappelle que les fonctions $p_1,\dots, p_{m+1}$ sont des coordonnées parielles de l'atlas A_{J_0}. Si les fonctions $p'_1, \dots , p'_{m+1}$ proviennent aussi de A_{J_0} alors

$$(p'_1, \dots , p'_{m+1}) = A(p_1, \dots , p_{m+1})$$

où A est une transformation affine rigide de R^{m+1}.

Nous allons suposer que les ouverts de l'atlas A_{J_0} sont des domaines de définition des bases symplectiques $S_1, \dots , S_{m+1}, J(\alpha_1), \dots , J(\alpha_{m+1})$. Nous sommes en mesure de démonstrer l'énoncé qui suit

Théorème 29. *Les fonctions hamiltoniennes locales $(y, p) = (y_1, \dots , y_{m+1}, p_1, \dots , p_{m+1})$ dont les champs de vecteurs hamiltoniens sont les champs de vecteurs $(S_1,\dots, S_{m+1}, J(\alpha_1),\dots, J(\alpha_{m+1}))$ forment un système des coordonnées de Darboux-Hess de $(G, \omega, L, J(L))$ jouissant de la propriété* (5) *du* Théorème 17.

Démonstration. Compte tenu des résultats mis en évidence ci-dessus on a

$$\omega(S_i, [S_j, J(\alpha_k)]) = S_j\omega(S_i, J(\alpha_k)) = 0.$$

Ce qui montre que les $[S_j, J(\alpha_k)]$ sont des sections de L_U. En vertu de l'assertion (a) de Lemme 20 on a donc les identités suivantes

$$\omega([S_j, J(\alpha_i)], J(S_k)) = \omega([S_j, JS_k], J(\alpha_i)) = 0.$$

Cela montre que les crochets $[S_j, J(\alpha_k)]$ sont tous nuls. La Proposition 27 assure que les champs de vecteurs $J(\alpha_j)$ commutent deux par deux. Par conséquent le système $(S_1, \ldots, S_{m+1}, J(\alpha_1), \ldots, J(\alpha_{m+1}))$ est une base symplectique formée des champs de vecteurs hamiltoniens commutant deux à deux. On rappelle que les fonctions $p_1, \ldots, p_{m+1}$ vérifient la propriété (4) du Théorème 17. (S_j est le champ de vecteurs hamiltonien de la fonction p_j et $J\alpha_j$ est le champ de vecteurs hamiltonien de y_j). Consiérons les systèmes

$$(y_j, p_j) = \left(\int i_{J\alpha_j}\omega, p_j\right)$$

définis par les systèmes $(S_j, J\alpha_j)$. Ces fonctions forment des systèmes de coordonnées de Darboux-Hess de $(G, \omega, L, J(L))$.

Il reste à s'assurer que ces systèmes vérifient la propriété (5) du Théorème 17. Supposons définies sur le même ouvert U les fonctions $(y, p) = (y_1, \ldots, y_{m+1}, p_1, \ldots, p_{m+1})$ et $(y', p') = (y'_1, \ldots, y'_{m+1}, p'_1, \ldots, p'_{m+1})$ qui sont des hamiltoniennes locales de $(S_1, \ldots, S_{m+1}, J(\alpha_1), \ldots, J(\alpha_{m+1}))$ et de $(S'_1, \ldots, S'_{m+1}, J(\alpha'_1), \ldots, J(\alpha'_{m+1}))$ respectivement. Alors on aura

$$(y', p') = (a(y) + c, (a^t)^{-1}(p) + d).$$

Nous savons que la transformation affine $p \to p' = (a^t)^{-1}(p) + c$ est rigide. Ce qui veut dire que sa partie linéaire $p \to (a^t)^{-1}(p)$ est orthogonale. Donc le système des coordonnées locales (y, p) jouit des propriétés (1), (2), (3), (4), (5) du Théorème 17. □

REMARQUE 30. Les fonctions (y, p) du dernier théorème 29 ci-dessus forment un atlas noté $A_{D^\star}$.

D'après H. Hess [23] l'existence de système des coordonnées de Darboux-Hess pour une structure bi-Lagrangienne (M, ω, L, N) est équivalente à la nullité du tenseur de courbure de la connexion symplectique définie par (L, N). Comme corrolaire du théorème 29 on a

Théorème 31. *Soit (G, ω, L) une FL-structure symplectique invariante à gauche dans un groupe de Lie complètement résoluble G. Alors les tenseurs de courbure des connexions symplectiques définies par les structures presque complexes intégrables (G, J) adaptées à (G, ω, L) sont tous nuls.*

REMARQUE 32. La connexion bi-Lagrangienne $D^\star$ déterminée par $(G, \omega, L, J(L))$ est la connexion de Levi-Civita de la métrique Kählérienne plate qui s'écrit $h^\star = dzd\bar{z}'$ dans l'atlas dont les coordonnées complexes locales sont les fonctions $z = (y, p) = y + \sqrt{-1}p$ du Théorème 29. Notons $(G, J^\star)$ la structure presque complexe de l'atlas déterminé par les coordonnées (y, p). Il est facile de vérifier que tout automorphisme de $(G, \omega, L, J(L))$ préserve la connexion $D^\star$. Par conséquent si ϕ est un automorphisme de (G, ω, J, L) alors ϕ préserve la structure affinement plate $(G, D^\star)$. Cependant il n'est pas garanti que ϕ préserve la métrique Kählérienne $h^\star$.

La technique de réduction nous permet de démontrer un théorème d'invariance des champs de vecteurs hamiltoniens de $A_{D^\star}$. En voici l'énoncé précis

Théorème 33. *Soit Γ un sous-groupe de G dont l'action par les translations à gauche en fait un groupe d'automorphismes de (G, ω, L, J).*

Alors Γ contient un sous-groupe d'indice fini $\Gamma^* \subset \Gamma$ dont les éléments $\gamma \in \Gamma^*$ laissent invariants les champs de vecteurs hamiltoniens des fonctions coordonnées de $A_{D^\star}$.

Démonstration. Nous allons procéder par recurrence sur la dimension de G.

Si G est une surface le théorème 33 est vrai. En effet Γ est (entre autres) un sous-groupe du groupe des transformations affines de (G, D). Les éléments de Γ préservent le tenseur J, la forme symplectique ω ainsi que les deux directions L et $J(L)$. Nous savons par ailleurs que le feuilletage Lagrangien L est engendré par un sous-groupe distingué H_1 de G. Soit h_1 l'algèbre de Lie de H_1. Soit ζ une base de h_1. La paire $(\zeta, J\zeta)$ est une base des sections globales de $(L, J(L))$. Soit $\gamma \in \Gamma$ et $x \in G$. On munit T_xG et $T_{\gamma(x)}G$ des bases $(\zeta(x), J(\zeta(x)))$ et $(\zeta(\gamma(x)), J(\zeta(\gamma(x))))$ respectivement. Dans ces bases soit $X = (s, t) \in T_xG$, on a alors $d\gamma(s, t) = (\lambda(\gamma)s, t/\lambda(\gamma))$ et $J(s, t) = (-t, s)$. Traduisons en coordonnées la propriété de commutation $d\gamma(J(X)) = J(d\gamma(X))$. Cela donne l'identité

$$\lambda^2(\gamma) = 1.$$

Dans les coordonnées de l'atlas affine $(A_{D^\star})$ les $\gamma \in \Gamma$ sont des transformations affines rigides dont les parties linéaires sont l'identité I_2 ou $-I_2$. Soit $\Gamma^* \subset \Gamma$ le sous-groupe formé des $\gamma \in \Gamma$ tels que $\lambda(\gamma) = 1$. Ce sous-groupe Γ^* jouit des propriétés réquises. Cela achève la démonstration pour la dimension 2.

Nous supposons que le Théorème 33 est vrai jusqu'à la dimension $2m$. Alors on se place dans la configuration de réduction du Théorème 23 (cf. aussi Théorème 29). En d'autres termes (G, ω, L, J) possède une réduction $(G_1/H_1, L/h_1, J)$ avec $\dim(G_1/H_1) = 2m$. Par construction l'atlas $A_{D^\star}$ est compatible avec cette réduction (voir Théorème 21). Le groupe Γ préserve $(\omega, J, L, J(L))$; il préserve aussi la métrique Riemannienne $g_J(X, Y) = \omega(JX, Y)$ ainsi que la décomposition orthogonale

$$T_1 \oplus T_2 \oplus T_0.$$

Par ailleurs l'action de Γ dans (G, ω, J, L) induit une action similaire dans le quadruplet $(G_1/H_1, \omega, J, L/h_1)$. En vertu de l'hypothèse de recurrence le Théorème 33 est vrai pour l'atlas de $(G_1/H_1, \omega, J, L/h_1, J(L/h_1))$ qui est la projection de $A_{D^\star}$. Chaque feuille F^* de T_0 a une structure affinement plate Kählérienne isométrique à celle de $(G_1/H1, \omega, J, L/h_1, J(L/h1)$. En plus,la sous-variété F^* est une transversale globale du feuilletage $T_1 \oplus T_2$. Soit E la variété des feuilles du feuilletage T_0 ; E est une surface de Riemann isométrique aux feuilles de $T_1 \oplus T_2$. Puisque $T_1 \oplus T_2$ est invariant par le sous-groupe Γ, E hérite de $(\omega, J, T_1 \oplus T_2)$ d'une FL-structure Kählérienne notée $(E, \omega, J, T_1 \oplus T_2)$. Cette dernière structure est l'analogue de $(G, \omega, J, L \oplus J(L))$. L'action de Γ passe au quotient pour y définir une action de Γ dans $(E, \omega, J, T_1 \oplus T_2)$. Mutatis mutandis, chaque feuille E^* de $T_1 \oplus T_2$ est une transversale du feuilletage T_0. On est fondé à identifier (G, ω, J, L) avec le produit direct de $(E^*, \omega, J, T_1 \oplus T_2)$ par (F^*, ω, J, T_0). Puisque $(E^*, \omega, J, T_1 \oplus T_2)$ et (F^*, ω, J, T_0) sont isométriques à $(E, \omega, J, T_1 \oplus T_2)$ et à $(G_1/H_1, \omega, J, L/h1)$ respectivement nous sommes fondés à procéder à l'identification

$$(G, \omega, J, L, J(L)) = (E, \omega, J, T_1, J(T_1)) \times (G_1/H_1, \omega, J, L/h1, J(L/h_1)).$$

Cette identification est compatible avec les actions du sous-groupe Γ dans les deux membres de l'égalité. L'identification est compatible avec les projections $A_{D^\star}(E)$ et $A_{D^\star}(G_1/H_1)$ de l'atlas $A_{D^\star}$ dans les deux facteurs $(E, \omega, J, T_1, J(T_1))$ et $(G_1/H_1, \omega, J, L/h1, J(L/h1))$. En outre le Théorème 33 est vrai dans chacun des deux projections de $A_D^\star$. Ainsi il existe un sous-groupe d'indice fini $\Gamma' \subset \Gamma$ qui satisfait la conclusion du Théorème 33 dans $(G_1/H1, \omega, J, L/h_1, J(L/h_1))$ muni de l'atlas $A_{D^\star}(G_1/H_1)$. On fait agir le sous-groupe Γ' dans E muni de l'atlas $A_{D^\star}(E)$. Alors Γ' contient un sous-groupe d'indice fini $\Gamma^* \subset \Gamma'$ qui satisfait la conclusion de Théorème 33 dans $(E, A_{D^\star}(E))$. Au total chaque élément $\gamma \in \Gamma^*$ laisse invariant les champs de vecteurs hamiltoniens de l'atlas $A_{D^\star}$. Le sous-groupe $\Gamma^\star$ est d'indice fini dans Γ. Le Théorème 33 est démontré. $\square$

REMARQUE 34. Le Théorème 33 ci-dessus montre que les coordonnées locales de l'atlas A^* définisent dans $(G, \omega, L, J(L))$ une structure Kählérienne affinement plate (G, ω, J^*) dont la connexion de Levi-Civita est la connexion bi-Lagrangienne définie par $(L, J(L))$. Cette structure Kählérienne (G, ω, J^*) est invariante par l'action du sous-groupe Γ^*. Si $\Gamma^* \subset G$ est fermé alors la variété symplectique $(\Gamma^* \backslash G, \omega)$ hérite d'une métrique Kählérienne (affinement) plate [17], [27], [36].

4. Quelques conséquences du Théorème 33

4.1. Conjecture fondamentale de Gindikin-Pjateckii-Sapiro-Vinberg [18]. La conjecture qui nous intétéresse est devenu Théorème [14]. Rappelons qu'un système dynamique différentiable sur une variété M est la donnée d'un groupe de Lie de transformations de M [50]. La dynamique différentiable dans les variétés Kählériennes a suscité beaucoup d'inérêt et ce dépuis assez longtemps [9], [31], [35]. Comprendre certaines perspectives de la géométrie globale a conduit à la conjecture fondamentale de S.G. Gindikin, I.I. Piatecckii-Sapiro et E.B. Vinberg différentiable. A l'origine la conjecture fondamentale est l'énoncé suivant

Conjecture 35. *Toute variété Kählérienne homogène (M, ω, J) est l'espace total d'un fibré analytique complexe au dessus d'un domaine borné $\Omega \subset C^n$ et dont la fibre type est le produit direct d'une variété Kählérienne homogène simplement connexe compacte et d'une variété Kählérienne homogène simplement connexe localement plate.*

Avant [13] et [14] on sait que la conjecture est vraie dans les cas suivants.

(a) Le groupe de Lie Aut(M, ω, J) des automorphismes de (M, ω, J) contient un sous-groupe de Lie semi-simple transitif [9].

(b) Aut(M, ω, J) contient un sous-groupe de Lie réductif transitif [35].

(c) Aut(M, ω, J) contient un sous-groupe de Lie complètement résoluble transitif [55] (voir aussi [18], [19]).

Dans [13] Dorfmeister propose une autre démonstation de la conjecture dans le cas (c). K. Ermann et D. Salamon m'ont suggéré l'idée d'utiliser le procéssus de réduction mis au point dans ce travail (cf. Théorème 23) pour simplifier la démonstration de [13]. Il est clair que dans le cas (c), c'est à dire lorsque Aut$(\ , \omega, J)$ contient un sous-groupe de Lie complètement résoluble transitif, la fibre tpye de la fibration de M au dessus d'un domaine borné ne peut pas contenir un facteur compact simplement connexe. Dans les deux démonstrations du cas (c) par Gindikin et Vinberg (voir [18] et [19]) d'une part et par Dorfmeister [13] d'autre part on déploie des efforts supplémentaires pour montrer que l'on peut ramener (c) au cas où un sous-groupe de Lie complètement résoluble transitif agit localement librement. A la suite d'une interrogation-suggestion de Karin Erdmann et Simon Salamon [13] je vais donner du cas (c) de la conjecture fondamentale une démonstration (cf. Théorème 49) qui est basée sur la réduction Kählérienne et sur la KV cohomologie des algèbres de Koszul-Vinberg [40]. Le premier outil est le théorème ci-dessous (toutes les données sont simplement connexes). Ce théorème a été démontré par Gindikin-Piatecckii-Sapiro-Vinberg dans ([19], Part II, Paragrahe 4, Proposition 3). J'en donne ici une autre preuve qui utilise le théorème de réduction Kählérienne.

Théorème 36. *Soit (M, ω, J) une variété Kählérienne homogène sous l'action d'un groupe de Lie complètement résoluble G. Alors l'action de G dans (M, ω, J) est* *libre. En outre si un autre goupe de Lie complètement résoluble G' opère simplement transitivement dans (M, ω, J) alors G et G' sont isomorphes.*

Démonstration. Nous allons procéder par recurrence sur la dimension de la variété M. Supposons que M est une surface de Riemann. Soit $x_o \in M$ un point de base. Notons $G_{x_o} \subset G$ le sous-groupe stabilisateur de x_o, g_{x_o} l'algèbre de Lie de G_{x_o} et $\pi : G \to M$ l'application orbitale $\pi(\gamma) = \gamma(x_o)$. Nous identifions ainsi M avec l'espace homogène G/G_{x_o}. L'action de G dans M est supposée être effective. Soit $H_1 \subset G$ un sous-groupe connexe distingué de dimension 1 et soit h_1 son algèbre de Lie. Fixons une base ζ de h_1. Alors On peut identifier M avec le sous-groupe de Lie connexe $G_* \subset G$ dont l'algèbre de Lie est $g_* = h_1 \oplus J(h_1)$. La représenation d'isotropie de G_{x_o} est le quotient de la représnetation adjointe de G_{x_o} dans g. Nous choisissons ζ de sorte que la base $(\zeta, J\zeta)$ soit orthonormée pour le produit hermitien $h(X, Y) = \omega(JX, Y) + \sqrt{-1}\omega(X, Y)$. Cette base est propre pour les éléments de G_{x_o} elle est également une base de Darboux pour la forme symplectique ω. En outre les $\gamma \in G_{x_o}$ préservent la forme symplectique ω. Toutes ces contraintes sur G_{x_o} entrainent que la représentation d'isotropie est triviale. Puisque l'action de G dans M est effective G_{x_o} est réduit à l'élément neutre.

Supposons le théorème vrai jusqu'à la dimension $2m$. Soit (M, ω, J) une variété Kählérienne de dimension $2m + 2$. On suppose que (M, ω, J) est homogène sous l'action d'un groupe de Lie complètement résoluble G d'algèbre de Lie g. Soit $x_o \in M$ un point de base et $G_{x_o} \subset G$ le sous-groupe stabilisateur de x_o. Fixons le sous-groupe connexe distingué $H_1 \subset G$ dont l'algèbre de Lie est h_1. Soit $G_* \subset G$ le sous-groupe de Lie connexe dont l'algèbre de Lie est $h_1 \oplus J(h_1)$. L'action de G_* dans M est libre et y définit un feuilletage holomorphe F_1 qui est invariant par l'action de G. La distribution orthogonale $F_1^{\perp}$ est holomorphe, donc complètement intégrable. Soit $g_1 \subset g$ la sous-algèbre de Lie définie par

$$\pi^{\star}\omega(g_1, h_1) = 0.$$

Visiblement h_1 et g_{x_o} sont inclus dans g_1. Soit G_1 le sous-groupe de Lie connexe d'algèbre de Lie g_1. Notons $G_{x_o} \times H_1$ le produit semi-direct de G_{x_o} par H_1. Le groupe de Lie G_1/H_1 agit effectivement dans la variété symplectique réduite $(G_1/G_{x_o} \times H_1, \omega)$. En vertu du Théorème 23 (M, ω, J) possède une réduction $(G_1/G_{x_o} \times H_1, \omega, J)$ qui est isométrique à l'espace des feuilles M/F_1. En outre on a l'inclusion suivante $G_1/H_1 \subset \mathrm{Aut}(G_1/G_{x_o} \times H_1, \omega, J)$. En vertu de l'hypothèse de recurrence cette action de G_1/H_1 dans $(G_1/G_{x_o} \times H_1, \omega, J)$ est necessairement libre. Or les sous-groupes d'isotropie de cette action sont des conjugués de G_{x_o}. Toutes les variétés en jeu étant simplement connexes le sous-groupe de Lie G_{x_o} réduit à l'élément neutre de G.

La dernière assertion est évidente. En effet soit e (resp. e') l'élément neutre de G (resp. de G'). On considère les applications orbitales ϕ_{x_o} et ψ_{x_o} de (G, e) et de (G', e') respectivement dans (M, x_o). Alors on munit G (resp. G') de l'unique métrique

Kählérienne invariante à gauche (G, ω_o, J_o) (resp. (G', ω'_o, J'_o))) telle que ϕ_{x_o} (resp. ψ_{x_o}) est un morphisme de variétés Kählériennes. A chaque $\gamma \in G$ on associe l'unique $\gamma' = \psi_{x_o}^{-1}(\phi_{x_o}(\gamma)) \in G'$ défini par $\gamma'(x_o) = \gamma(x_o)$. Cette correspondance

$$\gamma' \to \gamma$$

est un difféomorphisme de G sur G' qui envoie l'algèbre de Lie des champs de vecteurs invariants à droite dans G sur son analogue dans G'. (Ce sont des isométries infinitésimales). Puisque G et G' sont connexes et simplement connexes le Théorème 36 est démontré. □

OBSERVATION. La dernière assetrion du Théorème 36 est exactement le Corollaire 1 de Proposition 3 de [18] (cf. [18] Part II, paragraphe 4 où l'énoncé est formulé en termes de j-algèbre d'après Koszul).

J'ai signalé que la démonstration du cas (c) de la conjecture fondamentale par Gindikin-Piateccki-Sapiro-Vinberg a été reprise par J. Dorfmeister [13]. J'en propose ici une démonstration (plus simple qui répose sur le Théorème 37 ci-dessous (voir le Théorème 49 plus loin)).

Théorème 37. *Soit (M, ω, J) une variété Kählérienne homogène sous l'action d'un groupe de Lie complètement résoluble G. Alors M admet une paire de (F_1, F_2) feuilletages transverses dont les feuilles sont des variétés Kählériennes homogènes. En plus, en identifiant M avec G, F_1 est un feuilletage b-invariant dont les feuilles sont toutes isometriques à une même variété Kählérienne homogène (localement) plate.*

Démonstration. En vertu du Théorème 36 on peut identifier (M, ω, J) avec le groupe de Lie simplement connexe complètement résoluble G muni d'une structure Kählérienne invariante à gauche (G, ω, J). Soit $H_1 \subset G$ un sous-groupe connexe distingué de dimension 1. Soient g et h_1 les algèbres de Lie de G et de H_1 respectivement. Soit $g_1 \subset g$ la sous-algèbre de Lie qui est ω-orthogonale à h_1. Le sous-espace vectoriel $g_* = h_1 \oplus J(h_1)$ est une sous-algèbre Kählérienne de (g, ω, J) qui engendre un feuilletage Kählérien F_1 qui est invariant à gauche dans (G, ω, J). Puisque la métrique hermitienne $h(X, Y) = \omega(JX, Y) + \sqrt{-1}\omega(X, Y)$ est invariante à gauche la distribution orthogonale $F_1^{\perp}$ est aussi invariante à gauche. De plus $F_1^{\perp}$ est analytique complexe. En vertu du Théorème 22 $F_1^{\perp}$ est complètement intégrable. La feuille de $F_1^{\perp}$ qui passe par l'élément neutre de G est un sous-groupe de Lie G^* qui est transverse au sous-groupe G_*. Pour terminer la démonstration du théorème on va montrer que (G_*, ω, J) est localement plat. Soit $\tilde{\zeta}$ le champ de vecteurs invariant à droite qui coincide avec ζ en l'élément neutre de G, c'est un champ de Killing de la métrique Riemannienne $g_J(X, Y) = \omega(JX, Y)$. En outre on a $[\tilde{\zeta}, J\tilde{\zeta}] = 0$. Notons encore ∇ la connexion de

Levi-Civita de (G_*, ω, J). On a alors $g_J(\nabla_{\tilde{\zeta}}\tilde{\zeta}, \tilde{\zeta}) = 0$. Cela nontre que $\nabla_{\tilde{\zeta}}\tilde{\zeta}$ est porté par la direction Jh_1 Calculons directement

$$\begin{aligned}\omega(\nabla_{\tilde{\zeta}}\nabla_{J\tilde{\zeta}}\tilde{\zeta} - \nabla_{J\tilde{\zeta}}\nabla_{\tilde{\zeta}}\tilde{\zeta}, J\tilde{\zeta}) &= \tilde{\zeta}(\omega(\nabla_{J\tilde{\zeta}}\tilde{\zeta}, J\tilde{\zeta})) - \omega(\nabla_{J\tilde{\zeta}}\tilde{\zeta}, \nabla_{\tilde{\zeta}} J\tilde{\zeta}) \\ &\quad - J\tilde{\zeta}(\omega(\nabla_{\tilde{\zeta}}\tilde{\zeta}, J\tilde{\zeta})) + \omega(\nabla_{\tilde{\zeta}}\tilde{\zeta}, \nabla J\tilde{\zeta} J\tilde{\zeta}) \\ &= \frac{3}{2}([\tilde{\zeta}, J\tilde{\zeta}]\omega(\tilde{\zeta}), J\tilde{\zeta}) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Cela montre que (G_*, ω, J) est (localement) plate. Il reste à montrer que F_1 est bi-invariant. Ce qui équivaut à dire que le sous-groupe connexe $G_* \subset G$ est distingué. Comme auparavant on identifie l'espace des feuilles G/F_1 avec la réduction Kählérienne $(G_1/G_{x_o} \times H_1, \omega, J)$. Comme variété Kählérienne homogène G/F_1 est canoniquement isomorphe à (G/G_*). Le sous-groupe H_1 agit trivialement dans G/G_*. Les sous-groupes d'isotropie de

$$G/H_1 \times G/G_* \to G/G_*$$

sont conjugués au sous-groupe à un paramètre $[\exp tJ\zeta, t \in R]$. On suppose que le sous-groupe $[\exp tJ\zeta, t \in R] \subset G/H_1$ n'est pas distingué. Alors en vertu du Théorème 36 l'action de G/H_1 dans $(G/G_*, \omega, J)$ est libre. Cela est exclu pour la raison de dimension. Par conséquent le sous-groupe $[\exp tJ\zeta, t \in R] \subset G$ est distingué. □

OBSERVATION. En fait en vertu du théorème 37 (G, ω, J) est un théorème d'extension de (G^*, ω, J) par (G_*, ω, J). On a ainsi la fibration Kählérienne suivante

$$(G_*, \omega, J) \to (G, \omega, J) \to (G^*, \omega, J).$$

Si (G, ω, J) n'est pas localement plate on peut itérer le procédé de réduction pour obtenir une fibration Kählérienne comme ci-dessus telle que (G_*, ω, J) est une sous-variété Kählérienne homogène localement plate maximale dans (G, ω, J).

On utilisera cette observation dans la démonstration du Théorème 49. Une autre conséquence des Théorèmes 36 et 37 est qu'en fait l'extension

$$(G_*, \omega, J) \to (G, \omega, J) \to (G^*, \omega, J)$$

est triviale. Pour le voir on identifie (G_*, ω, J) avec $(G, \omega, J)/G^*$ et on applique le Théorème 36 pour conclure que l'action de G_* dans G/G^* est triviale.

4.2. Deux conjectures de Benson-Gordon. La topologie rationnelle des variétés Kählériennes compactes est étroitement liée à leur type de cohomologie réelle [1], [12].

Cette liaison étroite a permis de mieux comprendre pourquoi certaines variétés symplectiques compactes n'admettent pas de structures Kählériennes [3], [5], [6], [11]. D'un autre côté la cohabitation dans la même variété M de certains systèmes dynamiques différentiables transitifs et de certaines structures géométriques peut imposer plusieurs contraintes soit sur la géométrie globale de M soit sur la topologie de M. Les conjectures de C. Benson et C. Gordon [5], [6] rendent compte de certaines de ces contraintes pour les variétés Kählériennes compactes. Rappelons certaines définitions.

Une nilvariété est un espace homogène compact $\Gamma\backslash G$ quotient d'un groupe de Lie nilpotent simplement connexe G par un sous-groupe discret fermé cocompact $\Gamma \subset G$. Un tel sous-groupe est appelé un réseau cocompact de G. L'algèbre de de Rham d'une nilvariété $\Gamma\backslash G$ est isomorphe à l'algèbre (de cohomologie) de Koszul de l'algèbre de Lie de G [45]. Voici l'énoncé précis de ce résultat classique

Théorème 38. *Soit G un groupe de Lie nilpotent dont l'algèbre de Lie est g. Si G contient un réseau cocompact $\Gamma \subset G$ alors l'algèbre de de Rham réelle $H^\star(\Gamma\backslash G, R)$ est isomorphe à l'algèbre de Koszul $H^\star(g, R)$.*

Ce résultat est encore vrai pour certains espaces homogènes des groupes de Lie résolubles [22], [47].

Théorème 39. *Soit G un groupe de Lie complètement résoluble d'algèbre de Lie g et contenant un sous-groupe discret cocompact $\Gamma \subset G$. Alors l'algèbre de de Rham réelle $H^\star(\Gamma\backslash G, R)$ est isomorphe à l'algèbre de Koszul réelle $H^\star(g, R)$.*

W. Thurston a été le premier à découvrir un exemple de nilvariété symplectique compacte n'admettant pas de structure Kählérienne [52]. Dans l'exemple de Thurston l'obstacle vientde la pariété des nombres de Betti de dégré impair.

Par une combinaison ingénieuse du Théorème 35 de Nomizu, du Théorème dur de Lefschetz et du Théorème de nullité des triples produits de Massey dans les variétés Kählériennes compactes C. Benson et C. Gordon ont démontré le théorème suivant [5].

Théorème 40. *Si une nilvariété symplectique de dimension $2m$ $(\Gamma\backslash G, \omega)$ porte une structure Kählérienne $(\Gamma\backslash G, \omega, J)$ alors la variété $\Gamma\backslash G$ est difféomorphe au tore plat T^{2m}.*

Dans [32] Dusa McDuff a donné une autre démonstration du Théorème 40 de Benson-Gordon en utilisant une version faible du théorème de Lefschetz et la théorie d'application moment des actions hamiltoniennes du cercle. Il a été signalé que le Théorème 40 était connu de Jean-Louis Koszul (voir [5]).

Le Théorème 40 montre que génériquement l'existence de structure Kählérienne dans une variété compacte peut y exclure celle de certains type de systèmes dynamiques différentiables transitifs et réciproquement (voir aussi notre la Remarque 45 plus loin). Ce Théorème 40 a été fertile pour la recherche d'autres exemples de variétés symplectiques compactes n'admettant pas de structure Kählérienne (*e.g.* [11], [16]). Pour s'en tenir à l'aspect topologique signalons qu'il existe des variétés symplectiques simplement connexes n'admettant pas de structure Kählérienne [33]. Le groupe des symplectomorphismes d'une telle variété ne contient pas de sous-groupe de Lie transitif complètement résoluble.

Concernant les soluvariétés symplectiques C. Benson et C. Gordon ont en marge de la Conjecture 41 ci-dessous évoqué (dans [6]) une autre interrogation que je formule sous la forme de Conjecture 42.

Conjecture 41. *Soit G un groupe de Lie complètement résoluble de dimension $2m$ et contenant un réseau cocompact $\Gamma \subset G$. Si la variété compacte $\Gamma\backslash G$ admet une structure Kählérienne $(\Gamma\backslash G, \omega, J)$ alors la variété $\Gamma\backslash G$ est difféomorphe au tore plat $T^{2m} = R^{2m}/Z^{2m}$.*

La Conjecture 42 ci-dessous sonne comme une réciproque partielle de la Conjecture 41. En voici l'énoncé

Conjecture 42. *Soit G un groupe de Lie résoluble contenant un réseau cocompact Γ. On suppose que $\Gamma\backslash G$ admet une structure Kählérienne. Si la variété $\Gamma\backslash G$ est difféomorphe au tore plat R^{2m}/Z^{2m} alors G est complètement résoluble.*

La Conjecture 41 a fait l'objet de plusieurs travaux [3], [21], [46], [53]. Concernant cette Conjecture 41 nous allons limiter notre ambition à en déduire une démonstration du Théorème 33 lorsque la forme de Kaehler est homogène dans le sens de [32]. En voici l'énoncé

Théorème 43. *Soit (G, ω, L) une FL-structure invariante à gauche dans un groupe de Lie complètement résoluble G de dimension $2m + 2$. Soit $\Gamma \subset G$ un sous-groupe discret cocompact opérant dans G par les translations à gauche. S'il existe une structure presque complexe intégrable (G, J) qui est quasi-adaptée à (G, ω, L) et qui est invariante par Γ alors la variété $\Gamma\backslash G$ est difféomrphe au tore plat $Z^{2m}\backslash R^{2m}$.*

Démonstration. En vertu de Théorème 25 (G, J) est adapté à (G, ω, L). On applique les théorèmes 29 et 33 qui assurent que la paire de feuilletages Lagrangiens $(L, J(L))$ définit dans (G, ω) une structure affinement plate $(G, D^\star)$ qui est Kählérienne dans le sens du Théorème 17 (cf. aussi Définition 4). Soit $A_{D^\star}$ un atlas comme dans le Théorème 33. Soit $\Omega_{D^\star}$ l'ensemble des différentielles des systèmes

$$(y, p) = (y_1, \dots, y_{m+1}, p_1, \dots, p_{m+1})$$

des fonctions coordonnées locales de l'atlas $A_{D^\star}$. On applique Théorème 33 en vertu duquel Γ contient un sous-groupe Γ^* qui est d'indice fini et qui laisse invariants les champs de vecteurs hamiltoniens des fonctions coordonnées locales de $A_{D^\star}$. Cela entraine que les éléments de l'ensemble $\Omega_{D^\star}$ qui est formé des diffŕentielles

$$(dy, dp) = (dy_1, \ldots, dy_{m+1}, dp_1, \ldots, dp_{m+1})$$

sont Γ^*-invariants. Le sous-groupe Γ^* étant fermé dans G l'ensemble $\Omega_{D^\star}$ se projette dans la variété symplectique compacte $(\Gamma^*\backslash G, \omega)$. Notons $\Omega^*_{D^\star}$ l'image de cette projection. La paire $(L, J(L))$ est invariante par Γ^*. Notons $[Y, P]^*$ l'ensemble des fonctions primitives locales des éléments de $\Omega^*_{D^\star}$. Alors $[Y, P]^*$ est l'ensemble des fonctions coordonnées locales d'un atlas A^* de $(\Gamma^*\backslash G, \omega, J, L, J(L))$. En outre les systèmes des coordonnées locales $(y^*, p^*) \in [Y, P]^*$ vérifient les conditions (1), (2), (3), (4), (5) de Théorème 17. Ainsi la variété compacte $M^* = \Gamma^*\backslash G$ porte une structure de variété Kählérienne plate. Ainsi on voit que la variété $\Gamma\backslash G$ est difféomorphe à un quotient fini du tore plat [57]. Autrement dit, à difféomorphisme près on a

$$\Gamma\backslash G = \Phi\backslash T^{2m+2}$$

où Φ est un groupe fini de difféomorphismes de T^{2m+2}.

Soit g l'algèbre de Lie du groupe de Lie G. Soit $b_1(M^*)$ le premier nombre de Betti de la variété M^*. D'une part on a l'égalité $b_1(M^*) = b_1(T^{2m+2}) = 2m+2$. D'autre part en vertu du Théorème 39 de Hattori-Raghunathan énoncé ci-dessus on a $b_1(M^*) = \operatorname{codim}([g, g]) = \dim(H^1(g, R)) = 2m + 2 = \dim(G)$. Il en résulte que le groupe de Lie G est commutatif. Ainsi à difféomorphisme près la variété $\Gamma\backslash G$ est le tore plat T^{2m+2}. Ceci termine la démonstration du Théorème 43. □

Voici un Théorème ancien de Hano [20] qui est un Corollaire du Théorème 43.

Théorème 44. *A isométrie près toute variété Kählérienne de dimension $2m$ qui est homogène sous l'action (Kählérienne) localement libre d'un groupe de Lie complètement résoluble est le tore plat T^{2m}.*

Avant de nous intéresser à la Conjecture 42 observons que dans les Théorèmes 33 et 40 l'invariance de (G, ω, J) par l'action du sous-groupe discret cocompact Γ est essentielle. Par exemple soit G un groupe de Lie nilpotent non commutatif simplement connexe de dimension 4. Alors G admet des FL-structures invariantes à gauche. De plus chaque FL-structure invariante à gauche (G, ω, L) possède des structures presque complexes intégrables (G, J) qui lui sont adaptées mais aucune de ces structures presque complexes intégrables n'est invairiante par un réseau.

Nous allons nous occuper de la Conjecture 42. Pour cela on considère le plan complexe C^2 muni de la loi de composition suivante

$$(z_1, z_2) \,.\, (z_1', z_2') = \left(z_1 + z_1' \exp\left(\frac{\sqrt{-1}\pi y_2}{r}\right), z_2 + z_2'\right)$$

avec $r \in R^{\star}$, $z_j = x_j + \sqrt{-1}y_j$, $j := 1, 2$. Cette loi de composition munit C^2 d'une structure de groupe de Lie réel de dimension 4. Notons G_r le groupe de Lie ainsi obtenu. Désignons par Γ_r le sous-ensemble

$$\Gamma_r = (Z + \sqrt{-1}Z, Z + r\sqrt{-1}Z).$$

Lorsque $r \in R$ est rationnel Γ_r est un réseau cocompact virtuellement commutatif. En particulier si $r = 1/4$ alors $\Gamma_{1/4}$ est un réseau cocompact commutatif. De plus les translations à gauche par les $\gamma \in \Gamma_{1/4}$ sont des translations ordinaires

$$l_\gamma(z_1, z_2) = \gamma + (z_1, z_2).$$

Le produit hermitien canonique de C^2 est invariant par les translations à gauche dans G_r. En fait la translation à gauche $l_{(z_1,z_2)}$ est une isométrie de l'espace euclidien R^4.

La variété $M_{1/4} = \Gamma_{1/4}\backslash G_{1/4}$ hérite d'une structure Kählérienne. Le groupe de Lie résoluble $G_{1/4}$ n'est pas complètement résoluble. Cependant la variété compacte $M_{1/4}$ est difféomorphe au tore plat T^4. Cela infirme la Conjecture 42.

REMARQUE 45. Du point de vue de dynamique différentiable [50], Théorème 43 implique qu'aucun groupe de Lie complètement résoluble de dimension 4 n'opère transitivement dans la variété $M_{1/2} = \Gamma_{1/2}\backslash G_{1/2}$. En effet le rang du groupe abelien $[\Gamma, \Gamma]\backslash\Gamma$ est égal à 2. On a ainsi $b_1(M_{1/2}) = 2$. Ainsi l'existence de structure Kählérienne exclut certains systèmes dynamiques différentiables transitifs. D'un autre côté tout groupes de Lie nilpotent G de dimension 4 contient un réseau Γ et admet une FL-structure invariantes à gauche (G, ω, L). Le Théorème 40 montre qu'aucune structure holomorphe (G, J) adpatée à (G, ω, L) n'est invariante par un réseau $\Gamma \subset G$. Ainsi l'existence de système dynamique transitif localement libre dans la variété compacte $\Gamma\backslash G$ exclut celle de structure Kählérienne.

4.3. KV cohomologie des variétés bi-Lagrangiennes. Nous allons examiner quelques aspects des variétés localement plates et de leur KV cohomologie [40]. On va limiter cette évocation à la mise en évidence de quelques aspects des FL-variétés qui méritent plus d'attention. En particulier nous mettons en évidence des complexes de cochaines susceptibles de fournir des nouveaux invariants géométriques de ces structures

A. Modules sur les algèbres de Koszul-Vinberg. Nous entendons par algèbre réelle un espace vectoriel réel muni d'une structure d'anneau dont la multiplication $u, v \to uv$ est bilinéaire.

DÉFINITION 46. Une algèbre de Koszul-Vinberg réelle est une algèbre réelle dont l'application associateur $u, v, w \to (u, v, w) = u(vw) - (uv)w$ est symétrique par rapport aux deux premiers arguments à gauche u et v.

Soit V un espace vetoriel et A une algèbre de Koszul-Vinberg. On suppose données deux applications bilinéaires $A \times V \to V : a, v \to av$ et $V \times A \to V : v, a \to va$. Les applications tri-linéaires $a, b, v \to (a, b, v)$ et $a, v, b \to (a, v, b)$ avec $a, b \in A$ et $v \in V$ sont définies en posant $(a, b, v) = a(bv) - (ab)v$, $(a, v, b) = a(vb) - (av)b$ et $(v, a, b) = v(ab) - (va)b$

DÉFINITION 47. Les trois applications tri-linéaires ci-dessus munissent V d'une structure de (bi)mondule sur l'algèbre de Koszul-Vinberg A si elles satisfont les identités $(a, b, v) = (b, a, v)$ et $(a, v, b) = (v, a, b)$, $\forall a, b \in A$ et $\forall v \in V$.

On note $J(V) \subset V$ le sous-espace formé des $v \in V$ tels que $(a, b, v) = 0$, $\forall a, b \in A$. En particulier $J(A)$ est une sous-algèbre associative de A.

Le produit tensoriel $V \otimes W$ de deux A-modules est un A-module sous les actions à gauche et à droite suivantes : $a(v \otimes w) = (av) \otimes w + v \otimes (aw)$ et $(v \otimes w)a = v \otimes (wa)$. L'espace $\mathrm{Hom}(V, W)$ des applications linéaires de V dans W est un (bi)module sur A sous les actions suivantes. Soit $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$, $a \in A$, alors pour tout $v \in V$ on pose $(af)(v) = a(f(v)) - f(av)$ et $(fa)(v) = (f(v))a$.

EXEMPLE 48. (i) Soit (M, D) une variété localement plate. Soit A l'espace vectoriel des champs de vecteurs différentiables sur M. A l'aide de la connexion linéaire D on munit A de la multiplication définie par $XY = D_X Y$. La nullité des tenseurs de torsion et courbure s'exprime par $[X, Y] = XY - YX$ et $(X, Y, Z) = (Y, X, Z)$, $\forall X, Y, Z \in A$.
(ii) Toute algèbre associative est une algèbre de Koszul-Vinberg.
(iii) Soit (M, ω, L) une FL-variété symplectique. Pour mémoire rappelons ce qui a déjà été dit : chaque feuille F de L a une structure de variété localement plate (F, ∇) dont l'opérateur dérivation covariante $\nabla : X, Y \to \nabla_X Y$ est donnée par la formule suivante : X et Y étant des champs de vecteurs tangents aux feuilles de L on a

$$\omega(\nabla_X Y, Z) = (L_X i_Y \omega)(Z).$$

(iv) Si (M, ω, L, N) est structure bi-Lagrangienne affinement plate on rappelle que la dérivation covariante D de la structure localement plate définie par (L, N) est définie par la formule suivante : soient $X = (X_1, X_2)$, $Y = (Y_1, Y_2) \in TL \oplus TN$,

$$D_{(X_1, X_2)}(Y_1, Y_2) = \nabla_{X_1} Y_1 + [X_2, Y_1]_1, \nabla_{X_2} Y_2 + [X_1, Y_2]_2.$$

Soit G un groupe de Lie complètement résoluble muni d'une FL-structure homogène (G, ω, L). Notons par A (resp. A_L) l'espace vectoriel des champs de vecteurs tangents à G (resp. l'espace des champs de vecteurs tangents aux feuilles de L). L'exemples (iv) montre que chaque structure holomorphe (G, J) qui est adaptée à (G, ω, L) donne naissance à deux idéaux à gauche A_L et $A_{J(L)}$ de l'algèbre de Koszul-Vinberg A de la structure de variété localement plate (G, D) déterminée par $(G, \omega, L, J(L))$. L'espace

$C^\infty(G, R)$ des fonctions différentiables réelles est un module à gauche sur chacune des trois algèbres A, A_L et $A_{J(L)}$. Nous allons décrire quelques suites spectrales générées par cette situation. Ces suites spectrales sont en fait des invariants géométriques de la FL-structure (G, ω, L).

B. Complexes attachés à un module d'une algèbre de Koszul-Vinberg.

Complexe de cohomologie. Soit V un bi-module sur une algèbre de Koszul-Vinberg A. Soit $C^\star(A, V)$ l'espace vectoriel Z-gradué par les sous-espaces homogènes $C^k(A, V)$ suivants : $C^k(A, V) = 0$ si $k \in Z$ est un nombre entier négatif, $C^0(A, V) = J(V)$ et $C^k(A, V) = \mathrm{Hom}(A^{\otimes k}, V)$ si $k \in Z$ est un nombre entier positif.

On définit l'opérateur linéaire $d : C^k(A, V) \to C^{k+1}(A, V)$ en posant

$$(dv)(a) = -av + va$$

si $v \in J(V)$. Si $k \geq 1$ alors on pose

$$(df)(a_1, \dots, a_{k+1}) = \sum_{j \leq k} (-1)^j ((a_j f)(a_1, \dots, \hat{a}_j, \dots, a_{k+1}) \\ + (f(a_1, \dots, \hat{a}_j, \dots, a_k, a_j))a_{k+1}).$$

Dans la formule de définition de l'opérateur cobord ci-dessus la fonction $a_j f$ est définie par

$$(a_j f)(b_1, \dots, b_k) = a_j(f(b_1, \dots, b_k)) - \sum_{1 \leq i \leq k} f(b_1, \dots, b_{i-1}, a_j b_i, b_{i+1}, \dots, b_k).$$

L'espace gradué $C^\star(A, V)$ avec l'opérateur d est un complexe de cochaine appelé complexe de cohomologie de la l'algèbre de Koszul-Vinberg A à valeurs dans le A-(bi)module V (ou KV complexe de A à valeurs dans V). Son k^{ieme} espace de cohomologie est noté $H^k(A, V)$. Les pionniers dans la recherche d'une théorie de cohomologie des algèbres de Koszul-Vinberg ont été Jean-Louis Koszul et Albert Nijenhuis (voir [44]). Pour plus d'informations sur les KV complexes et leurs diverses applications en géométrie des variétés localement plates hyperboliques et en géométrie de Poisson le lecteur pourra se référer à [39], [40].

Toute algèbre associative est une algèbre de Koszul-Vinberg. Par conséquent outre la classique théorie de cohomologie de Hochschild $HH^\star$ la catégorie des algèbres associatives possède la théorie de KV cohomologie $H^\star_{KV}$. Les deux théories sont différentes. Cependant si W est un module à gauche sur une algèbre associative A alors on a $HH^1(A, W) = H^1_{KV}(A, W)$ et $HH^2(A, W) \subset H^2_{KV}(A, W)$ (cf. [40]).

Un retour à la conjecture fondamentale. Soit (M, ω, J) une variété Kählérienne homogène sous l'action d'un groupe de Lie complètement résoluble G. L'énoncé exact de la conjecture fondamentale stipule que M est l'espace total d'un fibré au dessus d'un domaine borné dont la fibre type est une variété Kählérienne homogène simplement connexe (localement) plate. J'en ai signalé plus haut deux démonstrations par Dorfmeister [13] d'une part et par Gindikin, Piatecckii-Sapiro et Vinberg [18] d'autre part. Je vais en donner une troisième démonstration basée sur l'utilisation de la KV cohomologie des structures bi-Lagrangiennes. De ce point de vue en voici la formulation

Théorème 49. *Soit (M, ω, J) une variété Kählérienne homogène sous l'action d'un groupe de Lie complètement résoluble G. Alors M est l'espace total d'un fibré au dessus d'une variété globalement hessienne (ou si l'on veut au dessus d'un domaine Ω muni d'une métrique de Bergmann $\sum_{j,k} \partial_j \bar{\partial}_k (\log \varphi)\, dz_j\, d\bar{z}_k$ où φ est une fonction réelle positive) et de fibre type une variété Kählérienne homogène simplement connexe (localement) plate.*

Démonstration. On suppose que (M, ω, J) n'est pas localement plate. En vertu du Théorème 36 ci-dessus on peut identifier (M, ω, J) avec un groupe de Lie complètement résoluble G équipé d'une structure Kählérienne invariante à gauche (G, ω, J). En vertu du Théorème 37 joint à l'observation qui le suit, la variété Kählérienne (G, ω, J) est isométrique au produit direct de deux sous-groupe de Lie $G_* \times G^*$ tels que la métrique hermitienne induite (G_*, ω, J) est (localement) plate maximale et que (G^*, ω, J) n'est pas localement plate. Nous allons montrer que la variété analytique (G^*) est difféomorphe à un domaine borné. Considérons G^* muni de la métrique induite invariante à gauche (G^*, ω, J). On applique le Théorème 29 de ce travail, alors (G^*, ω) porte une FL-structure (G^*, ω, L) telle que la paire $(L, J(L))$ définisse une structure bi-Lagrangienne Kählérienne localement plate $(G^*, \omega, \tilde{J})$. Cela veut dire que la connexion symplectique affinement plate $\tilde{D}$ définie par $(L, J(L))$ est la connexion de Levi-Civita de la métrique hermitienne $\tilde{h}(X, Y) = \omega(\tilde{J}(X), Y) + \sqrt{-1}\omega(X, Y)$. Considérons maintenant le KV complexe $C^\star(G^*, T^\star G^*) = C^\star(A, \Omega(G^*, R))$; A est l'algèbre de Koszul-Vinberg de la variété localement plate $(G^*, \tilde{D})$ et $\Omega(G^*, R)$ est le A-module à gauche des 1-formes différentielles. Notons $\tilde{g}(X, Y) = \omega(\tilde{J}X, Y)$. Que $\tilde{D}$ soit la connexion de Levi-Civita de $\tilde{g}$ entraine que $\tilde{g}$ est un 1-cocyle du KV complexe $C^\star(A, \Omega(G^*, R))$. Puisque G^* est simplement connexe le premier espace de cohomologie $H^1(A, \Omega(G^*, R))$ est nul (cf. [36]). Donc il existe une 1-forme différentielle $\theta \in \Omega(G^*, R)$ dont la dérivée covariante est égale à $\tilde{g}$, c'est à dire que l'on a

$$\tilde{g}(X, Y) = X\theta(Y) - \theta(\tilde{D}_X Y).$$

Visiblement la 1-forme θ est fermée, *i.e.* θ est un 1-cocyle du complexe de de Rham de la variété G^*. Puisque G^* est simplement connexe il existe une fonction différentiable partout positive $\varphi \in C^\infty(G^*, R)$ telle que $\theta = d(\log(\varphi))$. Ainsi l'espace $C^\infty(G^*, R)$ contient une fonction (convexe) dont la $\tilde{D}$-hessienne est définie positive. Il en résulte que la variété holomorphe $(G^*, \tilde{J})$ possède une métrique (hermitienne) de Bergmann. Puique G^* est simplement connexe $(G^*, \tilde{D})$ est difféomorphe à un domaine borné [18],

[19], [26], [28], [54], [55]. Ceci termine la démonstration. □

Complexe d'homologie. On a signalé plus haut le travail pionnier de Albert Nijenhuis concernant la théorie de KV cohomologie dont la définition vient d'être donnée. En ce qui concerne la théorie de KV homologie des algèbres de Koszul-Vinberg aucune tentative n'a abouti avant [41] qui est la première tentative réussie de définition d'un complexe de chaine d'une algèbre de Koszul-Vinberg à coefficients dans un bi-module. A tout A-(bi)module V on va associer l'espace $C_\star(A, V)$ qui est Z-gradué par les sous-espaces homogènes $C_k(A, V)$ suivants : $C_k(A, V) = 0$ si k est négatif ; $C_0(A, V) = J(V)$, $C_k(A, V) = A^{\otimes k} \otimes V$ si k est un nombre entier positif.

Supposons que k soit un nombre entier positif. Soit $\xi = a_1 \otimes a_2 \otimes \ldots \otimes a_{k+1} \in A^{\otimes(k+1)}$ et $v \in V$. On pose $\partial_j \xi = a_1 \otimes \ldots \otimes a_{j-1} \otimes a_{j+1} \otimes \ldots \otimes a_{k+1}$ et $\partial^2_{j,k+1}\xi = a_1 \otimes \ldots \otimes a_{j-1} \otimes a_{j+1} \otimes \ldots \otimes a_k$. Maintenant nous désignerons encore par d l'opérateur linéaire $C_{k+1}(A, V) \to C_k(A, V)$ défini comme il suit : $d = 0$ pour $k \leq 1$. Si $k \geq 2$ on pose

$$d(\xi \otimes v) = \sum_{j \leq k} (-1)^j [\partial_j \xi \otimes v a_j - a_j(\partial_j \xi \otimes v) + (\partial^2_{j,k+1}\xi) \otimes a_j \otimes v a_{k+1}].$$

Nous allons esquisser la preuve de Lemme suivant

Lemme 50. *Le couple $(C_\star(A, V), d)$ est un complexe de chaine.*

Esquisse de démonstration. Soit $k \geq 2$ et $\eta = \xi \otimes v = a_1 \otimes a_2 \otimes \ldots \otimes a_{m+1} \otimes v \in A^{m+1} \otimes V$. Il s'agit de montrer que $d^2\eta = 0$. Pour ce faire fixons deux indices i, j tels que $1 \leq i \leq j \leq m$. L'application de la formule de l'opérateur bord d donne

$$\begin{aligned} d\eta = {} & (-1)^i [\partial_i \xi \otimes v a_i - a_i(\partial \xi \otimes v) + \partial^2_{i,m+1}\xi \otimes a_i \otimes v a_{m+1}] \\ & + (-1)^j [\partial_j \xi \otimes v a_j - a_j(\partial_j \xi \otimes v) + \partial^2_{j,m+1}\xi \otimes a_j \otimes v a_{m+1}] \\ & + \text{les autres termes.} \end{aligned}$$

En fait le calcul de $d^2(\xi \otimes v)$ se réduit pour l'essentiel à l'addition des expressions $\tau_{i,j}$, $\sigma_{i,j}$ et $\rho_{i,j,m}$ où

$$\tau_{i,j} = (a_i a_j - a_j a_i)(\partial^2_{i,j}\xi \otimes v) - a_i(a_j(\partial^2_{i,j}\xi \otimes v)) + a_j(a_i(\partial^2_{i,j}\xi \otimes v)),$$

$$\sigma_{i,j} = a_i((\partial^2_{i,j}\xi \otimes v)a_j) - (a_i(\partial^2_{i,j}\xi \otimes v))a_j - (\partial^2_{i,j}\xi \otimes v)(a_i a_j) + (((\partial^2_{i,j}\xi \otimes v)a_i))a_j,$$

$$\rho_{i,j,m} = \partial^2_{i,j}\xi \otimes a_i \otimes [(a_j, v, a_{m+1}) - (v, a_j, a_{m+1})].$$

Les axiomes de structure de (bi)module sur une algèbre de Koszul-Vinberg entrainent

$$\tau_{i,j} = \sigma_{i,j} = \rho_{i,j,m} = 0.$$

Cela termine l'esquisse de démonstration du Lemme 50.

Le Lemme 50 fonde la théorie d'homologie des algèbres de Koszul-Vinberg à coefficients dans leurs (bi)modules. Dans le cas du A-module trivial R le complexe de chaine $C_\star(A, R)$ est le dual algébrique du complexe $C^\star(A, R)$ de KV cohomologie réelle. Le complexe de cochaine $C_\star(A, V)$ est appelé complexe d'homologie de A à coefficients dans le A-bimodule V. Son espace d'homologie de dégré k est noté $H_k(A, V)$.

4.4. Digression. Signalons quelques applications de la KV cohomologie attachée à une variété localement plate. Soit (M, D) une variété localement plate. Nous identifions le revêtement universel de la variété M avec les classes d'homotopie des chemins $c(t)$ d'origine fixe $x_o \in M$.

Pour $0 \leq s \leq 1$ soit $\tau_s : T_{x_o}M \to T_{c(s)}M$ le transport parallèle le long du chemin c. On définit l'application développement

$$Q(c) = \int_0^1 (\tau(s))^{-1} c'(s)\, ds$$

où $c'(s)$ est le vecteur vitesse de c à l'instant s. Le vecteur tangent $Q(c) \in T_{x_o}M$ ne dépend que de la classe d'homotopie $[c]$ de c [29]. Le resultat suivant est classique (voir par exemple [17], [27])

Théorème 51. *Les deux assertions suivantes sont équivalentes.*
(i) *La connexion linéaire D est géodésiquement complète.*
(ii) *L'application développement $[c] \to Q(c)$ est un difféomorphisme.*

Soit (M, D) une variété localement plate. Soit $\pi_{x_o}(M)$ le groupe fondamental de M au point $x_o \in M$. Le transport parallèle τ le long des lacets d'origine x_o est une représentation linéaire de $\pi_{xo}(M)$ dans $T_{x_o}M$. L'image de $\tau(\pi_{x_o})$ est l'holonomie linéaire de (M, D). Voici l'énoncé de la conjecture de Markus.

Conjecture 52. *Si l'holonomie linéaire d'une variété localement plate compacte (M, D) est unimodulaire alors (M, D) est complète.*

Cette conjecture a été démontrée dans un certains nombre de cas au prix des hypothèses supplémentaires, par D. Fried, W. Goldman et Hirsch [17] lorsque l'honomie linéaire est nilpotente ; par Y. Carrière [10] lorsque l'holonomie linéaire est Lorentzienne. D'autres variations par F. Dal'bo, par J. Smilie.... La KV cohomologie abrite une obstruction à la complétude des variétés localement plates. Soit $(\tilde{M}, \tilde{D})$ le revêtement universel de (M, D). Si l'holonomie linéaire de (M, D) est unimodulaire alors le sous-espace $Z^m(M, R) \subset C^m(M, R)$ des KV cocyles scalaires de dégré $m = \dim(M)$ contient une forme volume ν. On évoque la conjecture de Markus pour signaler le résultat suivant [40]

Théorème 53. *La notation est celle ci-dessus avec M compacte. On suppose que l'holonomie linéaire de (M, D) est unimodulaire. Soit ν un cocycle qui est une forme volume dans M. Pour que (M, D) soit complète il est necessaire que la classe de cohomologie $[\nu] \in H^m(M, R)$ soit nulle.*

Pour terminer avec cette digression, rappelons que (M, D) est dite hyperbolique si l'image de l'application développement Q est un domaine convexe ne contenant aucune droite entière [26], [29], [54]. Une propriété remarquable de ces variétés est leur non rigidité. Plus précisement on doit à Koszul le théorème suivant.

Théorème 54. *Supposons que (M, D) soit une variété hyperbolique dont l'image de l'application développement est un cône convexe. Alors (M, D) admet des déformations non triviales.*

Quand Koszul démontre ce théorème dans les années soixante Nijenhuis et lui même sont à la recherhe d'une Théorie de cohomologie des algèbres bâptisées par les deux intéressés algèbres de Vinberg (cf. Koszul : Sur les algèbres de Vinberg, Cours à l'université de Genève, 1968, [44]). En terme de cohomologie des algèbres de Koszul-Vinberg le théorème de Koszul prend la forme suivante [40].

Théorème 55. *Si l'image de l'application développement Q est un cône convexe alors le deuxième espace de cohomologie $H^2(A, A)$ est non nul.*

Du point de vue de la complétude géodésique on voit que les variétés localement plates hyperboliques sont pour ainsi dire les plus éloignées des variétés localement plates complètes [17], [27], [36]. En fait Koszul obtient une condition necessaire à l'hyperbolicité. Puisque nous travaillons dans les groupes de Lie simplement connexes l'énoncé suivant se déduit facilement de [29], Théorème 3.

Théorème 56. *Soit (G, ω, L) une FL-structure invariante à gauche dans un groupe de Lie complètement résoluble. Soit (G, J) une structure presque complexe intégrable adaptée à (G, ω, L). Pour que la structure localement plate (G, D) définie par la structure bi-Lagrangienne $(G, \omega, L, J(L))$ soit hyperbolique il est nécesaire qu'il existe une fonction positive $f \in C^\infty(G, R)$ dont la différentielle logarithmique $dl_n f$ a sa dérivée covariante $D(dl_n f)$ définie positive. Si G contient un réseau cocompact Γ et s'il existe une fonction positive $f \in C^\infty(G, R)$ telle*
(i) *$D(dl_n f)$ est définie positive,*
(ii) *$dl_n f$ est invariante par les $\gamma \in \Gamma$ opérant dans G par translation à gauche alors (G, D) est hyperbolique.*

Couplage homologique. Considérons le corps des bases R comme module trivial sur A. l'espace vectoriel dual $V^\star$ d'un A-(bi)module V est un A-module à gauche. Le complexe d'homologie $C_\star(A, V^\star)$ n'est en général pas le complexe dual du complexe de cohomologie $C^\star(A, V)$. Cependant lorsque V est un A-module à gauche le couplage canonique $V^\star \times V \to R$ induit une application bilinéaire canonique $\mu : C^\star(A, V^\star) \times C_\star(A, V) \to R$ d'où dérive un couplage canonique

$$H^k(A, V^\star) \times H_k(A, V) \to R.$$

Voici la définition de l'application bilinéaire μ. Soit $f \in C^k(A, V^\star)$ et $\eta = \xi \otimes v = a_1 \otimes \ldots \otimes a_k \otimes v \in C_k(A, V)$. Alors on pose $\mu(f, \eta) = (f(\xi))(v)$. Le lecteur vérifiera par un calcul direct que pour $\forall f \in C^k(A, V^\star)$ et $\forall \eta \in C_{k+1}(A, V)$ on a

$$\mu(df, \eta) = \mu(f, d\eta).$$

Cela montre que le couplage μ descend au niveau homologique pour définir un couplage entre la KV cohomologie et la KV homologie. Mais cela ne fonctionne de manière canonique que pour les modules à gauche. Cette relation est utilisée dans [41] pour associer à toute FL-structure (M, ω, L) une intégrale qui en est un invariant géométrique.

Homologie à coefficients distributions. On termine l'apsect couplage homologique par un dernier exemple. Soit (M, D) une variété localement plate. Soit A l'algèbre de Koszul-Vinberg de (M, D). L'espace $C^\infty(M, R)$ est muni de la structure de A-module à gauche définie par la formule

$$(af)(x) = (D_a f)(x) = df(a(x)).$$

Soit $D_{is}(M)$ l'espace des distributions sur M. Considerons le corps R comme A-module trivial, alors $D_{is}(M)$ est un A-module à gauche. Soit $a \in A$ et $\delta \in D_{is}(M)$, alors la distribution $a\delta$ est définie par la formule $(a\delta)(f) = -\delta(af)$, $\forall f \in C^\infty(M, R)$. Le couplage canonique $D_{is}(M) \times C^\infty(M, R) \to R$ induit une application bilinéaire $\mu : C^\star(A, D_{is}(M)) \times C_\star(A, C^\infty(M, R)) \to R$. Ce couplage homologique est visiblement un invariant géométrique de (M, D). L'application bilinéaire μ descend au niveau des espaces d'homologie pour définir le couplage canonique

$$H^k(A, D_{is}(M) \times H_k(A, C^\infty(M, R)) \to R.$$

4.5. Suites spectrales des structures holomorphes adaptées à une *FL*-structure homogène (*G*,*ω*,*L*). Les suites spectrales sont des outils puissants pour le calcul homologique. On se propose de mettre en évidence certaines suites spectrales canoniques qui convergent vers la KV cohomologie des algèbres de Koszul-Vinberg.

Soit G un groupe de Lie complètement résoluble. Soit (G, ω, L) une FL-structure invarainte à gauche. Considérons une structure presque complexe intégrable (G, J) qui est adaptée à (G, ω, L). On sait que la paire $(L, J(L))$ définit une structure de variété localement plate (G, D). Il convient d'observer que la connexion linéaire D n'est pas invariante par les translations à gauche. Conformément à la notation déjà utilisée A,

A_L et $A_{J(L)}$ sont les algèbres de Koszul-Vinberg des champs de vecteurs tangents à G, tangents aux feuilles de L et tangents aux feuilles de $J(L)$ respectivement. L'espace vectoriel $C^\infty(G, R)$ des fonctions différentiables est un module à gauche sur chacune des algèbres A, A_L, $A_{J(L)}$.

Nous appelons KV-complexe scalaire de (G, D) le complexe de cochaine $C^\star(G, R) = C^\star(A, C^\infty(G, R))$.

De manière similaire on définit pour chacun des feuilletages son complexe scalaire $C^\star(L, R) = C^\star(A_L, C^\infty(G, R))$ et $C^\star(J(L), R)$.

A la paire (A_L, A) on va associer une filtration $F^j C^\star(G, R)$. Auparavant on va rappeler un équivalent du produit intérieur par un champ de vecteur.

Soit $f \in C^k(A, V)$ avec $2 \le k$. Soit $j \in Z$, $1 \le j \le k$. La signification de l'égalité $e((A_L)^{\otimes j}) f = 0$ est la suivante : parmi les variables $a_1, \ldots, a_k$ si j variables ou plus sont dans le sous-espace $A_L \subset A$ alors $f(a_1, \ldots, a_k) = 0$.

Revenons à la filtration du complexe scalaire $C^\star(G, R)$ par les sous complexes

$$F^j C^\star(G, R) = \sum_k F^j C^\star(G, R) \cap C^k(G, R).$$

Par définition $f \in F^j C^\star(G, R) \cap C^k(G, R)$ si $e((A_L)^{\otimes(k-j+1)}) f = 0$.

On a l'inclusion évidente

$$F^{j+1} C^\star(G, R) \subset F^j C^\star(G, R).$$

Chaque sous-espace vectoriel $F^j C^\star(G, R)$ est un sous-complexe du complexe de cohomologie $C^\star(G, R)$. Nous allons examiner la suite spectrale dérivée de la filtration $F^j C^\star(G, R)$. Nous convenons de poser $F^j C^\star(G, R) \cap C^k(G, R) = C^k(G, R)$ si $j \le 0$ et $F^j C^\star(G, R) \cap C^k(G, R) = 0$ si $j \ge k + 1$. Ainsi la filtration $F^j C^\star(G, R)$ est bornée.

On observe qu'en posant $F^{k+1} C^\star(G, R) \cap C^k(G, R) = 0$ on a l'identification canonique

$$F^k C^\star(G, R) \cap C^k(G, R) = C^k(J(L), R).$$

L'espace de cohomologie $H^\star(G, R)$ est filtré par les images $F^j H^\star(G, R)$ des $H^\star(F^j C^\star(G, R))$ par l'application dérivée de l'application inclusion $F^j C^\star(G, R) \subset C^\star(G, R)$.

Soit $E = (E_r^{p,q})$ la suite spectrale générée par la filtration $F^j C^\star(G, R)$. Pour $r = 1$ on a

$$E_1^{p,q} = H^{p+q}(F^p C^\star(G, R)/F^{p+1} C^\star(G, R)).$$

En particulier on peut identifier $E_1^{p,0}$ avec $H^p(A_{J(L)}, C^\infty(G, R))$. Puisque la filtration est bornée on a

$$E_\infty^{p,q} = F^p H^{p+q}(G, R)/F^{p+1} H^{p+q}(G, R).$$

La suite spectrale ci-dessus est l'analogue de la suite spectrale de Hochschild-Serre d'une paire $(h \subset g)$ d'algèbres de Lie. Ce qui est remarquable est qu'au régard du complexe $C^\star(G, R)$ les feuilletages Lagrangiens L et $J(L)$ sont permutables. En d'autres termes en substituant à A_L l'algèbre de Koszul-Vinberg $A_{J(L)}$ on obtient une suite spectrale qui converge aussi vers l'espace de cohomologie $H^\star(G, R)$.

Soit G un groupe de Lie complètement résoluble. En vertu du Théorème 17 l'ensemble $\Im_L$ des structures presque complexes intégrables adaptées à une FL-structure invariante à gauche (G, ω, L) n'est pas vide. Nous pouvons résumer la digression sur les suites spectrales.

Théorème 57. *Soit G un groupe de Lie complètement résoluble et (G, ω, L) une FL-structure invariante à gauche. Alors à chaque structures presque complexe intégrable $(G, J) \in \Im_L$ adaptée à (G, ω, L) correspond une suite spectrale $E_r^{p,q}$ qui converge vers la KV cohomologie scalaire $H^\star(G, R)$ de (G, D_J) où D_J est la connexion symplectique définie par la structure bi-Lagrangienne $(G, \omega, L, J(L))$.*

REMARQUE 58. On a vu qu'en substituant à A_L l'algèbre $A_{J(L)}$ on obtient une suite spectrale $E_r^{p,q}$ dont les termes $E_1^{p,0}$ et la limite $E_\infty^{p,q}$ ne dépendent pas du choix de la structure presque complexe intégrable $(G, J) \in \Im_L$ adaptée à (G, ω, L). En effet on a obtenu les égalités

$$E_1^{p,0} = H^p(A_L, C^\infty(G, R)).$$

On obtient ainsi des invariants géométriques de $(G, \omega, L) \times \Im_L$. Ces invariants peuvent être considérés comme des invariants du module de classes d'holomorphisme des structures holomorphes qui sont adaptées à (G, ω). On observe au passage que le groupe $\mathrm{Aut}((G, \omega, L) \times \Im_L)$ est un groupe de Lie de dimension inférieure ou égale à $m(m+1)$ où m est la dimension de G.

4.6. Une suite spectrale canonique de $C^\star(A, V)$. Soit V un (bi)module sur une algèbre de Koszul-Vinberg A. On se propose de mettre en évidence une suite spectrale canonique qui converge vers la cohomologie $H^\star(A, V)$. Notons $A^i = A \wedge \ldots \wedge A$ la i-ème puissance extérieure de A et posons $C^{j,i}(A, V) = \mathrm{Hom}(A^j \otimes A^{\otimes i}, V) \subset C^{i+j}(A, V)$. On filtre l'espace vectoriel $C^\star(A, V)$ par les sous-espaces vectoriels $F^j C^\star(A, V)$ définis par

$$F^j C^\star(A, V) = \sum_i C^{j,i}(A, V) = \sum_i \mathrm{Hom}(A^j \otimes A^{\otimes i}, V).$$

Pour tout nombre entier positif k on voit que

$$F^j C^\star(A, V) \cap C^k(A, V) = \mathrm{Hom}(A^j \otimes A^{\otimes(k-j)}, V).$$

Soit $f \in F^jC^\star(A,V) \cap C^k(A,V)$ l'expression de l'opérateur cobord

$$df(a_1,\dots,a_{k+1}) = \sum_{i\le k}(-1)^i[(a_i f)(a_1,\dots,\hat{a}_i,\dots,a_{k+1}) \\ + (f(a_1,\dots,\hat{a}_i;\dots,a_k,a_i))a_{k+1}]$$

montre que $df \in F^jC^\star(A,V) \cap C^{k+1}(A,V)$. Par conséquent $F^jC^\star(A,V)$ est un sous-complexe du KV complexe $C^\star(A,V)$. On a visiblement l'inclusion suivante

$$\mathrm{Hom}(A^{j+1} \otimes A^{\otimes(i-1)}, V) \subset \mathrm{Hom}(A^j \otimes A^{\otimes i}, V).$$

On a en outre $F^1C^\star(A,V) \cap C^k(A,V) = C^k(A,V)$ et $F^{k+1}C^\star(A,V) \cap C^k(A,V) = 0$. Ces observations montrent que la filtration $F^jC^\star(A,V)$ est décroissante et bornée. Soit $E_r^{p,q}$ la suite spectrale dérivée de la filtration $F^jC^\star(A,V)$. En filtrant $H^\star(A,V)$ par les images $F^jH^\star(A,V) = i^\star(H^\star(F^jC^\star(A,V)))$ on a

$$E_\infty^{p,q} = F^pH^{p+q}(A,V)/F^{p+1}H^{p+q}(A,V).$$

Dans le cas des A-modules à gauche la suite spectrale $E_r^{p,q}$ permet de retrouver les résultats pionniers de Albert Nijenhuis [44]. Pour mettre en évidence le rapport entre la suite spectrale canonique et le travaux de Nijenhuis on va commencer par rappeler le complexe $C_N(A,V)$ de Nijenhuis.

L'algèbre des commutateurs de A est l'algèbre de Lie A_l dont le crochet est donné par $[a,b] = ab - ba$. Si V est un A-bimodule alors A, V et $\mathrm{Hom}(A,V)$ sont naturellement des modules (à gauche) sur l'algèbre de Lie A_l. On note alors $C_N(A,V)$ le complexe de Chevalley-Eilenberg $C_{\mathrm{ce}}^\star(A_l, \mathrm{Hom}(A,V))$ de l'algèbre de Lie A_l à valeurs dans le A_l-module $\mathrm{Hom}(A,V)$. Lorsque V est un A-module à gauche Nijenhuis définit l'espace de cohomologie (de dégré $k+1$) de l'algèbre de Koszul-Vinberg A à valeurs dans V en posant

$$H_N^{k+1}(A,V) = H_{\mathrm{ce}}^k(A_l, \mathrm{Hom}(A,V)).$$

Retournons à l'identification

$$F^kC^\star(A,V) \cap C^{k+1}(A,V) = C_{\mathrm{ce}}^k(A_l, \mathrm{Hom}(A,V))$$

pour rappeler un théorème (cf. [40], Appendice)

Théorème 59. *Si V est un module à gauche sur A alors l'opérateur cobord de Chevalley-Eilenberg $d_{\mathrm{ce}} : C_{\mathrm{ce}}^k(A_l, \mathrm{Hom}(A,V)) \to C_{\mathrm{ce}}^{k+1}(A_l, \mathrm{Hom}(A,V))$ et le KV-opérateur cobord $d : F^kC^\star(A,V) \cap C^{k+1}(A,V) \to F^kC^\star(A,V) \cap C^{k+2}(A,V)$ coincident.*

Ainsi conformément à la notation utilisée ci-dessus on a

$$H^{k+1}(F^kC^\star(A,V)) = H_N^{k+1}(A,V) = H_{\mathrm{ce}}^k(A_l,\mathrm{Hom}(A,V)).$$

Du point de vue de la filtration $F^jH^\star C^\star(A,V) \subset H^\star(A,V)$ on part du morphisme (inclusion) de complexe $i : C_N^\star(A,V) \to C^\star(A,V)$ pour voir que

$$F^kH^\star(A,V) \cap H^{k+1}(A,V) = i^\star(H_N^{k+1}(A,V)).$$

Ainsi on voit qu'il existe une application linéaire canonique de la cohomologie $H_N^\star(A,V)$ dans la filtration $F^jH^\star(A,V)$.

Sous une autre perspective la suite spectrale canonique d'une algèbre de Koszul-Vinberg est fortement liée à la cohomologie des formes différentielles d'ordre supérieur de Koszul [30].

Soit (M,D) une variété localement plate de dimension m. Soit A l'algèbre de Koszul-Vinberg de (M,D). Le fibré cotangent $T^\star M$ est un module à gauche sur l'algébroide de Koszul-Vinberg TM. Le KV complexe $C^\star(TM,T^\star M)$ n'est pas autre chose que le KV complexe $C^\star(A,\mathrm{Hom}(A,C^\infty(M,R)))$. Ce dernier est un sous-complexe de $C^\star(M,R) = C^\star(A,C^\infty(M,R))$.

On filtre le complexe $C^\star(M,R)$ par les $F^jC^\star(M,R)$ définis plus haut. On a en particulier

$$F^jC^\star(M,R) \cap C^k(M,R) = \mathrm{Hom}(A^j \otimes A^{\otimes(k-j)}, C^\infty(M,R)).$$

Cette filtration est fortement bornée dans le sens que $F^jC^\star(M,R) = 0,\ \forall j \geq m+1$ et $F^1C^\star(M,R) = F^0C^\star(M,R) = C^\star(M,R)$.

Puisque $C^\infty(M,R)$ est un A-module à gauche on peut procéder aux identifications que nous avons déjà utilisées. Soit A_l l'algèbre des commutateurs de A ; A_l n'est rien d'autre que l'algèbre de Lie des champs de vecteurs différentiables dans M. Soit $C^\star(A_l,T^\star M)$ le complexe des formes différentielles d'ordre supérieur à valeurs dans le fibré cotangent de M. Soit $C^\star(M,R) = C^\star(A,C^\infty(M,R))$ le KV complexe scalaire de (M,D). Enfin soit $C_N^\star(A,C^\infty(M,R))$ le complexe de Nijenhuis de A à valeurs dans $C^\infty(M,R)$. On a déjà fait remarquer que pour tout nombre entier positif k $C_N^k(A,C^\star(M,R))$ n'est rien d'autre que $C^{k-1}(A_l,T^\star M)$. On peut énoncer.

Théorème 60. *Il existe une suite spectrale $E_r^{p,q}$ définie par une filtration $F^jC^\star(A,C^\star(M,R))$ du KV complexe $C^\star(M,R)$ jouissant des propriétés suivantes :*

(i) *$E_r^{p,q}$ converge vers la KV cohomologie $H^\star(M,R)$ lorsque r tend vers l'infini ;*

(ii) *pour chaque nombre entier positif j on a les égalités suivantes*

$$H_N^j(A,C^\infty(M,R)) = H^{j-1}(A_l,T^\star M) = H^j(F^{j-1}C^\star(M,R)).$$

Réductions de Dirac des tenseurs de Poisson. Notre dernière observation concernant les FL-structures tient à leur rapport à la réduction de Dirac des structures de Poisson [8]. Si (M, ω, L) est une FL-structure alors notons A_L l'algèbre de Koszul-Vinberg des champs de vecteurs tangents aux feuilles de L. Notons $g_L = A_L \oplus C^\infty(M, R)$ l'algèbre de Koszul-Vinberg dont la multiplication est définie par la formule suivante

$$(a, f)(a', f') = (aa', (df')(a) + ff').$$

Les cochaines du KV complexe $C^\star(g_L, C^\infty(M, R))$ sont en fait des opérateurs multi-différentiels. Posons $g_L^{j,i} = A_L^{\otimes j} \otimes (C^\infty(M, R))^{\otimes i}$. On décompose chaque espace de cohomologie comme il suit

$$H^k(g_L, C^\infty(M, R)) = \sum_{i+j=k} H^{i,j}(g_L, C^\infty(M, R)).$$

Pour une classe de cohomologie homogène $[c]$ de dégré $k = j + i$ son appartenance

$$[c] \in H^k(g_L, C^\infty(M, R)) \cap H^{i,j}(g_L, C^\infty(M, R))$$

signifie que $[c]$ est représentable par un cocyle $c \in \mathrm{Hom}(g_L^{j,i}, C^\infty(M, R))$.

J'ai dit plus haut que les cochaines du complexe $C^\star(g_L, C^\infty(M, R))$ sont des opérateurs multi-differentiels. Rappelons qu'une cochaine $c \in C^k(g_L, C^\infty(M, R))$ est d'ordre $\leq l$ si en tout point $x \in M$ sa valeur $(c(a_1, \ldots, a_k))(x)$ dépend des jets d'ordre l $j_x^l a_1, \ldots, j_x^l a_k$, [30]. Un $(0, 2)$-cocycle $c \in \mathrm{Hom}(g^{0,2}, C^\infty(M, R))$ est appelé cocycle de Koszul-Vinberg s'il définit dans $C^\infty(M, R)$ une structure d'algèbre de Koszul-Vinberg $(C^\infty(M, R), c)$ dont la multiplication est $f, f' \to c(f, f')$. Le symbole σ_c de σ est aussi un cocycle.

Un théorème de [39] assure que si c est un $(0, 2)$-cocycle de Koszul-Vinberg d'ordre ≤ 1 alors l'algèbre des commutateurs de l'algèbre $(C^\infty(M, R), \sigma_c))$ est une algèbre de Poisson. Cela signifie que le 2-tenseur

$$\Pi : f, f' \to \Pi(f, f') = \sigma_c(f, f') - \sigma_c(f', f)$$

est un tenseur de Poisson. Ainsi le sous-espace $H^{0,2}(g_L, C^\infty(M, R))$ contient un sous-ensemble $H_P^{0,2}(g_L)$ qui est constitué des classes représentables par un tenseur de Poisson $\Pi \in \mathrm{Hom}(g^{0,2}, C^\infty(M, R))$. Il est aisé de voir que ces classes de Poisson sont contenues dans l'imagne dans $H_{KV}^2(C^\infty(M, R), C^\infty(M, R))$ de la cohomologie de Hochschild $HH^2(C^\infty(M, R), C^\infty(M, R))$ de l'algèbre associative commutative $C^\infty(M, R)$. De plus le tenseur de Poisson Π préserve le sous-espace I_L des intégrales premières du feuilletage L. Naturellement un tel tenseur Π est unique dans sa classe de cohomologie. Nous dirons que le couple (L, Π) est un feuilletage Poissonien transversalement Poissonien. Si L est simple alors Π possède une réduction de Dirac dans l'espace des feuilles de L [8], [51].

Nous supposons maintenant qu'il existe une structure presque complexe intégrable (M, J) qui est adapatée à (M, ω, L) dans le sens de la défintion 11. La variété symplectique (M, ω) en hérite d'une structure bi-Lagrangienne $(M, \omega, L, J(L))$. Notons D_J la dérivation covariante de la connexion symplectique définie par $(L, J(L))$. On sait que pour $X = (X_1, X_2)$, $Y = (Y_1, Y_2) \in TL \oplus TJ(L)$, D est défini par la formule suivante

$$D_X Y = (\nabla_{X_1} Y_1 + [X_2, Y_1]_1, \nabla_{X_2} Y_2 + [X_1, Y_2]_2).$$

Mutatis mutandis on a une algèbre de Koszul-Vinberg $g_{J(L)} = A_{J(L)} \oplus C^\infty(M, R)$ et son KV complexe de cochaine $C^\star(g_{J(L)}, C^\infty(M, R))$ ainsi que le sous-ensemble $H_P^{0,2}(g_{J(L)})$ des tenseurs de Poisson projetables le long des feuilles de $J(L)$.

Soit $(\Pi_L, \Pi_{J(L)}) \in H_P^{0,2}(g_L) \times H_P^{0,2}(g_{J(L)})$ une paire de tenseurs de Poisson. Leur crochet de Schouten $[\Pi_L, \Pi_{J(L)}]$ est un 3-tenseur antisymétrique. Soit w est une 3-forme différentielle. Le crochet $[\Pi_L, \Pi_{J(L)}]$ est défini par la formule suivante

$$w([\Pi_L, \Pi_{J(L)}]) = (di_{\Pi_{J(L)}} w)(\Pi_L) - (di_{\Pi_L} w)(\Pi_{J(L)}) - dw(\Pi_L \wedge \Pi_{J(L)}).$$

Les deux tenseurs sont dits compatibles si leur crochet $[\Pi_L, \Pi_{J(L)}]$ est nul. Lorsque $[\Pi_L, \Pi_{J(L)}] = 0$ toute combinaison linéaire à coefficients constants $\lambda\Pi_L + \mu\Pi_{J(L)}$ est un tenseur de Poisson. Ainsi soit $(\Pi_L, \Pi_{J(L)})$ une paire compatible. Soit $\Pi = \Pi_L + \Pi_{J(L)}$. La paire $(L, J(L))$ équipe la variété de Poisson (M, Π) de deux feuilletages de Poisson transverses. Si M est simplement connexe alors les feuilletages L et $J(L)$ sont simples. Le procédé de réduction de Dirac conduit aux deux fibrations de Poisson $L \to (M, \Pi) \to M/L$ et $J(L) \to (M, \Pi) \to M/J(L)$. On peut identifier l'espace des feuilles M/L avec une feuille $F_{J(L)}$ de $J(L)$ et $M/J(L)$ avec une feuille F_L de L. Alors F_L et $F_{J(L)}$ sont des sous-variétés de Poisson de (M, Π). Naturellement la varieté M est difféomorphe au produit direct $F_L \times F_{J(L)}$ mais ce produit direct n'est pas un produit direct des variétés de Poisson. Sous la perspective de la variété de Poisson (M, Π), la paire $(F_L, F_{J(L)})$ sonne comme un analogue Poissonien de paire de Drienfeld. Que $\Pi \in \mathrm{Hom}(g_L^{0,2}, C^\infty(M, R))$ soit un cocycle se traduit par $(a\Pi)(f, f') = a(\Pi(f, f')) - \Pi(af, f') - \Pi(f, af') = 0$. On note $A_L(\Pi_{J(L)})$ l'ensemble des $a\Pi_{J(L)}$, $a \in A_L$. On conclut par

Théorème 61. *Si* $(\Pi_L, \Pi_{J(L)})$ *est une paire compatible différente de la paire triviale* $(0, 0)$ *alors l'ensemble* $(A_L(\Pi_{J(L)}), A_{J(L)}(\Pi_L))$ *n'est pas réduit à* $(0, 0)$.

Esquisse de démonstration. Supposons que Π_L soit non nul et que l'on ait $A_{J(L)}\Pi_L = 0$. Puisque $TL \oplus TJ(L) = TM$ tout champ de vecteurs est un champ hamiltonien de la variété de Poisson (M, Π_L). Il en résulte que le tenseur Π_L est inversible. Ainsi (M, Π_L) est l'inverse d'une structure symplectique dont l'espace champs de vecteurs hamiltoniens coincide avec l'espace de tous les champs de vecteurs. Cela est absurde en dimension positive. □

4.7. Tissus Lagrangiens. Dans cette courte sous-section je me limite à signaler que chaque structure holomorphe (M, J) qui est adaptée à une FL-structure (M, ω, L) dans le sens de la définition 11 determine une application injective de R dans l'ensemble de feuilletages Lagrangiens de (M, ω). J'indique comment on en déduit des tissus Lagrangiens.

DÉFINITION 62. Un k-tissu Lagrangien dans (M, ω) est la donnée de k feuilletages Lagrangiens $(L_1, \ldots, L_k)$ qui sont deux à deux en situation générale.

Proposition 63. *Soit* (M,ω,L) *une* FL*-structure. S'il existe une structure presque complexe intégrable* (M, J) *adaptée à* (M,ω,L) *alors pour tout nombre entier* k (M,ω) *possède un* k*-tissu Lagrangien.*

Démonstration. En vertu du Théorème 25 la distribution JL est complètement intégrable. La nullité du tenseur de Nijenhuis de J entraine que pour tout $t \in R$ le graphe $L_t = X + tJX$, $X \in L \subset TM$ du tenseur tJ est une distribution Lagrangiennne complètement intégrable quel que soit le nombre réel t. Si $t, t' \in R$ sont deux nombres réels distincts alors L_t et $L_{t'}$ sont transverses. En effet considérons des champs de vecteurs non nuls X, X' qui sont tangents à L et tels que $X + tJX = X' + t'JX'$. Alors d'un côté le nombre réel $\omega(JX - tX, X' + t'JX') = (1 + tt')\omega(JX, X')$ est positif. De l'autre côté le nombre réel $\omega(X + tJX, X' + t'JX') = t\omega(JX, X') - t'\omega(JX, X') = (t - t')\omega(JX, X')$ est nul. Cette dernière condition entraine $t = t'$. Ainsi la famille L_t, $t \in R$ est une courbe continue dans l'ensemble des feuilletages Lagrangiens. On en déduit la conclusion de la proposition. □

Corollaire 64. *Les hypothèses sont celles de* Proposition 63. *Si la structure bi-Lagrangigenne* (L, JL) *est affinement plate alors pour tout couple* (t, t') *de nombres réels* $(L_t, L_{t'})$ *est affinement plat.*

Esquisse de preuve du corollaire. Soit $(x_1,\ldots,x_m, y_1,\ldots,y_m)$ un système de coordonnées de Darboux-Hess de (L, JL). Ceci signifique entre autres que si X_i est le champ de vecteurs hamiltonien de la fonction y_i alors JX_i est le champ de vecteurs hamiltonien de la fonction x_i. Alors les fonctions locales

$$\left(\frac{1}{t' - t}[y_1 + t'x_1, \ldots, y_m + t'x_m], y_1 + tx_1, \ldots, y_m + tx_m\right)$$

est un système de coordonnées de Darboux-Hess de $(L_t, L_{t'})$.

Une autre digression non discuté ici est la méthode BKS (Blackner-Kostant-Stenberg) d'utilissation des structures bi-Lagrangiennes pour construire des fibrés en droites complexes utiles à la pré-quantification géométrique [58]. □

L'auteur remercie James Stasheff d'avoir attiré son attention sur les relations étroites entre les travaux de Blaszack et Marciniak sur réduction de Dirac des structures de Poisson [8] et la KV cohomologie des algébroides de Koszul-Vinberg, [39]. Il se sent redevable envers le referee des critiques et des remarques qui lui ont été fort utiles. Il lui en sait gré.

Références

[1] J. Amorós, M. Burger, K. Corlette, D. Kotschick and D. Toledo : Fundamental Groups of Compact Kähler Manifolds, Mathematical Surveys and Monographs **44**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.

[2] A. Tralle and W. Andrzejewski : *On solvmanifolds and a conjecture of Benson and Gordon from the Hamiltonian viewpoint*, J. Lie Theory **8** (1998), 279-292.

[3] D. Arapura : *Kähler solvmanifolds*, Int. Math. Res. Not. **3** (2004), 131-137.

[4] M.F. Atiyah : *Complex analytic connections in fibre bundles*, Trans. Amer. Math. Soc. **85** (1957), 181-207.

[5] C. Benson and C.S. Gordon : *Kähler and symplectic structures on nilmanifolds*, Topology **27** (1988), 513-518.

[6] C. Benson and C.S. Gordon : *Kähler structures on compact solvmanifolds*, Proc. Amer. Math. Soc. **108** (1990), 971-980.

[7] A.L. Besse : Einstein Manifolds, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) **10**, Springer, Berlin, 1987.

[8] M. Błaszak and K. Marciniak : *Dirac reduction of dual Poisson-presymplectic pairs*, J. Phys. A **37** (2004), 5173-5187.

[9] A. Borel : *Kählerian coset spaces of semisimple Lie groups*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **40** (1954), 1147-1151.

[10] Y. Carrière : *Autour de la conjecture de L. Markus sur les variétés affines*, Invent. Math. **95** (1989), 615-628.

[11] L.A. Cordero, M. Fernández and A. Gray : *Symplectic manifolds with no Kähler structure*, Topology **25** (1986), 375-380.

[12] P. Deligne, P. Griffiths, J, Morgan and D. Sullivan : *Real homotopy theory of Kähler manifolds*, Invent. Math. **29** (1975), 245-274.

[13] J. Dorfmeister : *Homogeneous Kähler manifolds admitting a transitive solvable group of automorphisms*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **18** (1985), 143-180.

[14] J. Dorfmeister and K. Nakajima : *The fundamental conjecture for homogeneous Kähler manifolds*, Acta Math. **161** (1988), 23-70.

[15] K. Erdmann and S. Salamon : *Private communication*.

[16] M. Fernández, M.J. Gotay and A. Gray : *Compact parallelizable four-dimensional symplectic and complex manifolds*, Proc. Amer. Math. Soc. **103** (1988), 1209-1212.

[17] D. Fried, W. Goldman and M.W. Hirsch : *Affine manifolds with nilpotent holonomy*, Comment. Math. Helv. **56** (1981), 487-523.

[18] S.G. Gindikin, I.I. Pjateckiĭ-Šapiro and É.B. Vinberg : *Homogeneous Kähler manifolds*; in Geometry of Homogeneous Bounded Domains, Centro Internazionale Matematico Estivo. III ciclo, Urbino **3**, Ed. Cremonese, Rome, 1968, 3-87.

[19] S.G. Gindikin, I.I. Pjateckiĭ-Šapiro and È. B. Vinberg : *On classification and canonical realization of complex homogeneous bounded domains*, Trudy Moskov. Mat. Obšč. **13** (1964), 340-403.

[20] J. Hano : *On Kaehlerian homogeneous spaces of unimodular Lie groups*, Amer. J. Math. **79** (1957), 885-900.

[21] K. Hasegawa : *A note on compact solvmanifolds with Kähler structures*, Osaka J. Math. **43** (2006), 131-135.

[22] A. Hattori : *Spectral sequence in the de Rham cohomology of fibre bundles*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I **8** (1960), 289-331.

[23] H. Hess : *Connections on symplectic manifolds and geometric quantization* ; in Differential Geometrical Methods in Mathematical Physics (Proc. Conf., Aix-en-Provence/Salamanca, 1979), Lecture Notes in Math. **836**, Springer, Berlin, 1980, 153-166.

[24] D.L. Johnson : *Kähler submersions and holomorphic connections*, J. Differential Geom. **15** (1980), 71-79.

[25] D.L. Johnson and L.B. Whitt : *Totally geodesic foliations*, J. Differential Geom. **15** (1980), 225-235.

[26] W. Kaup : *Hyperbolische komplexe Räume*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **18** (1968), 303-330.

[27] H. Kim : *Complete left-invariant affine structures on nilpotent Lie groups*, J. Differential Geom. **24** (1986), 373-394.

[28] J.-L. Koszul : *Variétés localement plates et convexité*, Osaka J. Math. **2** (1965), 285-290.

[29] J.-L. Koszul : *Déformations de connexions localement plates*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **18** (1968), 103-114.

[30] J.-L. Koszul : *Homologie des complexes de formes différentielles d'ordre supérieur*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **7** (1974), 139-153.

[31] A. Lichnérowicz : *Sur les groupes d'automorphismes de certaines variétés kähleriennes*, C.R. Acad. Sci. Paris **239** (1954), 1344-1346.

[32] D. McDuff : *The moment map for circle actions on symplectic manifolds*, J. Geom. Phys. **5** (1988), 149-160.

[33] D. McDuff : *Examples of simply-connected symplectic non-Kählerian manifolds*, J. Differential Geom. **20** (1984), 267-277.

[34] J. Marsden and A. Weinstein : *Reduction of symplectic manifolds with symmetry*, Rep. Mathematical Phys. **5** (1974), 121-130.

[35] Y. Matsushima : *Sur les espaces homogènes kählériens d'un groupe de Lie réductif*, Nagoya Math. J. **11** (1957), 53-60.

[36] J. Milnor : *On fundamental groups of complete affinely flat manifolds*, Advances in Math. **25** (1977), 178-187.

[37] M.N. Boyom : *Métriques kählériennes affinement plates de certaines variétés symplectiques*, I, Proc. London Math. Soc. (3) **66** (1993), 358-380.

[38] M.N. Boyom : *Structures localement plates dans certaines variétés symplectiques*, Math. Scand. **76** (1995), 61-84.

[39] M.N. Boyom : *KV-cohomology of Koszul-Vinberg algebroids and Poisson manifolds*, Internat. J. Math. **16** (2005), 1033-1061.

[40] M.N. Boyom : *The cohomology of Koszul-Vinberg algebras*, Pacific J. Math. **225** (2006), 119-153.

[41] M.N. Boyom : *Some Lagrangian invariants of symplectic manifolds* ; in Geometry and Topology of Manifolds, Banach Center Publ. **76**, Polish Acad. Sci., Warsaw, 2007, 515-525.

[42] M.N. Boyom and R.A. Wolak : *Affine structures and KV-cohomology*, J. Geom. Phys. **42** (2002), 307-317.

[43] M.N. Boyom and R. Wolak : *Local structure of Koszul-Vinberg and of Lie algebroids*, Bull. Sci. Math. **128** (2004), 467-479.

[44] A. Nijenhuis : *Sur une classe de propriétés communes à quelques types différents d'algèbres*, Enseignement Math. (2) **14** (1968), 225-277.

[45] K. Nomizu : *On the cohomology of compact homogeneous spaces of nilpotent Lie groups*, Ann. of Math. (2) **59** (1954), 531-538.

[46] A. Tralle and J. Oprea : Symplectic Manifolds with no Kähler Structure, Lecture Notes in Math. **1661**, Springer, Berlin, 1997.

[47] M.S. Raghunathan : Discrete Subgroups of Lie Groups, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete **68**, Springer, New York, 1972.

[48] H. Shima : *Homogeneous Hessian manifolds*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **30** (1980), 91-128.

[49] H. Shima : The Geometry of Hessian Structures, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2007.

[50] S. Smeĭl : *Differentiable dynamical systems*, Proc. Intern. Congr. Math. (1966), 25-28.

[51] J. Stasheff : *Other relations*, private communication.

[52] W.P. Thurston : *Some simple examples of symplectic manifolds,* Proc. Amer. Math. Soc. **55** (1976), 467-468.
[53] A. Tralle and J. Kedra : *Compact completely solvable Kähler solvmanifolds are tori,* Internat. Math. Res. Notices **15** (1997), 727-732.
[54] J. Vey : *Une notion d'hyperbolicité sur les variétés localement plates,* C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **266** (1968), 622-624.
[55] È.B. Vinberg and S.G. Gindikin : *Kähler manifolds admitting a transitive solvable group of automorphisms,* Mat. Sb. (N.S.) **74** (**116**) (1967), 357-377.
[56] A. Weinstein : *Symplectic manifolds and their Lagrangian submanifolds,* Advances in Math. **6** (1971), 329-346.
[57] J.A. Wolf : Spaces of Constant Curvature, McGraw-Hill, New York, 1967.
[58] N.M.J. Woodhouse : Geometric Quantization, Oxford Mathematical Monographs **2**, Oxford Univ. Press, New York, 1994.

Departement de Mathématiques
UMR CNRS 5149
Université de Montpellier 2
Place E. Bataillon, Montpellier
France
e-mail: boyom@darboux.math.univ-montp2.fr