Derrab, F. and Nabaji, A.
Osaka J. Math.
42 (2005), 653–675

SOLUTIONS HOLOMORPHES LOCALE ET GLOBALE POUR UN OPÉRATEUR DIFFÉRENTIEL LINÉAIRE À PLUSIEURS VARIABLES FUCHSIENNES

FAIZA DERRAB and ABDALLAH NABAJI

(Reçu le January 6, 2004)

Abstract

We consider linear partial differential equations with several Fuchsian variables in the sense of M.S. Baouendi and C. Goulaouic [1]. For a holomorphic Fuchsian operator with holomorphic Fuchsian principal part, we prove existence and uniqueness of a holomorphic local solution. Our theorem generalizes the results of ([3, 1, 11]), precises the one of [4] and reduces the proof of their theorems to the proof of the fixed-point theorem. For a holomorphic Fuchsian operator with constant Fuchsian principal part, we establish the existence and uniqueness of a holomorphic global solution. Our aim is to simplify its proof. The methods of proof are based on the application of the fixed-point theorem in some Banach spaces defined by majorant functions that are suitable to this kind of equations.

Introduction

Le présent article concerne l'étude des équations aux dérivées partielles Fuchsiennes dans le sens de M.S. Baouendi et C. Goulaouic [1], qui sont une extension naturelle des équations différentielles ordinaires avec des singularités régulières en un point.

Ce type d'équations a été considéré par Y. Hasegawa [3], où elle donne une condition nécessaire et suffisante pour que le problème de Cauchy d'ordre m, associé à un opérateur de type de Fuchs de poids $(m-1)$, admette une solution analytique réelle au voisinage de l'orine de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Les résultats de M.S. Baouendi et C. Goulaouic [1], généralisent ceux de Y. Hasegawa à un problème de Cauchy, associé à des opérateurs différentiels de type de Fuchs de poids $(m-k) \in \mathbb{N}$, à données initiales portées par une hypersurface caractéristique. Ils utilisent les techniques du théorème d'Ovsjannikov, pour donner des conditions nécessaires et suffisantes sur l'existence et l'unicité d'une solution analytique au voisinage de l'origine de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

M. Terbeche [11], a repris les résultas de M.S. Baouendi et C. Goulaouic dans le cas holomorphe. Il donne [12] une formulation géométrique du problème en le transformant d'un opérateur holomorphe de poids quelconque à un opérateur holomotphe de

2000 *Mathematics Subject Classification* : Primary: 35A07, 35A05; Secondary: 35A20, 35G05.

poids zéro. L'auteur utilise une méthode d'approximations successives comme dans le théorème d'Ovsjannikov [5] et, la convergence de son shéma est obtenue en utilisant la méthode des fonctions majorantes donnée par C. Wagschal [14].

N.S. Madi [4], généralise les résultats de ([3, 1, 11]) à un problème de Goursat associé à un opérateur holomorphe de type de Fuchs, plus général que ceux considérés dans les travaux précédents. A l'aide d'un changement d'inconnue, il transforme son opérateur holomorphe Fuchsien de poids quelconque à un opérateur holomorphe Fuchsien de poids zéro. Il démontre l'existence et l'unicité d'une solution $u(t,x)$ holomorphe au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}_t^q \times \mathbb{C}_x^n$. Il utilise la méthode des approximations successives et pour montrer la convergence de sa solution, il utilise la technique du théorème d'Ovsjannikov.

Dans [9], P. Pongérard étudie une équation de Fuchs d'ordre m, non linéaire. La première partie de cette étude est faite au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}_t^q \times \mathbb{C}_x^n$ sous deux conditions: la première est une condition de Poincarré lorsque $q = 1$ ou $m = 1$ et la seconde est une condition spectrale. L'auteur montre l'existence et l'unicité d'un solution holomorphe locale. Il introduit une nouvelle fonction majorante construite à partir de celle de [15] et utilise le théorème du point fixe. Dans la seconde partie, il étudie la même équations au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}_t^q \times \mathbb{R}_x^n$, lorsque les hypothèses d'holomorphie par rapport à x sont remplaçées par des hypothèses de régularités Gevrey. L'auteur adapte le formalisme développé par C. Wagshal dans [15] pour déduire de la première partie une généralisation dans les espaces de Gevrey.

P. Pongérard et C. Wagschal [7], ont simplifié la demonstrations des résultants de [6] et [13] sur l'existence et l'unicité globales de la solution du problème de Cauchy linéaire non caractéristique, dans la classe de fonctions entières, à celle du théorème du point fixe dans un espace de Banach défini par des fonctions majorantes introduites dans [8].

Dans [10], P. Pongérard étend les conclusions de [7] à un opérateur Fuchsien d'ordre m et de poids $p \in [0,m]$, dont la partie principale Fuchsienne est à coefficients constants. Il généralise ainsi les résultats de H. Yamane [16], ces derniers ne coincident par avec ceux de [7] lorsque $p = m$. La méthode de P. Pongérard est basée sur l'application du théorème du point fixe dans un espace de Banach construit avec une fonction majorante à deux variables. Dans une première étape, il montre l'existence et l'unicité d'une solution $u(t,x)$ holomorphe dans $\Omega \times \mathbb{C}_x^n$, où Ω est un voisinage ouvert de $t = 0$. Puis, afin de prolonger le domaine de convergence de sa solution à $\mathbb{C}_t \times \mathbb{C}_x^n$, il fait une étude au voisinage du point $t \neq 0$ où il utilise le résultat de [7] pour un problème de Cauchy-Kowalevski à coefficients holomorphes dans $\mathbb{C}_t^* \times \mathbb{C}_x^n$. Finalement, il déduit son résultat par un raisonnement utilisant le principe du prolongement analytique.

Dans la première partie de ce travail, on reprend le résultat de [4]. On établit l'existence et l'unicité d'un solution holomorphe au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}_t^q \times \mathbb{C}_x^n$. Notre but essentiel est de simplifier la démonstration du résultat de N.S. Madi, ainsi que ceux de ([3, 1, 11]), à celle du théorème du point fixe dans un espace de Banach qui sera défini par l'intermédiaire d'une fonction majorante.

Dans la seconde partie, on établit l'existence et l'unicité globales d'une solution holomorphe. Afin détablir que notre problème est bien posé, nous avons considéré un opérateur Fuchsien d'ordre m et de poids $\mu \leq m$, dont la partie principale Fuchsienne est à coefficients constants. Nos deux objets dans cette deuxième partie, sont la simplification de la démonstration donnée par P. Pongérard dans [10] et, la généralisation de son résultat à un opérateur différentiel à plusieurs variables Fuchsiennes. La démarche suivie est celle de ([7, 9, 10, 15]), qui consiste à ramener l'étude de notre problème à la recherche d'un point fixe d'une certaine application. Nous construisons ensuite un espace de Banach, moyennant une fonction majorante, où l'application considérée est strictement contractante dans une boule de cet espace.

1. Solution holomorphe au voisinage de l'origine

1.1. Formulation du problème et résultat. Soient n, q deux entiers naturels non nuls.

- Pour un multi-indice $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_q) \in \mathbb{N}^q$, on note $\gamma! = (\gamma_1)! \ldots (\gamma_q)!$ et on appelle longueur de γ l'entier $|\gamma| = \gamma_1 + \ldots + \gamma_q$. Pour deux multi-indices $\gamma, \beta \in \mathbb{N}^q$, on écrit $\gamma \leq \beta$ si $\gamma_i \leq \beta_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, q\}$ et $\gamma < \beta$ si ($\gamma \leq \beta$ et $\gamma \neq \beta$). On pose $\mathbb{1} = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{N}^q$.
- Pour $t = (t_1, \ldots, t_q) \in \mathbb{C}^q$, on note $t^\gamma = t_1^{\gamma_1} \ldots t_q^{\gamma_q}$ et $D_t^\gamma = D_{t_1}^{\gamma_1} \ldots D_{t_q}^{\gamma_q}$ où D_{t_i} est l'opérateur de dérivation par rapport à la variable t_i et on pose $tD_t = (t_1 D_1, \ldots, t_q D_{t_q})$.
- De même, pour un multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ et pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, on note $D_x^\alpha = D_{x_1}^{\alpha_1} \ldots D_{x_n}^{\alpha_n}$ où D_{x_j} est la dérivée par rapport à la variable x_j.
- Soit $\gamma \in \mathbb{N}^q$. Pour une fonction $f(t, x)$ holomorphe, la notation $f = \mathcal{O}(t^\gamma)$ signifie que $f(t, x)/t^\gamma$ est bornée lorsque t tend vers 0. Ce qui est équivaut à dire qu'il existe une fonction $f^*(t, x)$ holomorphe telle que: $f(t, x) = t^\gamma f^*(t, x)$.

Soit $m = (m_1, \ldots, m_q) \in \mathbb{N}^q$, on suppose qu'il existe $i \in \{1, \ldots, q\}$ tel que $m_i \geq 1$. Étant donné $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_q) \in \mathbb{N}^q$ tel que $\mu \leq m$; on considère un opérateur différentiel linéaire défini par

$$a(t, x, D_t) = \sum_{\mu \leq \gamma \leq m} a_\gamma(t, x) t^{\gamma - \mu} D_t^\gamma$$

où les coefficients $a_\gamma(t, x)$ sont des fonctions holomorphes au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}_t^q \times \mathbb{C}_x^n$.

En faisant un déveleppement de Taylor à l'ordre un de $a_\gamma(t, x)$ en $(t, x) = (0, 0)$, on écrit:

$$a_\gamma(t, x) = a_\gamma(0, 0) + \sum_{i=1}^{q} t_i b_\gamma^{(i)}(t, x) + \sum_{j=1}^{n} x_j T_\gamma^{(j)}(t, x)$$

où $b_\gamma^{(i)}$ et $T_\gamma^{(j)}$ sont des fonctions holomorphes au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}_t^q \times \mathbb{C}_x^n$. On pose

$$b(t, D_t) = \sum_{\mu \le \gamma \le m} a_\gamma(0,0) t^{\gamma-\mu} D_t^\gamma.$$

On associe à l'opérateur $b(t, D_t)$ le polynôme d'indéterminée $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_q) \in \mathbb{C}^q$ à coefficients constants, défini par:

$$\mathcal{P}(\lambda) = \sum_{\mu \le \gamma \le m} a_\gamma(0,0) C_\gamma(\lambda)$$

où on pose $C_\gamma(\lambda) = \prod_{i=1}^q C_{\gamma_i}(\lambda_i)$ et on définit $C_{\gamma_i}(\lambda_i) = \prod_{j=0}^{\gamma_i - 1}(\lambda_i - j)$ si $\gamma_i \neq 0$ et, on convient que $C_0(\lambda_i) = 1$.

On obtient la relation

$$t^\mu b(t, D_t) = \sum_{\mu \le \gamma \le m} a_\gamma(0,0) t^\gamma D_t^\gamma = \mathcal{P}(tD_t).$$

Nous ferons l'hypothèse suivante:

$$\text{(1)} \qquad \exists c_0 > 0; \qquad \forall \lambda \in \mathbb{N}^q, \qquad \lambda \ge \mu, \qquad |\mathcal{P}(\lambda)| \ge c_0 \max(1, |\lambda|^{|m|}).$$

Pour tout multi-indice $\gamma \in \mathbb{N}^q$, on note $\nu = \nu(\gamma) = \max(\mu - \gamma - \mathbb{1}, 0)$ où on convient de noter

$$\max(\mu - \gamma - \mathbb{1}, 0) = (\max(\mu_1 - \gamma_1 - 1, 0), \dots, \max(\mu_q - \gamma_q - 1, 0)).$$

On considère le problème de Goursat:

(2)
$$\begin{cases} a(t,x,D_t)u(t,x) = \sum_{\gamma < m} \sum_{|\alpha| \le |m| - |\gamma|} t^{\nu + \mathbb{1} + \gamma - \mu} a_{\gamma,\alpha}(t,x) D_t^\gamma D_x^\alpha u(t,x) + f(t,x), \\ u(t,x) - w(t,x) = \mathcal{O}(t^\mu) \end{cases}$$

où les coefficients $a_{\gamma,\alpha}(t,x)$ sont des fonctions holomorphes au voisonage de l'origine de $\mathbb{C}_t^q \times \mathbb{C}_x^n$.

On a alors le théorème suivant:

Théorème 1.1. *Si $\mathcal{P}$ satisfait à la condition* (1); *alors pour toutes fonctions f et w holomorphes au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}_t^q \times \mathbb{C}_x^n$, le problème* (2) *admet une unique solution holomorphe au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}_t^q \times \mathbb{C}_x^n$.*

1.2. Réduction du problème. On cherche une solution du problème (2) sous la forme $w(t,x) + t^\mu u(t,x)$ et on utilise la relation

$$t^\mu b(t, D_t)(t^\mu u) = \mathcal{P}(tD_t)(t^\mu u) = t^\mu \mathcal{P}(tD_t + \mu) u,$$

le problème de Goursat (2) est alors équivalent à la seule équation

$$\tag{3} \begin{aligned} \mathcal{P}(tD_t)u = &- \sum_{\mu\le\gamma\le m}\left[\sum_{i=1}^{q} t_i b_\gamma^{(i)}(t,x) + \sum_{j=1}^{n} x_j T_\gamma^{(j)}(t,x)\right] t^{\gamma-\mu} D_t^\gamma (t^\mu u) \\ &+ \sum_{\gamma<m} \sum_{|\alpha|\le|m|-|\gamma|} t^{\mu+\mathbb{1}+\gamma-\mu} a_{\gamma,\alpha}(t,x) D_t^\gamma (t^\mu D_x^\alpha u) + v \end{aligned}$$

où les coefficients $b_\gamma^{(i)}$, $T_\gamma^{(j)}$ et $a_{\gamma,\alpha}$ ne changent pas, v est une fonction holomorphe au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}_t^q \times \mathbb{C}_x^n$ et $\mathcal{P}$ est un polynôme de degré m tel euq, d'aprés (1), il vérifie:

$$\tag{4} |\mathcal{P}(\lambda)| \ge c_0 \max(1, |\lambda|^{|m|}) \qquad \text{pour tout } \lambda \in \mathbb{N}^q.$$

On rappelle le lemma 1.2 de [9]:

Lemme 1.2 ([9]). *Soit D un polydisque ouvert centré à l'origine de $\mathbb{C}_t^q \times \mathbb{C}_x^n$. L'opérateur $\mathcal{P}(tD_t)$ est un automorphisme de l'espace vectoriel des fonctions holomorphes dans D et, son inverse $\mathcal{P}^{-1}$ est défini par*:

$$\tag{5} (\mathcal{P}^{-1}u)(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{N}^q} \frac{t^k}{k!} \frac{D_t^k u(0,x)}{\mathcal{P}(k)}.$$

Preuve. Soit u une fonction holomorphe dans D.

Sachant que $(tD_t)^\gamma t^k = k^\gamma t^k$ pour tout $k, \gamma \in \mathbb{N}^q$, on déduit que

$$(\mathcal{P}(tD_t)u)(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{N}^q} \frac{t^k}{k!} \mathcal{P}(k) D_t^k u(0,x)$$

dans D, ce qui montre que $\mathcal{P}(tD_t)$ est injectif car $\mathcal{P}(k) \ne 0$ d'aprés (4).

Son inverse est donné par la série formelle

$$(\mathcal{P}^{-1}(u))(t,x) = \sum_{(k,\alpha)\in\mathbb{N}^q\times\mathbb{N}^n} \frac{D_t^k D_x^\alpha u(0,0)}{k!\,\alpha!\,\mathcal{P}(k)} t^k x^\alpha$$

qui est comme la série de Taylor de u en $(t,x) = (0,0)$, absolument convergente pour tout $(t,x) \in D$, puisque $|1/\mathcal{P}(k)| \le 1/c_0$. □

En remplaçant u par $\mathcal{P}^{-1}(u)$; l'équation (3) se réduit à l'équation

$$\tag{6} u = \mathcal{L}u + v$$

où $\mathcal{L}u = Au + Bu + Fu$ et les opérateurs A, B, F sont définis respectivement par:

$$Au = -\sum_{\mu \le \gamma \le m} \left[\sum_{i=1}^{q} t_i b_\gamma^{(i)}(t,x) \right] t^{\gamma-\mu} D_t^\gamma (t^\mu \mathcal{P}^{-1}(u)),$$

$$Bu = -\sum_{\mu \le \gamma \le m} \left[\sum_{j=1}^{n} x_j T_\gamma^{(j)}(t,x) \right] t^{\gamma-\mu} D_t^\gamma (t^\mu \mathcal{P}^{-1}(u)),$$

$$Fu = \sum_{\gamma < m} \sum_{|\alpha| \le |m| - |\gamma|} t^{\nu+\mathbb{1}+\gamma-\mu} a_{\gamma,\alpha}(t,x) D_t^\gamma (t^\mu D_x^\alpha \mathcal{P}^{-1}(u)).$$

Le Théorème 1.1 résulte de la proposition suivante:

Proposition 1.3. *Si $\mathcal{P}$ satisfait à la condition* (4), *alors pour toute fonction v holomorphe au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}_t^q \times \mathbb{C}_x^n$; l'équation* (6) *admet une unique solution holomorphe au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}_t^q \times \mathbb{C}_x^n$.*

La résolution de l'équation (6) revient à la recherche des points fixes de l'application $u \mapsto \mathcal{L}u + v$. Ceci nous emmène à introduire un espace de Banach associé à une certaine fonction majorante, oú on établira que cette application est strictement contractante dans une boule de cet espace, afin d'appliquer le théorème du point fixe de Banach.

1.3. Espaces de Banach. Si $\Phi \in \mathbb{R}_+\{t,x\}$ est une série entière convergente à coefficients positifs ou unls, donc une fonction majorante; rappelons [15] que le sons-espace vectoriel fonctions holomorphes au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}_t^q \times \mathbb{C}_x^n$:

$$\{u \in \mathbb{C}\{t,x\};\ \exists c \ge 0,\ \ u \ll c\Phi\}$$

est un espace de Banach pour la norme

$$\min\{c \ge 0,\ \ u \ll c\Phi\}.$$

En s'inspirant des séries formelles introduites dans [10], ou considère la série formelle $\Phi_R(\sigma,\xi) \in \mathbb{R}_+\{\sigma,\xi\}$ définie par

$$\Phi_R(\sigma,\xi) = \sum_{p=0}^{+\infty} \sigma^p \frac{D^{sp}\phi_R(\xi)}{(sp)!},$$

où s est un entier $\ge 2\,|m|$, $\sigma = t_1 + \ldots + t_q$, $\xi = x_1 + \ldots + x_n$, $R > 0$ et ϕ_R est la fonction majorante définie par:

$$\phi_R(\xi) = \frac{1}{R - \xi};\quad R > 0.$$

La série $\Phi_R(\sigma,\xi)$ converge, d'aprés les inègalitès de Cauchy, pour $|\sigma| < r^s$ et $|\xi| < R-r$ pour tout $r \in]0,R[$, soit pour $|\sigma|^{1/s}+|\xi| < R$. Cette série est donc convergente et il s'agit bien d'une fonction majorante. l'espace et la norme qui lui sont associés seront notés respectivement par $\mathcal{C}^{\omega}_{\Phi_R}$ et $\|\ \|$.

Note. On notera c toute constante qui ne dépend pas de R.

On rappelle la proposition 3.1 de [14]:

Lemme 1.4. *Pour tout $R > 0$ et tout $i, j \in \mathbb{N}$ on a*:

$$D^i\phi_R(\xi) \ll \frac{i!}{(i+j)!}R^j D^{i+j}\phi_R(\xi).$$

Preuve. On a $1 \ll R/(R-\xi)$, d'où

$$D^i\phi_R(\xi) \ll \frac{R}{R-\xi}D^i\phi_R(\xi) = \frac{R}{i+1}D^{i+1}\phi_R(\xi). \qquad \square$$

On rappelle le Lemme 1.5 et le Lemme 1.7 de [10] adaptés à la fonction majorante $\Phi_R(\sigma,\xi)$:

Lemme 1.5. *Pour tout $0 < R \leq 1$, on a*:
1. $\eta R/(\eta R-(\sigma+\xi))\Phi_R(\sigma,\xi) \ll \eta/(\eta-1)\Phi_R(\sigma,\xi)$, *pour tout* $\eta > 1$.
2. $1/(R-(\sigma+\xi)) \ll \Phi_R(\sigma,\xi)$.

Preuve. 1. En posant $\theta_k = (1/k!)(\eta R/(\eta R-(.)))$ et $a_k = D^k\phi_R/k!$, la majoration demandée s'écrit $\sum_{k=0}^{p}\theta_k a_{sp-sk} \ll \eta/(\eta-1)a_{sp}$. On remarque que $\sum_{k=0}^{p}\theta_k a_{sp-sk} \ll \sum_{k=0}^{sp}\theta_k a_{sp-sk}$. D'aprés le Lemma 1.4 (pour $i = sp-sk$ et $j = (s-1)k \in \mathbb{N}$ car $s \geq 2|m| \geq |m| \geq 1$), on obtient: $D^{sp-sk}\phi_R/(sp-sk)! \ll R^{(s-1)k}(D^{sp-k}\phi_R/(sp-k)!)$. Vu que $R^{(s-1)k} \leq 1$ pour $0 < R \leq 1$; on déduit que $a_{sp-sk} \ll a_{sp-k}$ et par conséquent on a $\sum_{k=0}^{p}\theta_k a_{sp-sk} \ll \sum_{k=0}^{sp}\theta_k a_{sp-k}$.

On rappelle (proposition 6.1 de [2]), que si $\phi \in \mathbb{R}_+\{\xi\}$ vérifie $0 \ll (R-\xi)\phi(\xi)$, alors on a

$$\frac{\eta R}{\eta R-\xi}\phi \ll \frac{\eta}{\eta-1}\phi, \qquad \text{pour tout } \eta > 1.$$

En dérivant cette formule à l'ordre (sp), on trouve bien l'inégalité voulue.
2. On a

$$\frac{1}{R-(\sigma+\xi)} = \phi_R(\sigma+\xi) = \sum_{p=0}^{+\infty}\sigma^p\frac{D^p\phi_R(\xi)}{p!}.$$

On utilise le Lemma 1.4, (pour $i = p$ et $j = (s-1)p$), on obtient

$$\frac{D^p\phi_R}{p!} \ll R^{(s-1)p}\frac{D^{sp}\phi_R}{(sp)!} \ll \frac{D^{sp}\phi_R}{(sp)!}, \qquad \text{car } R^{(s-1)p} \leq 1 \text{ pour } 0 < R \leq 1.$$

D'où, $1/(R-(\sigma+\xi)) \ll \sum_{p=0}^{+\infty} \sigma^p (D^{sp}\phi_R/(sp)!) = \Phi_R(\sigma,\xi)$. □

Pour tout $R > 0$, on notera D_R le polydisque ouvert centré à l'origine de $\mathbb{C}_t^q \times \mathbb{C}_x^n$

(7) $$D_R = \left\{(t,x) \in \mathbb{C}_t^q \times \mathbb{C}_x^n;\ \max_{1\leq i\leq q}|t_i| < R,\ \max_{1\leq j\leq n}|x_j| < R\right\}.$$

Soit $\eta > 1$ fixé:

Fixons $R_0 \in]0,1]$ tel que les fonctions $b_\gamma^{(i)}, T_\gamma^{(i)}$ et $a_{\gamma,\alpha}$ soient holomorphes et bornées, dans le polydisque $D_{\eta R_0}$, respectivement par:

$$M_1(\eta,R_0) = \max_{\substack{\mu\leq\gamma\leq m\\ 1\leq i\leq q}} \sup_{D_\eta R_0}\left|b_\gamma^{(i)}\right|; \quad M_2(\eta,R_0) = \max_{\substack{\mu\leq\gamma\leq m\\ 1\leq j\leq n}} \sup_{D_\eta R_0}\left|T_\gamma^{(j)}\right|;$$

$$M_3(\eta,R_0) = \max_{\substack{\gamma<m\\ |\alpha|\leq|m|-|\gamma|}} \sup_{D_\eta R_0}|a_{\gamma,\alpha}|.$$

D'aprés les inègalitès de Cauchy, on a pour tout $0 < R < R_0$;

(8) pour $(\gamma < m,\ |\alpha| \leq |m|-|\gamma|)$; $$t^\nu a_{\gamma,\alpha} \ll (\eta R)^{|\nu|} M_3(\eta,R_0)\frac{\eta R}{\eta R-(\sigma+\xi)},$$

(9) pour $(\mu \leq \gamma \leq m,\ 1 \leq j \leq n)$; $$b_\gamma^{(i)} \ll M_1(\eta,R_0)\frac{\eta R}{\eta R-(\sigma+\xi)},$$

(10) pour $(\mu \leq \gamma \leq m,\ 1 \leq j \leq n)$; $$T_\gamma^{(j)} \ll M_2(\eta,R_0)\frac{\eta R}{\eta R-(\sigma+\xi)}.$$

On contrôle maintenant la norme de $\mathcal{L}u$ dans l'espace de Banach $\mathcal{C}_{\Phi_R}^\omega$.

Proposition 1.6. *L'opérateur $\mathcal{L}$ induit un endomorphisme continu de l'espace de Banach $\mathcal{C}_{\Phi_R}^\omega$ dont la norme est inférieure ou égale à cR pour tout $R \in]0,R_0[$, où c est une constante positive indépendante de R.*

Preuve. Soit $R \in]0,R_0[$ et soit $u \in \mathcal{C}_{\Phi_R}^\omega$.

On a d'aprés (5),

$$t^{\gamma-\mu}D_t^\gamma(t^\mu D_x^\alpha \mathcal{P}^{-1}(u))(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{N}^q}\frac{D_x^\alpha D_t^k u(0,x)}{\mathcal{P}(k)k!}t^{\gamma-\mu}D_t^\gamma(t^{\mu+k}).$$

Donc,

(11) $$t^{\gamma-\mu}D_t^\gamma(t^\mu D_x^\alpha \mathcal{P}^{-1}(u))(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{N}^q}\frac{D_x^\alpha D_l^k u(0,x)}{\mathcal{P}(k)k!}C_\gamma(\mu+k)t^k,$$

où $C_\gamma(\mu+k) = (\mu+k)!/(\mu+k-\gamma)!$ si $\mu+k \geq \gamma$ et $C_\gamma(\mu+k) = 0$ sinon.

Or, $u \ll \|u\|\Phi_R(\sigma,\xi)$, donc

$$D_x^\alpha D_t^k u(0,x) \ll \|u\| D_x^\alpha D_t^k \Phi_R(\sigma,\xi)|_{t=0}$$

et comme

$$D_x^\alpha D_t^k \Phi_R(\sigma,\xi)|_{t=0} = |k|! \frac{D^{s|k|+|\alpha|}\phi_R(\xi)}{(s\,|k|!)},$$

alors

$$D_x^\alpha D_t^k u(0,x) \ll \|u\|\,|k|! \frac{D^{s|k|+|\alpha|}\phi_R(\xi)}{(s\,|k|!)}. \tag{12}$$

En reportant (12) dans (11), on obtient pour $\mu+k \geq \gamma$:

$$t^{\gamma-\mu} D_t^\gamma (t^\mu D_x^\alpha \mathcal{P}^{-1}(u))(t,x) \ll \|u\| \sum_{k\in\mathbb{N}^q} \frac{t^k\,|k|!}{|\mathcal{P}(k)|\,k!} C_\gamma(\mu+k) \frac{D^{s|k|+|\alpha|}\phi_R(\xi)}{(s\,|k|)!}. \tag{13}$$

—*Majoration de la norme de l'opérateur F*:

Soient $\gamma \in \mathbb{N}^q$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tels que $\gamma < m$ et $|\alpha| \leq |m| - |\gamma|$.

On a $|\alpha| \leq |m| \leq 2\,|m| \leq s \leq sq$, on applique le Lemma 1.4, (pour $i = s\,|k| + |\alpha|$ et $j = sq - |\alpha|$), on obtient

$$D^{s|k|+|\alpha|}\phi_R(\xi) \ll R^{sq-|\alpha|} \frac{(s\,|k| + |\alpha|)!}{[s(q+|k|)]!} D^{s(q+|k|)}\phi_R(\xi).$$

Vu que $|k|+q = |k+\mathbb{1}|$, alors en reportant la dernière majoration dans (13), on obtient

$$\begin{aligned} &t^{\gamma-\mu} D_t^\gamma (t^\mu D_x^\alpha \mathcal{P}^{-1}(u))(t,x) \\ &\ll \|u\|\, R^{sq-|\alpha|} \sum_{k\in\mathbb{N}^q} \frac{t^k\,|k|!}{k!} \frac{(s\,|k|+|\alpha|)! C_\gamma(\mu+k)}{(s\,|k|)!\,|\mathcal{P}(k)|} \frac{D^{s(|k+\mathbb{1}|)}\phi_R(\xi)}{[s(|k+\mathbb{1}|)]!}. \end{aligned}$$

Comme pour $\mu+k \geq \gamma$; $C_\gamma(\mu+k) = \prod_{i=1}^q \prod_{j=0}^{\gamma_i-1} (\mu_i + k_i - j) \leq (|\mu| + |k|)^{|\gamma|}$ alors, en utilisant (4) et sachant que $|\alpha| \leq |m| - |\gamma|$; il existe $c = c(|m|\,,|\mu|) \geq 0$ tel que

$$\frac{(s\,|k|+|\alpha|)!}{(s\,|k|)!} \frac{C_\gamma(\mu+k)}{|\mathcal{P}(k)|} \leq (s\,|k| + |m|)^{|\alpha|} \frac{(|\mu|+|k|)^{|\gamma|}}{c_0 \max(1,|k|^{|m|})} \leq c.$$

On déduit que

$$t^{\gamma-\mu} D_t^\gamma (t^\mu D_x^\alpha \mathcal{P}^{-1}(u))(t,x) \ll c\,\|u\|\, R^{sq-|\alpha|} \sum_{k\in\mathbb{N}^q} \frac{t^k\,|k|!}{k!} \frac{D^{s(|k+\mathbb{1}|)}\phi_R(\xi)}{[s(|k+\mathbb{1}|)]!}.$$

En posant $\mathcal{N}_{(\gamma,\alpha)}u = t^{\mathbb{1}+\gamma-\mu} D_t^\gamma (t^\mu D_x^\alpha \mathcal{P}^{-1}(u))$, on obtient

$$\begin{aligned}(\mathcal{N}_{(\gamma,\alpha)}u)(t,x) &\ll c\,\|u\|\,R^{sq-|\alpha|} \sum_{k\in\mathbb{N}^q} \frac{t^{k+\mathbb{1}}\,|k|!}{k!} \frac{D^{s(|k+\mathbb{1}|)}\phi_R(\xi)}{[s(|k+\mathbb{1}|)]!} \\ &= c\,\|u\|\,R^{sq-|\alpha|} \sum_{k\in\mathbb{N}^q, k\leq \mathbb{1}} \frac{t^k\,|k-\mathbb{1}|!}{(k-\mathbb{1})!} \frac{D^{s(|k+\mathbb{1}|)}\phi_R(\xi)}{(s\,|k|)!}.\end{aligned}$$

Étant donné que $k!/k'! \leq |k!|/|k'|!$ pour tour $k, k' \in \mathbb{N}^q$ tels que $k \geq k'$; alors en particulier on a

$$\frac{|k-\mathbb{1}|!}{(k-\mathbb{1})!} \leq \frac{|k|!}{k!} \qquad \text{pour tour } k \geq \mathbb{1}, \tag{14}$$

d'où,

$$\begin{aligned}(\mathcal{N}_{(\gamma,\alpha)}u)(t,x) &\ll c\,\|u\|\,R^{sq-|\alpha|} \sum_{k\in\mathbb{N}^q, k\leq \mathbb{1}} \frac{t^k}{k!}\,|k|!\,\frac{D^{s|k|}\phi_R(\xi)}{(s\,|k|)!} \\ &= c\,\|u\|\,R^{sq-|\alpha|} \sum_{p\geq q} p!\,\frac{D^{sp}\phi_R(\xi)}{(sp)!} \sum_{k\in\mathbb{N}^q, |k|=p} \frac{t^k}{k!}.\end{aligned}$$

Or,

$$\sum_{k\in\mathbb{N}^q, |k|=p} \frac{t^k}{k!} = \frac{\left(\sum_{i=1}^q t_i\right)^p}{p!} = \frac{\sigma^p}{p!},$$

d'où,

$$\begin{aligned}(\mathcal{N}_{(\gamma,\alpha)}u)(t,x) &\ll c\,|u|\,R^{sq-|\alpha|} \sum_{p\geq q} \sigma^p \frac{D^{sp}\phi_R(\xi)}{(sp)!} \\ &\ll c\,|u|\,R^{sq-|\alpha|}\Phi_R(\sigma,\xi).\end{aligned}$$

En combinant cette majoration avec (8) et en utilisant le Lemma 1.5-1, on obtient

$$t^\nu(a_{\gamma,\alpha}(\mathcal{N}_{(\gamma,\alpha)}u))(t,x) \ll c\frac{\eta^{|\nu|+1}}{\eta-1} M_3(\eta, R_0)\,\|u\|\,R^{|\nu|+sq-|\alpha|}\Phi_R(\sigma,\xi).$$

Ainsi, il existe une condtante $c > 0$ indépendante de R telle que, pour tout $0 < R < R_0 \leq 1$;

$$\begin{aligned}(Fu)(t,x) &= \sum_{\gamma<m} \sum_{|\alpha|\leq|m|-|\gamma|} t^\nu(a_{\gamma,\alpha}(\mathcal{N}_{(\gamma,\alpha)}u))(t,x) \\ &\ll c\frac{\eta^{|\nu|+1}}{\eta-1} M_3(\eta, R_0)\,\|u\|\,R^{|\nu|+sq-|m|}\Phi_R(\sigma,\xi).\end{aligned}$$

Donc, l'opérateur F induit bien une application linéaire continue de $\mathcal{C}^{\omega}_{\Phi_R}$ dans $\mathcal{C}^{\omega}_{\Phi_R}$ et

$$\|F\|_{\mathcal{L}\left(\mathcal{C}^{w}_{\Phi_R},\mathcal{C}^{\omega}_{\Phi_R}\right)} \leq cR^{|\nu|+sq-|m|} \leq cR$$

puisque $0 < R < 1$, $\nu \geq 0$ et $sq \geq s \geq 2\,|m| > |m|$.

—*Majoration des normes des opérateurs A et B*:

Soit $\gamma \in \mathbb{N}^q$ tel que $\gamma < m$. D'aprés la majoration (13) ($\alpha = 0$), on a

$$t^{\gamma-\mu} D_t^{\gamma}(t^{\mu}\mathcal{P}^{-1}(u))(t,x) \ll \|u\| \sum_{k\in\mathbb{N}^q} \frac{t^k\,|k|!}{k!}\frac{C_\gamma(\mu+k)}{|\mathcal{P}(k)|}\frac{D^{s|k|}\phi_R(\xi)}{(s\,|k|)!}. \tag{15}$$

D'une part, en appliquant le Lemma 1.4, (pour $i = s\,|k|$ et $j = s$), on obtient

$$\frac{D^{s|k|}\phi_R(\xi)}{(s\,|k|)!} \ll R^s \frac{D^{s(|k|+1)}\phi_R(\xi)}{[s(|k|+1)]!}.$$

Vu (4) et comme $|\gamma| \leq |m|$, alors il existe $c = c(|m|\,, |\mu|) \geq 0$ tel que:

$$\frac{C_\gamma(\mu+k)}{|\mathcal{P}(k)|} \leq \frac{(|\mu|+|k|)^{|\gamma|}}{c_0 \max(1, |k|^{|m|})} \leq c, \tag{16}$$

ainsi, d'aprés (15) on écrit

$$\begin{aligned} t^{\gamma-\mu} D_t^{\gamma}(t^{\mu}\mathcal{P}^{-1}(u))(t,x) &\ll c\,\|u\|\,R^s \sum_{k\in\mathbb{N}^q} \frac{t^k}{k!}\,|k|!\frac{D^{s(|k|+1)}\phi_R(\xi)}{[s(|k|+1)]!} \\ &= c\,\|u\|\,R^s \sum_{p\in\mathbb{N},\,p=|k|} \frac{\left(\sum_{i=1}^q t_i\right)^p}{p!}\,p!\frac{D^{s(p+1)}\phi_R(\xi)}{[s(p+1)]!} \\ &= c\,\|u\|\,R^s \sum_{p\in\mathbb{N}} \sigma^p \frac{D^{s(p+1)}\phi_R(\xi)}{[s(p+1)]!}. \end{aligned}$$

En combinant cette majoration avec (9), on obtient pour tout $0 < R < R_0 \leq 1$;

$$\begin{aligned} &\left[\sum_{i=1}^q t_i b_\gamma^{(i)}(t,x)\right] t^{\gamma-\mu}(D_t^{\gamma} t^{\mu}\mathcal{P}^{-1}(u))(t,x) \\ &\ll c\,\|u\|\,R^s \left(\sum_{i=1}^q t_i\right) M_1(\eta, R_0)\frac{\eta R}{\eta R-(\sigma+\xi)} \sum_{p\in\mathbb{N}} \sigma^p \frac{D^{s(p+1)}\phi_R(\xi)}{[s(p+1)]!} \\ &= cM_1(\eta, R_0)\,\|u\|\,R^s \frac{\eta R}{\eta R-(\sigma+\xi)} \sum_{p\in\mathbb{N}} \sigma^{p+1} \frac{D^{s(p+1)}\phi_R(\xi)}{[s(p+1)]!} \\ &\ll cM_1(\eta, R_0)\,\|u\|\,R^s \frac{\eta R}{\eta R-(\sigma+\xi)} \Phi_R(\sigma,\xi) \end{aligned}$$

et d'aprés le Lemma 1.5-1, il existe une constante $c > 0$ indépendante de R telle que

$$(Au)(t,x) = -\sum_{\mu\leq\gamma\leq m}\left[\sum_{i=1}^{q} t_i b_\gamma^{(i)}(t,x)\right] t^{\gamma-\mu}(D_t^\gamma t^\mu \mathcal{P}^{-1}(u))(t,x)$$
$$\ll c\frac{\eta}{\eta-1}M_1(\eta,R_0)\,\|u\|\,R^s\,\Phi_R(\sigma,\xi).$$

Donc, l'opérateur A induit bien un endomorphisme continu de l'espace $\mathcal{C}^\omega_{\Phi_R}$ et

$$\|A\|_{\mathcal{L}\left(\mathcal{C}^\omega_{\Phi_R},\mathcal{C}^\omega_{\Phi_R}\right)} \leq cR^s \leq cR$$

puisque $0 < R < 1$ et $s \geq 2\,|m| > 0$.

D'autre part, en reportant (16) dans (15), on obtient:

$$t^{\gamma-\mu}D_t^\gamma(t^\mu\mathcal{P}^{-1}(u))(t,x) \ll c\,\|u\|\sum_{k\in\mathbb{N}^q}\frac{t^k}{k!}\,|k|!\,\frac{D^{s|k|}\phi_R(\xi)}{(s\,|k|)!}$$
$$= c\,\|u\|\sum_{p\in\mathbb{N}}\sigma^p\,\frac{D^{sp}\phi_R(\xi)}{(sq)!}$$
$$= c\,\|u\|\,\Phi_R(\sigma,\xi).$$

En combinant cette majoration avec (10) et en utilisant le Lemma 1.5-1, on obtient pour tout $R\in\,]0,R_0[$;

$$\left[\sum_{j=1}^{n} x_j T_\gamma^{(j)}(t,x)\right] t^{\gamma-\mu}D_t^\gamma(t^\mu\mathcal{P}^{-1}(u))(t,x)$$
$$\ll c\,\|u\|\,n(\eta R)M_2(\eta,R_0)\frac{\eta R}{\eta R-(\sigma+\xi)}\Phi_R(\sigma,\xi)$$
$$\ll c\frac{n\eta^2}{\eta-1}M_2(\eta,R_0)\,\|u\|\,R\Phi_R(\sigma,\xi).$$

Ainsi, il existe une constante $c > 0$ indépendante de R telle que

$$(Bu)(t,x) = -\sum_{\mu\leq\gamma\leq m}\left[\sum_{j=1}^{n} x_j T_\gamma^{(j)}(t,x)\right] t^{\gamma-\mu}D_t^\gamma(t^\mu\mathcal{P}^{-1}(u))(t,x)$$
$$\ll c\frac{n\eta^2}{\eta-1}M_2(\eta,R_0)\,\|u\|\,R\Phi_R(\sigma,\xi).$$

Donc, B est un opérateur linéaire et continu de $\mathcal{C}^\omega_{\Phi_R}$ dans $\mathcal{C}^\omega_{\Phi_R}$, de norme $\leq cR$.

Comme $\mathcal{L} = A + B + F$, on déduit le résultat voulu. $\square$

1.4. Preuve de la Proposition 1.3. Supposons que la fonction v est holomorphe et bornée dans D_{R_0}. D'aprés les inégalités de Cauchy, on a pour tout $0 < R < R_0$;

$$v \ll c\frac{R}{R-(\sigma+\xi)}, \qquad \text{oú} \quad c = \sup_{D_{R_0}} |v| .$$

D'aprés le Lemma 1.5-2, on obtient pour tout $R \in]0, R_0[$; $v \ll cR\Phi_R(\sigma, \xi)$ et donc $v \in \mathcal{C}^{\omega}_{\Phi_R}$.

On définit l'application $\mathcal{H}\colon u \mapsto \mathcal{L}u + v$, on pose $b = 2\,\|v\|$ et on note $B(0,b)$ la boule fermée de centre 0 et de rayon b de $\mathcal{C}^{\omega}_{\Phi_R}$; $B(0,b) = \left\{u \in \mathcal{C}^{\omega}_{\Phi_R};\ \|u\| \le b\right\}$.

D'aprés la Proposition 1.6, $\mathcal{H}u \in \mathcal{C}^{\omega}_{\Phi_R}$ pour tout $u \in \mathcal{C}^{\omega}_{\Phi_R}$ et

$$\|\mathcal{H}u\| \le cR\,\|u\| + \|v\| ,$$
$$\forall u, u' \in \mathcal{C}^{\omega}_{\Phi_R}, \quad \left\|\mathcal{H}u - \mathcal{H}u'\right\| \le cR\left\|u - u'\right\| .$$

Pour tout $0 < R < R_0 \le 1$ suffisemment petit pour que $cR < 1/2$, on a pour tout $u \in B(0,b)$;

$$\|\mathcal{H}u\| \le \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}b = b$$

et

$$\forall u, u' \in B(0,b); \quad \left\|\mathcal{H}u - \mathcal{H}u'\right\| \le \frac{1}{2}\left\|u - u'\right\| .$$

Donc, pour tout $0 < R < R_0 \le 1$ suffisemment petit; $\mathcal{H}(B(0,b)) \subset B(0,b)$ et $\mathcal{H}$ est une contraction stricte de la boule $B(0,b)$ de $\mathcal{C}^{\omega}_{\Phi_R}$. D'aprés le théorème du point fixed de Banach; $\mathcal{H}$ admet un unique point fixe dans $\mathcal{C}^{\omega}_{\Phi_R}$, qui est donc une solution de l'équation (6) dans $\mathcal{C}^{\omega}_{\Phi_R}$. Cette solution est donc holomorphe au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^q_t \times \mathbb{C}^n_x$, d'où le théorème d'existence.

On a également l'unicité, en effet: si u et u' sont deux fonctions holomorphes au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^q_t \times \mathbb{C}^n_x$ et solutions de l'équation (6), alors d'aprés les inégalités de Cauchy et le Lemma 1.5-2, (en raisonnant comme pour la fonction v), on obtient: $u(t,x) \ll c_1 R\Phi_R(\sigma, \xi)$ et $u'(t,x) \ll c_2 R\Phi_R(\sigma, \xi)$, pour tout $R > 0$ suffisemment petit, (où c_1, c_2 sont des constantes positives). En particulier, on peut choisir $R \in]0, R_0[$ tel que $c_i R \le b$ (pour $i = 1, 2$) et tel que $cR < 1/2$, pour que $\mathcal{H}$ soit une contraction stricte de la boule $B(0,b)$ de $\mathcal{C}^{\omega}_{\Phi_R}$. u et u' sont donc deux points fixes de $\mathcal{H}$ et ceci prouve que $u = u'$.

On déduit alors l'existence et l'unicité d'une solution holomorphe au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^q_t \times \mathbb{C}^n_x$. □

2. Solution holomorphe globale

2.1. Formulation du problème et résultat. Dans cette partie, on considère les mêmes notations de la Section 1.1 et on suppose que l'opérateur différentiel $a(t, x, D_t)$ est à coefficients constants, on note

$$a(t, D_t) = \sum_{\mu \le \gamma \le m} a_\gamma t^{\gamma-\mu} D_t^\gamma$$

où a_γ, pour $\mu \le \gamma \le m$, sont des nombres complexes avec $a_m \ne 0$. m et μ sont toujours deux multi-indices de $\mathbb{N}^q$ donnés tels que: il existe $i \in \{1, \dots, q\}$ avec $m_i \ge 1$, (donc $|m| \ge 1$) et $\mu \le m$.

On considère le problème de Goursat:

$$(17) \qquad \begin{cases} a(t, D_t)u(t, x) = \displaystyle\sum_{\gamma < m} \sum_{|\alpha| \le |m| - |\gamma|} t^{\nu + \mathbb{1} + \gamma - \mu} a_{\gamma,\alpha}(t, x) D_t^\gamma D_x^\alpha u(t, x) + f(t, x), \\ u(t, x) - w(t, x) = \mathcal{O}(t^\mu) \end{cases}$$

où $(t, x) \in \mathbb{C}_t^q \times \mathbb{C}_x^n$.

$a(t, D_t)$ est donc une partie principale Fuchsienne d'order m et de poids μ.

On suppose que les coefficients $a_{\gamma,\alpha}$ vérifient l'hypothèse suivante:

(18)
- pour $|\gamma| + |\alpha| < |m|$; $a_{\gamma,\alpha}$ est une fonction holomorphe dans $\mathbb{C}_t^q \times \mathbb{C}_x^n$
- pour $|\gamma| + |\alpha| = |m|$; $a_{\gamma,\alpha}$ est un polynôme en x de degrè $\le |\alpha|$, dont les coefficients sont des fonctions holomorphes dans $\mathbb{C}_t^q$.

On associe à l'opérateur $a(t, D_t)$ son polynôme caractéristique

$$\mathcal{P}(\lambda) = \sum_{\mu \le \gamma \le m} a_\gamma C_\gamma(\lambda).$$

De même en notant $tD_t = (t_1 D_{t_1}, \dots, t_q D_{t_q})$, on obtient la relation

$$t^\mu a(t, D_t) = \sum_{\mu \le \gamma \le m} a_\gamma t^\gamma D_t^\gamma = \mathcal{P}(tD_t).$$

Nous ferons l'hypothèse suivante:

$$(19) \qquad \exists c_0 > 0; \qquad \forall \lambda \in \mathbb{N}^q,\ \lambda \ge \mu, \qquad |\mathcal{P}(\lambda)| \ge c_0 \max(1, |\lambda|^{|m|+1}),$$

on obtient alors le théorème suivant:

Théorème 2.7. *Pour toutes fonctions f et w holomorphes dans $\mathbb{C}_t^q \times \mathbb{C}_x^n$; le problème de Goursta* (17) *admet une unique solution holomorphe dans $\mathbb{C}_t^q \times \mathbb{C}_x^n$.*

2.2. Réduction du problème. On procède de la même manière que dans le paragraphe 1.2, en cherchant une solution du problème (17) sous la forme $w(t, x) + t^{\mu}u(t, x)$ et en utilisant la relation: $t^{\mu}a(t, D_t)(t^{\mu}u) = \mathcal{P}(tD_t)(t^{\mu}u) = t^{\mu}\mathcal{P}(tD_t + \mu)u$; alors le problème (17) se réduit à la seule équation

$$\mathcal{P}(tD_t)u = \sum_{\gamma<m}\sum_{|\alpha|\leq|m|-|\gamma|} t^{\nu+\mathbb{1}+\gamma-\mu}a_{\gamma,\alpha}(t,x)D_t^{\gamma}(t^{\mu}D_x^{\alpha}u) + v, \tag{20}$$

où les coefficients $a_{\gamma,\alpha}$ ne changent pas et vérifient toujours l'hypothèse (18), v est une fonction holomorphe dans $\mathbb{C}_t^q \times \mathbb{C}_x^n$ et, $\mathcal{P}(tD_t)$ est une partie principale Fuchsienne d'ordre m et de poids nul qui vérifie d'aprés (19):

$$|\mathcal{P}(\lambda)| \geq c_0 \max(1, |\lambda|^{|m|+1}) \qquad \text{pour tour} \quad \lambda \in \mathbb{N}^q. \tag{21}$$

On peut étendre la preuve de Lemme 1.2 à la classe de fonctions holomorphes dans $\mathbb{C}_t^q \times \mathbb{C}_x^n$, on obtient

Lemme 2.8. *L'opérateur $\mathcal{P}(tD_t)$ est un automorphisme de l'espace vectoriel des fonctions holomorphes dans $\mathbb{C}_t^q \times \mathbb{C}_x^n$. Son inverse $\mathcal{P}^{-1}$ est défini par* (5).

En remplaçant u par $\mathcal{P}^{-1}(u)$ dans l'équation (20), elle serait équivalence à l'équation réduite:

$$u = \mathcal{F}u = \mathcal{H}u + v \tag{22}$$

où $\mathcal{H}$ est l'opérateur linéaire défini par

$$\mathcal{H}u = \sum_{\gamma<m}\sum_{|\alpha|\leq|m|-|\gamma|} t^{\nu+\mathbb{1}+\gamma-\mu}a_{\gamma,\alpha}(t,x)D_t^{\gamma}(t^{\mu}D_x^{\alpha}\mathcal{P}^{-1}(u)). \tag{23}$$

Le théorème 2.7 découle de la proposition suivante:

Proposition 2.9. *Pour toute fonction v holomorphe dans $\mathbb{C}_t^q \times \mathbb{C}_x^n$; l'équation* (22) *admet une unique solution u holomorphe dans $\mathbb{C}_t^q \times \mathbb{C}_x^n$.*

Comme dans la première partie, la preuve de cette proposition repose sur le théorème du point fixe dans un espace de Banach associé à une fonction majorante.

2.3. Espaces de Banach. Étant donné $R > 0$, on considère une fonction majorante de la forme $\Phi_{\rho,\rho R}(\sigma, \xi)$ où $\Phi_{\rho,\rho R}(\sigma, \xi) \in \mathbb{R}_+\{\sigma, \xi\}$, ρ est un paramètre > 0, $\sigma = t_1 + \ldots + t_q$ et $\xi = x_1 + \ldots + x_n$. Étant donné toujours l'entier $s \geq 2|m|$ et

$s' = s - 1 \geq 0$, on pose:

$$\Phi_{\rho,\rho R} = \Phi_{\rho,\rho R}(\sigma,\xi) = \sum_{p=0}^{+\infty} (\rho.\sigma)^p (\rho R)^{s'p} \frac{D^{sp}\phi_{\rho R}(\rho.\xi)}{(sp)!}, \tag{24}$$

où $\phi_{\rho R}$ est la fonction majorante introduite dans [7],

$$\phi_{\rho R}(\xi) = e^{\xi} \frac{1}{\rho R - \xi}.$$

La série formelle $\Phi_{\rho,\rho R}(\sigma,\xi)$ converge, d'aprés les inégalités de Cauchy, pour $\rho\,|\sigma| < r^s/(\rho R)^{s'}$ et $\rho\,|\xi| < \rho R - r$ pour tour $r \in\,]0, \rho R[$. Soit pour $(\rho R)^{s'/s}(\rho\,|\sigma|^{1/s}) + \rho\,|\xi| < \rho R$, donc pour $R^{s'/s}\,|\sigma|^{1/s} + |\xi| < R$, (car $s' = s - 1$).

La série formelle (24) est donc bien de la forme voulue et cette série entière est convergente. On lui associe l'espace de Banach (voir [15]), noté

$$\mathcal{C}^{\omega}_{\rho,R}(D_R) = \{u \in \mathbb{C}\{t,x\};\ \exists c \geq 0,\ \ u \ll c\Phi_{\rho,\rho R}\},$$

où D_R est le polydisque ouvert de $\mathbb{C}^q_t \times \mathbb{C}^n_x$ défini par (7). La plus petite constante $c \geq 0$ telle que $u \ll c\Phi_{\rho,\rho R}$ est une norme de l'espace de Banach $\mathcal{C}^{\omega}_{\rho,R}(D_R)$ qu'on note $\|\ \|$.

Une fonction u qui appartient à l'espace $\mathcal{C}^{\omega}_{\rho,R}(D_R)$ est donc holomorphe dans D_R.

NOTE. On notera c toute constante qui ne dépend pas des paramètres R et ρ.

On rappelle le Lemma 1.4, le Lemma 1.5 et le Lemma 1.7 de [10] en les adaptant à la fonction majorante $\phi_{\rho R}$ et à la série formelle $\Phi_{\rho,\rho R}$:

Lemme 2.10. *Pour tout* $R, \rho > 0$, *on a*:

1. $D^i\phi_{\rho R} \ll D^{i+j}\phi_{\rho R}$, *pour tout* $i, j \in \mathbb{N}$,
2. $D^i\phi_{\rho R} \ll i!/(i+j)!(\rho R)^j D^{i+j}\phi_{\rho R}$, *pour tout* $i, j \in \mathbb{N}$,
3. $\eta\rho R/(\eta\rho R - (\rho.\sigma + \rho.\xi))\Phi_{\rho,\rho R}(\sigma,\xi) \ll (\eta/(\eta-1))\Phi_{\rho,\rho R}(\sigma,\xi)$, *pour tout* $\eta > 1$,
4. $1/(\rho R - (\rho.\sigma + \rho.\xi)) \ll \Phi_{\rho,\rho R}(\sigma,\xi)$.

Quant au second membre v, nous utiliserons le

Lemme 2.11. *Soit* v *une fonction holomorphe dans* $\mathbb{C}^q_t \times \mathbb{C}^n_x$; *alors pour tout* $R > 0$ *fixé et* $\rho > 0$, *on a* $v \in \mathcal{C}^{\omega}_{\rho,R}(D_R)$ *et* $||v|| \leq \rho R M_v(R)$, *où* $M_v(R) = \sup_{D_R}|v|$.

Preuve. Soit $R > 0$ fixé. Soient v une fonction holomorphe dans $\mathbb{C}^q_t \times \mathbb{C}^n_x$ et $\rho > 0$. D'aprés les inègalitès de Cauchy, on a:

$$v(t,x) \ll M_v(R)\frac{R}{R-\sigma}.\frac{R}{R-\xi}$$

$$
\begin{aligned}
&= M_v(R)\ \frac{\rho R}{\rho R - \rho.\sigma}\cdot\frac{\rho R}{\rho R - \rho.\xi} \\
&\ll M_v(R)\frac{\rho R}{\rho R - (\rho.\sigma + \rho.\xi)} \\
&= (\rho R) M_v(R)\frac{1}{\rho R - (\rho.\sigma + \rho.\xi)}.
\end{aligned}
$$

En appliquant le Lemme 2.10-4, on déduit que $v(t,x) \ll (\rho R)M_v(R)\Phi_{\rho,\rho R}(\sigma,\xi)$. Donc, $v \in \mathcal{C}^{\omega}_{\rho,R}(D_R)$ et $\|v\| \leq (\rho R)M_v(R)$. □

On contrôle maintenant la norme de $\mathcal{F}u$ dans l'espace de Banach $\mathcal{C}^{\omega}_{\rho,R}(D_R)$.

Soient $R \geq 1$ et $\eta > 1$ fixés:

Considèrons $\rho \geq 1$ et soit $(\gamma,\alpha) \in \mathbb{N}^q \times \mathbb{N}^n$.

• Pour $|\gamma| + |\alpha| = |m|$, d'aprés (18) on écrit $a_{\gamma,\alpha}(t,x) = \sum_{|\beta|\leq|\alpha|} a_{\gamma,\alpha,\beta}(t)x^{\beta}$, où $a_{\gamma,\alpha,\beta}$ est holomorphe dans $\mathbb{C}^q_t$. On note $\triangle_R = \left\{t \in \mathbb{C}^q_t;\ \max_{1\leq i\leq q}|t_i| < R\right\}$ et on pose: $K(\eta,R) = \max_{(\gamma,\alpha,\beta)\in\mathcal{E}} \sup_{\triangle_{\eta R}} \left|a_{\gamma,\alpha,\beta}\right|$, où

$$\mathcal{E} = \{(\gamma,\alpha,\beta) \in \mathbb{N}^q \times \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n;\ |\gamma| + |\alpha| = |m|,\ \ \gamma < m,\ \ |\beta| \leq |\alpha|\}.$$

D'aprés les inégalités de Cauchy, on a

$$a_{\gamma,\alpha,\beta} \ll K(\eta,R)\frac{\eta R}{\eta R - \sigma} = K(\eta,R)\frac{\eta\rho R}{\eta\rho R - \rho.\sigma}$$

et

$$x^{\beta} \ll (\eta R)^{|\beta|}\frac{\eta\rho R}{\eta\rho R - \rho.\xi}.$$

On obtient donc

$$
\begin{aligned}
t^{\nu}a_{\gamma,\alpha} &= \sum_{|\beta|\leq|\alpha|} t^{\nu}a_{\gamma,\alpha,\beta}(t)x^{\beta} \\
&\ll K(\eta,R)\left(\sum_{|\beta|\leq|\alpha|}(\eta R)^{|\nu|+|\beta|}\right)\frac{\eta\rho R}{\eta\rho R - (\rho.\sigma + \rho.\xi)}.
\end{aligned}
\tag{25}
$$

• Pour $|\gamma| + |\alpha| < |m|$, on pose: $M(\eta,R) = \max_{\substack{|\gamma|+|\alpha|<|m| \\ \gamma<m}} \sup_{D_{\eta R}} \left|a_{\gamma,\alpha}\right|$. D'aprés les inégalités de Cauchy, on obtient

$$t^{\nu}a_{\gamma,\alpha} \ll (\eta R)^{|\nu|}M(\eta,R)\frac{\eta\rho R}{\eta\rho R - (\rho.\sigma + \rho.\xi)}. \tag{26}$$

Proposition 2.12. *L'opérateur $\mathcal{H}$, défini par* (23), *induit un endomorphisme continu de l'espace de Banach $\mathcal{C}^{\omega}_{\rho,R}(D_R)$ dont la norme est majorée par $c\rho^{-1}L(\eta,R)R^{|\nu|+q}$,* *où c est une constante positive indépendante de R et de ρ et, $L(\eta, R)$ est une constante qui ne dépend que des bornes supérieures des fonctions $a_{\gamma,\alpha}$ et $a_{\gamma,\alpha,\beta}$, respectivent dans $D_{\eta R}$ et $\triangle_{\eta R}$.*

Preuve. Soit $u \in \mathcal{C}^{\omega}_{\rho,R}(D_R)$. On a, (formule (11)),

$$t^{\gamma-\mu} D_t^{\gamma}(t^{\mu} D_x^{\alpha} \mathcal{P}^{-1}(u))(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{N}^q} \frac{D_x^{\alpha} D_t^k u(0,x)}{\mathcal{P}(k)k!} C_{\gamma}(\mu+k) t^k$$

et la majoration

$$D_x^{\alpha} D_t^k u(0,x) \ll \|u\| \, D_x^{\alpha} D_t^k \Phi_{\rho,\rho R}(\sigma,\xi)|_{t=0}.$$

Comme on peut écrire la série (24) sous la forme

$$\Phi_{\rho,\rho R}(\sigma,\xi) = \sum_{\beta\in\mathbb{N}^q, |\beta|=p} \frac{\rho^{|\beta|}.t^{\beta}}{\beta!} \, |\beta|!(\rho R)^{s'|\beta|} \frac{D^{s|\beta|}\phi_{\rho R}(\rho.\xi)}{(s\,|\beta|)!},$$

alors

$$D_x^{\alpha} D_t^k \Phi_{\rho,\rho R}(\sigma,\xi)|_{t=0} = \rho^{|k|+|\alpha|} \, |k|!(\rho R)^{s'|k|} \frac{D^{s|k|+|\alpha|}\phi_{\rho R}(\rho.\xi)}{(s\,|k|)!},$$

on déduit que

$$D_x^{\alpha} D_t^k u(0,x) \ll \|u\| \, \rho^{|k|+|\alpha|} \, |k|!(\rho R)^{s'|k|} \frac{D^{s|k|+|\alpha|}\phi_{\rho R}(\rho.\xi)}{(s\,|k|)!}$$

et donc, pour $\mu + k \geq \gamma$:

$$\begin{aligned} &t^{\gamma-\mu} D_t^{\gamma}(t^{\mu} D_x^{\alpha} \mathcal{P}^{-1}(u))(t,x) \\ &\ll \|u\| \, \rho^{|\alpha|} \sum_{k\in\mathbb{N}^q} \frac{\rho^{|k|} t^k}{k!} \, |k|!(\rho R)^{s'|k|} \frac{C_{\gamma}(\mu+k)}{|\mathcal{P}(k)|} \frac{D^{s|k|+|\alpha|}\phi_{\rho R}(\rho.\xi)}{(s\,|k|)!}. \end{aligned} \tag{27}$$

—1$^{\text{er}}$ **cas**: $|\gamma| + |\alpha| = |m|$.

On applique le Lemme 2.10-1, (pour $i = s\,|k| + |\alpha|$ et $j = 1$), on obtient

$$D^{s|k|+|\alpha|}\phi_{\rho R} \ll D^{s|k|+|\alpha|+1}\phi_{\rho R}.$$

On a $|\alpha| = |m| - |\gamma| \leq |m| < 2\,|m| \leq s \leq sq$, d'où $sq - (|\alpha| + 1) \in \mathbb{N}$, alors en appliquant le Lemme 2.10-2, (pour $i = s\,|k| + |\alpha| + 1$ et $j = sq - (|\alpha| + 1)$), on obtient

$$D^{s|k|+|\alpha|+1}\phi_{\rho R} \ll (\rho R)^{sq-|\alpha|-1} \frac{(s\,|k| + |\alpha| + 1)!}{[s(q + |k|)]!} D^{s(q+|k|)}\phi_{\rho R}.$$

Sachant que $|k| + q = |k + \mathbb{1}|$, alors en combinant ces deux dernières majorations on obtient:

$$D^{s|k|+|\alpha|}\phi_{\rho R} \ll (s\,|k| + |\alpha| + 1)!(\rho R)^{sq-|\alpha|-1}\frac{D^{s(|k+\mathbb{1}|)}\phi_{\rho R}}{[s(|k+\mathbb{1}|)]!}.$$

Ainsi, en posant $\mathcal{N}_{(\gamma,\alpha)}u = t^{\mathbb{1}+\gamma-\mu}D_t^{\gamma}(t^{\mu}D_x^{\alpha}\mathcal{P}^{-1}(u))$, on obtient

$$\begin{aligned}&(\mathcal{N}_{(\gamma,\alpha)}u)(t,x)\\ &\ll \|u\|\,\rho^{|\alpha|}\\ &\quad\times\sum_{k\in\mathbb{N}^q}\frac{\rho^{|k|}t^{k+\mathbb{1}}}{k!}\,|k|!(\rho R)^{(s'|k|+sq-|\alpha|-1)}\frac{(s\,|k|+|\alpha|+1)!C_{\gamma}(\mu+|k|)}{(s\,|k|)!\,|\mathcal{P}(k)|}\frac{D^{s(|k+\mathbb{1}|)}\phi_{\rho R}(\rho.\xi)}{[s(|k+\mathbb{1}|)]!}.\end{aligned}$$

En utilisant (21) et comme $|\alpha| + |\gamma| = |m|$; alors il existe $c = c(|m|\,, |\mu|) \geq 0$ tel que

$$\frac{(s\,|k|+|\alpha|+1)!}{(s\,|k|)!}\frac{C_{\gamma}(\mu+k)}{|\mathcal{P}(k)|} \leq (s\,|k|+|m|+1)^{|\alpha|+1}\frac{(|\mu|+|k|)^{|\gamma|}}{c_0\max(1,|k|^{|m|+1})} \leq c,$$

d'où,

$$(\mathcal{N}_{(\gamma,\alpha)}u)(t,x) \ll c\,\|u\|\,\rho^{|\alpha|}\sum_{k\in\mathbb{N}^q}\frac{\rho^{|k|}t^{k+\mathbb{1}}}{k!}\,|k|!(\rho R)^{(s'|k|+sq-|\alpha|-1)}\frac{D^{s(|k+\mathbb{1}|)}\phi_{\rho R}(\rho.\xi)}{[s(|k+\mathbb{1}|)]!}.$$

Comme $s - s' = 1$, alors

$$s'\,|k| + sq = s'(|k| + q) + (s - s')q = s'(|k+\mathbb{1}|) + q,$$

on en déduit que

$$(\mathcal{N}_{(\gamma,\alpha)}u)(t,x) \ll c\,\|u\|\,\rho^{-1}R^{q-|\alpha|-1}\sum_{k\in\mathbb{N}^q}\frac{(\rho.t)^{k+\mathbb{1}}}{k!}\,|k|!(\rho R)^{s'|k+\mathbb{1}|}\frac{D^{s(|k+\mathbb{1}|)}\phi_{\rho R}(\rho.\xi)}{[s(|k+\mathbb{1}|)]!}.$$

En faisant un changement de variables et en utilisant (14), on obtient

$$\begin{aligned}&\sum_{k\in\mathbb{N}^q}\frac{(\rho.t)^{k+\mathbb{1}}}{k!}\,|k|!(\rho R)^{s'|k+\mathbb{1}|}\frac{D^{s(|k+\mathbb{1}|)}\phi_{\rho R}(\rho.\xi)}{[s(|k+\mathbb{1}|)]!}\\ &=\sum_{k\in\mathbb{N}^q,k\geq\mathbb{1}}\frac{(\rho.t)^{k}}{(k-\mathbb{1})!}\,|k-\mathbb{1}|!(\rho R)^{s'|k|}\frac{D^{s|k|}\phi_{\rho R}(\rho.\xi)}{(s\,|k|)!}\\ &\ll\sum_{k\in\mathbb{N}^q,k\geq\mathbb{1}}\frac{(\rho.t)^{k}}{k!}\,|k|!(\rho R)^{s'|k|}\frac{D^{s|k|}\phi_{\rho R}(\rho.\xi)}{(s\,|k|)!}\end{aligned}$$

et comme $\sum_{k\in\mathbb{N}^q,|k|=p}(\rho.t)^k/k! = \left(\rho.\sum_{i=1}^q t_i\right)^p/p! = (\rho.\sigma)^p/p!$, on déduit que

$$\sum_{k\in\mathbb{N}^q}\frac{(\rho.t)^{k+\mathbb{1}}}{k!}|k|!(\rho R)^{s'|k+\mathbb{1}|}\frac{D^{s(|k+\mathbb{1}|)}\phi_{\rho R}(\rho.\xi)}{[s(|k+\mathbb{1}|)]!} \ll \sum_{p\geq q}(\rho.\sigma)^p(\rho R)^{s'p}\frac{D^{sp}\phi_{\rho R}(\rho.\xi)}{(sp)!} \ll \Phi_{\rho,\rho R}(\sigma,\xi). \tag{28}$$

Donc,

$$(\mathcal{N}_{(\gamma,\alpha)}u)(t,x) \ll c\,\|u\|\,\rho^{-1}R^{q-|\alpha|-1}\Phi_{\rho,\rho R}(\sigma,\xi).$$

En combinant cette majoration avec (25) et en utilisant le Lemme 2.10-3, on obtient

$$\sum_{\gamma<m}\sum_{|\alpha|=|m|-|\gamma|}t^{\nu+\mathbb{1}+\gamma-\mu}(a_{\gamma,\alpha}D_t^\gamma(t^\mu D_x^\alpha\mathcal{P}^{-1}(u))(t,x)$$
$$\ll c\rho^{-1}K(\eta,R)\frac{\eta^{|\nu|+|m|+1}}{\eta-1}\|u\|\left(\sum_{(\gamma,\alpha,\beta)\in\mathcal{E}}R^{(q+|\nu|+|\beta|-|\alpha|-1)}\right)\Phi_{\rho,\rho R}(\sigma,\xi).$$

Comme $R\geq 1$, il existe une constante $c\geq 0$ indépendante de ρ et de R telle que

$$\sum_{\gamma<m}\sum_{|\alpha|=|m|-|\gamma|}t^{\nu+\mathbb{1}+\gamma-\mu}(a_{\gamma,\alpha}D_t^\gamma(t^\mu D_x^\alpha\mathcal{P}^{-1}(u))(t,x) \ll c\frac{\eta^{|\nu|+|m|+1}}{\eta-1}\rho^{-1}K(\eta,R)R^{q+|\nu|}\|u\|\,\Phi_{\rho,\rho R}(\sigma,\xi). \tag{29}$$

—2**éme** **cas**: $|\gamma|+|\alpha|<|m|$.

On applique le Lemme 2.10-1, (pour $i = s\,|k|+|\alpha|$ et $j = |m|-(|\gamma|+|\alpha|)$), on obtient

$$D^{s|k|+|\alpha|}\phi_{\rho R} \ll D^{s|k|+(|m|-|\gamma|)}\phi_{\rho R}.$$

On a $|m|-|\gamma|\leq|m|<2|m|\leq s\leq sq$, alors $sq-(|m|-|\gamma|)\in\mathbb{N}$. En appliquant le Lemme 2.10-2, (pour $i = s\,|k|+(|m|-|\gamma|)$ et $j = sq-(|m|-|\gamma|)$), on obtient

$$D^{s|k|+(|m|-|\gamma|)}\phi_{\rho R} \ll (\rho R)^{sq-(|m|-|\gamma|)}\frac{(s\,|k|+(|m|-|\gamma|))!}{[s(q+|k|)]!}D^{s(q+|k|)}\phi_{\rho R},$$

on en déduit que

$$D^{s|k|+|\alpha|}\phi_{\rho R} \ll (s\,|k|+(|m|-|\gamma|))!(\rho R)^{sq-(|m|-|\gamma|)}\frac{D^{s(|k+\mathbb{1}|)}\phi_{\rho R}}{[s(|k+\mathbb{1}|)]!}.$$

En reportant cette majoration dans (27), on obtient

$$
\begin{aligned}
&(\mathcal{N}_{(\gamma,\alpha)}u)(t,x)\\
&\ll \|u\|\,\rho^{|\alpha|}\\
&\times \sum_{k\in\mathbb{N}^q}\frac{\rho^{|k|}t^{k+\mathbb{1}}}{k!}\,|k|!(\rho R)^{(s'|k|+sq-(|m|-|\gamma|))}\frac{(s\,|k|+(|m|-|\gamma|))!C_\gamma(\mu+k)}{(s\,|k|)!\,|\mathcal{P}(k)|}\frac{D^{s(|k+\mathbb{1}|)}\phi_{\rho R}(\rho.\xi)}{[s(|k+\mathbb{1}|)]!}.
\end{aligned}
$$

Comme pour $|\gamma|+|\alpha|<|m|$, on a

$$
\frac{(s\,|k|+(|m|-|\gamma|))!}{(s\,|k|)!}\frac{C_\gamma(\mu+k)}{|\mathcal{P}(k)|}\le (s\,|k|+|m|)^{(|m|-|\gamma|)}\frac{(|\mu|+|k|)^{|\gamma|}}{c_0\max(1,|k|^{|m|+1})}\le c,
$$

alors

$$
\begin{aligned}
&(\mathcal{N}_{(\gamma,\alpha)}u)(t,x)\\
&\ll c\,\|u\|\,\rho^{|\alpha|-q}\sum_{k\in\mathbb{N}^q}\frac{\rho^{|k|+q}t^{k+\mathbb{1}}}{k!}\,|k|!(\rho R)^{(s'|k|+sq-(|m|-|\gamma|))}\,\frac{D^{s(|k+\mathbb{1}|)}\phi_{\rho R}(\rho.\xi)}{[s(|k+\mathbb{1}|)]!}.
\end{aligned}
$$

Sachant que $s'\,|k|+sq=s'(|k+\mathbb{1}|)+q$, on obtient

$$
\begin{aligned}
&(\mathcal{N}_{(\gamma,\alpha)}u)(t,x)\\
&\ll c\,\|u\|\,\rho^{|\alpha|-(|m|-|\gamma|)}R^{q-(|m|-|\gamma|)}\sum_{k\in\mathbb{N}^q}\frac{(\rho t)^{k+\mathbb{1}}}{k!}\,|k|!(\rho R)^{(s'(|k+\mathbb{1}|))}\frac{D^{s(|k+\mathbb{1}|)}\phi_{\rho R}(\rho.\xi)}{[s(|k+\mathbb{1}|)]!}
\end{aligned}
$$

et en utilisant (28), on obtient

$$
(\mathcal{N}_{(\gamma,\alpha)}u)(t,x)\ll c\,\|u\|\,\rho^{|\alpha|-(|m|-|\gamma|)}\;R^{q-(|m|-|\gamma|)}\Phi_{\rho,\rho R}(\sigma,\xi).
$$

Comme $|\gamma|+|\alpha|<|m|$ et $\rho\ge 1$, alors $\rho^{|\alpha|-(|m|-|\gamma|)}\le\rho^{-1}$ et puisque $R\ge 1$, alors

$$
(\mathcal{N}_{(\gamma,\alpha)}u)(t,x)\ll c\,\|u\|\,\rho^{-1}R^q\,\Phi_{\rho,\rho R}(\sigma,\xi).
$$

En combinant cette majoration avec (26) et en utilisant le Lemme 2.10-3, on déduit qu'il existe une constante $c\ge 0$ indépendante de ρ et de R telle que

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\gamma<m}\sum_{|\alpha|<|m|-|\gamma|}t^{\nu+\mathbb{1}+\gamma-\mu}(a_{\gamma,\alpha}D_t^\gamma(t^\mu D_x^\alpha\mathcal{P}^{-1}(u)))(t,x)\\
&\ll c\frac{\eta^{|\nu|+1}}{\eta-1}\rho^{-1}M(\eta,R)R^{q+|\nu|}\,\|u\|\,\Phi_{\rho,\rho R}(\sigma,\xi).
\end{aligned}
\tag{30}
$$

En considèrant $L(\eta,R)=\max(K(\eta,R),M(\eta,R))$, des équations (29) et (30), on déduit le résultat voulu. □

2.4. Preuve de la Proposition 2.9. Soit $R \geq 1$. D'aprés la Proposition 2.12, $\mathcal{H}u \in \mathcal{C}^{\omega}_{\rho,R}(D_R)$ pour tout $u \in \mathcal{C}^{\omega}_{\rho,R}(D_R)$. On choisit $\rho \geq 1$ tel que la norme de $\mathcal{H}$ dans l'espace $\mathcal{L}(\mathcal{C}^{\omega}_{\rho,R}(D_R), \mathcal{C}^{\omega}_{\rho,R}(D_R))$ soit $< 1/2$.

D'aprés le Lemme 2.11, on a $v \in \mathcal{C}^{\omega}_{\rho,R}(D_R)$ et $\|v\| \leq \rho R M_v(R)$. Vu (22), on a $\mathcal{F}u \in \mathcal{C}^{\omega}_{\rho,R}(D_R)$ pour tout $u \in \mathcal{C}^{\omega}_{\rho,R}(D_R)$.

On pose $b_0 = 2\|v\|$ et on note $B(0,b)$ la boule fermée de centre 0 et de rayon b de l'espace $\mathcal{C}^{\omega}_{\rho,R}(D_R)$, où $b \geq b_0$; $B(0,b) = \{u \in \mathcal{C}^{\omega}_{\rho,R}(D_R);\ \|u\| \leq b\}$. On a alors pour tout $u, u' \in B(0,b)$:

$$\|\mathcal{F}u\| \leq \|\mathcal{H}u\| + \|v\| \leq \frac{\|u\|}{2} + \frac{b}{2} \leq b$$

et

$$\left\|\mathcal{F}u - \mathcal{F}u'\right\| \leq \frac{1}{2}\left\|u - u'\right\|.$$

Donc, $\mathcal{F}(B(0,b)) \subset B(0,b)$ et $\mathcal{F}$ est une contraction stricte de la boule $B(0,b)$ de $\mathcal{C}^{\omega}_{\rho,R}(D_R)$ pour tout $b \geq b_0$. D'aprés le théorème du point fixe, $\mathcal{F}$ admet un unique point fixe dans $\mathcal{C}^{\omega}_{\rho,R}(D_R)$, qui est une solution de l'équation (22) dans $\mathcal{C}^{\omega}_{\rho,R}(D_R)$. Cette solution est donc holomorphe dans D_R. Quant à l'unicité, si u et u' sont deux fonctions holomorphes dans D_R et solutions de l'équation (22); des inégalités de Cauchy et du Lemme 2.11, on obtient u, u' appartiennent à $\mathcal{C}^{\omega}_{\rho,r}(D_r)$ pour tout $0 < r < R$. Soit $b \geq \max(b_0, \|u\|, \|u'\|)$; alors $u, u' \in B(0,b) \subset \mathcal{C}^{\omega}_{\rho,r}(D_r)$ pour tout $0 < r < R$. Donc, pour $\rho \geq 1$ assez grand pour que $\mathcal{F}$ soit une contraction stricte de la boule $B(0,b)$ de $\mathcal{C}^{\omega}_{\rho,r}(D_r)$ pour tout $0 < r < R$; u et u' seront deux points fixes de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{C}^{\omega}_{\rho,r}(D_r)$. On déduit que $u = u'$ dans D_r, pour tout $0 < r < R$. Comme D_R est connexe, alors par prolongement analytique on déduit que $u = u'$ dans D_R. Ainsi, l'équation (22) admet une unique solution u holomorphe dans D_R, pour tout $R \geq 1$.

Si $u = u_1$, u est donc l'unique solution de l'équation (22) holomorphe dans D_1. Soit $R \geq 1$, la fonction u_R est holomorphe dans D_R et donc dans D_1 et par unicité de la solution de l'équation (22), on en déduit que $u = u_R$ pour tout $R \geq 1$. Donc, u est holomorphe dans D_R et par suite u est l'unique solution holomorphe de l'équation (22) dans $\mathbb{C}^q_t \times \mathbb{C}^n_x$. □

Références

[1] M.S. Baounendi and C. Goulaouic: *Cauchy problems with caracteristic initial hypersurface*, Comm. on Pure and Appl. Math. **26** (1973), 455–475.

[2] Y. Hamada, J. Leray et C. Wagschal: *Systèmes d'équations aux dérivées partielles à caratéristiques multiples*: *Problème de Cauchy ramifié; hyperbolicité parielle*, J. Math. Pures Appl. **55** (1976), 297–352.

[3] Y. Hasegawa: *On the initial-value problems with data on a double characteristic*, J. Math. Kyoto Univ. **11** (1971), 357–372.

[4] N.S. Madi: *Solutions locales pour des opérateurs holomorphes fuchsiens en plusieurs variables*, Ann. Math. Pura Appl. **163** (1993), 1–15.

[5] L.V. Ovsjannikov: A Singular Operator in a Sale of Banach Spaces, Doklay. **163** (1965).

[6] J. Persson: *On the local and global non-charateristic Cauchy problem when the solutions are holomorphic functions or analytic functionals in space variables*, Ark. Mat. **9** (1971), 171–180.

[7] P. Pongérard et C. Wagschal: *Problème de Cauchy dans des espaces de fonctions entières*, J. Math. Pures et Appl. **75** (1996), 409–418.

[8] P. Pongérard et C. Wagschal: *Ramification non abélienne*, J. Math. Pures et Appl. (1999), 51–88.

[9] P. Pongérard: *Sur une classe d'équations de Fuchs non-linéaires*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **7** (2000), 423–448.

[10] P. Pongérard: *Problème de Cauchy caratéristique à solution entières*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **8** (2001), 89–105.

[11] M. Terbeche: *Necessary and sufficient condition for existence and uniqueness of the solution of Cauchy problem for holomorphic Fuchsian operators*, J. Inequal. Pure Appl. Math. **2**, no. 2, art. 24, (2001), 1–14.

[12] M. Terbeche: *A geometric formulation of the Baouendi-Goulaouic and Hasegawa theorems for holomorphic Fuchsian operators*, Int. J. Appl. Math. **5** (2001), 419–429.

[13] F. Trèves: Linear Partial Differential Equations with Constant Coefficients. Gordon and Break, New York. (1966).

[14] C. Wagschal: *Une généralisation du problème de Goursat pour des Systèmes d'équations intégro-différentielles holomorphes ou partiellement holomorphes*, J. Math. Pures Appl. **53** (1974), 99–131.

[15] C. Wagschal: *Le problème de Goursat non linéaire*, J. Math. Pures Appl. **58** (1979), 309–337.

[16] H. Yamane: *Global Fuchsian Cauchy Problem*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **7** (2000), 147-162.

Faiza Derrab
86, Avenue Lieutenant Khelladi
22000 Sidi-Bel-Abbès, Algérie
e-mail: nouveaucompte2003@yahoo.fr

Abdallah Nabaji
Université Hassan II, FSTD
B.P. 146, Mohammédia, Maroc
e-mail: nabaji@uh2m.ac.ma