OUKA
Osaka University Knowledge Archive

Title	加速度ポテンシャルによる波浪中浮体運動の非線形理論と数値解法の研究
Author(s)	谷澤, 克治
Citation	大阪大学, 1997, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.11501/3132549
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

Osaka University

学位論文

加速度ポテンシャルによる波浪中浮体運動の非線形理論と数値解法の研究

平成9年3月

谷　澤　克　治

目　　次

第 1 章 緒 論 **1**
1.1 緒 言 1
1.2 時間領域における波浪中浮体運動の非線形理論の沿革 2
1.3 本論文の主題と構成 3

第 2 章 流体と浮体の相互作用の非線形理論 **5**
2.1 緒 言 5
2.2 速度場の境界値問題の定式化 6
2.3 理想流体の運動方程式と加速度ポテンシャル 8
2.4 加速度場の境界値問題の定式化 9
2.4.1 物体表面の幾何学的境界条件 9
(1) 物体表面に添って運動する流体の加速度 9
(2) 幾何学的境界条件 10
2.4.2 浮体表面の陰境界条件 11
(1) 浮体の運動方程式 11
(2) 浮体に働く流体力 13
(3) 陰境界条件 14
2.4.3 複数の流体領域が存在する場合への拡張 14
2.4.4 自由表面条件 15
2.5 数値計算に適した加速度場の定式化 15
2.6 結 言 17

第 3 章 時間領域の非線形数値計算法 **18**
3.1 緒 言 18
3.2 速度場および加速度場の境界値問題の数値解法 18
3.2.1 グリーンの式の離散化 18
3.2.2 陰境界条件式の離散化 21
3.2.3 連立方程式の構築 23
3.2.4 複数の流体領域が存在する場合の離散化と連立方程式の構築 25
3.3 流体と浮体運動の時間領域非線形計算法 27
3.3.1 浮体運動の計算 27
(1) 浮体に働く流体力 27
(2) 浮体加速度 27

3.3.2 自由表面波動の計算 . . . 27
3.3.3 自由表面と浮体表面との交線および交点の取り扱い . . . 27
3.4 水槽端および造波機からの反射波防止法 . . . 29
3.5 非線形計算法の手順と時間積分 . . . 30
3.5.1 計算の手順 . . . 30
3.5.2 ルンゲ·クッタ法による時間積分 . . . 30
3.6 結 言 . . . 32

第 4 章 数値計算法の検証 **33**
4.1 緒 言 . . . 33
4.2 保存則による計算精度の検証 . . . 33
4.2.1 理想流体の質量, 運動量, エネルギー保存則と計算精度の検証法 . . . 33
4.2.2 計算精度の検証 . . . 34
(1) 2 次元浮体の自由上下揺の計算 . . . 34
(2) 2 次元浮体の大振幅動揺の計算 . . . 35
(3) 液体貨物を積載する 2 次元浮体の大振幅過渡運動の計算 . . . 36
4.3 減衰領域の性能検証 . . . 36
4.3.1 消波性能 . . . 36
4.3.2 吸収式造波機としての性能 . . . 37
4.4 結 言 . . . 38

第 5 章 数値計算と実験との比較 **39**
5.1 緒 言 . . . 39
5.2 水槽実験の概要 . . . 39
5.2.1 実験施設と供試模型の概要 . . . 39
5.2.2 計測装置および計測項目 . . . 40
5.3 数値計算の概要 . . . 40
5.4 計算結果と実験結果との比較 . . . 41
5.4.1 船体中央浮体の規則波中動揺の計算と実験 . . . 41
(1) 浮体動揺および波浪強制力 . . . 41
(2) 浮体表面の流体圧力 . . . 42
(3) 長周期動揺と入射波との相互作用 . . . 42
(4) 周期的定常状態への収束加速法 . . . 45
5.4.2 船首部浮体の波浪中動揺の計算と実験 . . . 45
(1) 入射波周期の運動 . . . 46
(2) パラメータ振動 . . . 46
(3) パラメータ振動の発生条件 . . . 47
5.5 結言 . . . 50

第 6 章 結 論 **52**

謝 辞 **54**

付 録 **55**
A 加速度場の物体表面境界条件に関する補足 55
A.1 境界条件の直接的導出 55
A.2 $\frac{\partial}{\partial n}(\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2)$ の計算 56
B 物体固定座標系から空間固定座標系への変換 57
C その他の数値計算上のテクニック 58
C.1 Mesh function を用いた節点再配置法 58
C.2 Smoothing spline を用いた平滑化 58
D 反射率の計算法 62

参考文献 **63**

表一覧 **68**

図一覧 **68**

第 1 章　緒 論

1.1　緒 言

耐航性研究の主たる目的は、波浪中の船体運動を高精度で計算できる理論の構築と、計算法の開発にある。波浪中船体運動は船舶の安全性は言うまでもなく経済性にも影響するため、過去半世紀にわたって精力的に研究されてきた。最も初歩的な耐航性理論は、船体による波浪の散乱や放射は無視して、入射波の静水圧と変動圧だけを船体表面で積分して波力とするフルード・クリロフの仮定に基づく理論である。フルード・クリロフの仮定は船長が外洋波浪の波長と比較して十分小さい頃には有用であったと考えられる。しかし、船舶が大型化し船長と波長が同じオーダーになると、船体と波浪との相互作用が強くなって船体による波の散乱と放射の影響が無視できなくなり、電波や音波の物体による散乱問題や放射問題と同様に、線形近似により船体による波の散乱問題と放射問題を解く研究が盛んに行われるようになった。これらの研究は大松[7]が述べているように 1950 年の Weinblum and St.Denis [1]によって集大成され、また 1953 年の St.Denis and Pierson [2]にる不規則波中船体運動推定法の研究により統計学的手法と関連付けられたことで、その後の耐航性研究を周波数領域の線形理論の方向へリードすることになったと考えられる。

周波数領域の線形理論は耐航性研究の中心課題として多くの研究者により熱心に研究され、Slender body theory, Thin ship theory, Strip theory, Unified theory など[9, 10, 11]の理論が構築された。これらは (1) 理想流体、(2) 自由表面の微小変位、(3) 船体の微小動揺に加えて、(4) 細長な、もしくは薄い船体形状を仮定して構築された理論であり、中でも Strip theory は簡便なことから耐航性能推定法としてよく用いられている。一方、近年の計算機の高速化と低価格化により計算機の利用が急速に進んだため、細長体を仮定しない三次元特異点分布法 [12, 13, 14]やランキンパネル法 [15, 16]などの線形数値計算法も研究され、実用化されつつある。

これら周波数領域の線形理論は、規則波中を出会波周波数で周期的に定常運動している浮体の動揺振幅と入射波との位相差、すなわち船舶の入射波に対する周波数応答を対象としている。出会波周波数 ω を用いて流体と浮体との運動方程式から時間変動成分を $e^{i\omega t}$ の形で変数分離して問題を解くのが周波数領域の線形理論の特徴であり、流体と浮体との相互作用は付加質量や減衰係数などの流体力係数の形で表現される。

一方、入射波に対する船舶のインパルス応答を用いた時間領域の線形理論も 1960 年代から研究されている [4, 5, 6]。時間領域の線形理論は、入射波に対する過渡応答を求めるために用いられ、周波数領域の線形理論とはフーリエ双対の関係にある。大松 [7]は時間領域の Haskind-花岡- Newman の関係式や Irregular frequency の問題を論じ、周波数領域と時間領域の線形理論の関係を明確にした。

ところが、近年の耐航性理論には大振幅動揺、転覆、波浪衝撃、横揺に見られるカオス現象など、線形理論の枠組を越えた問題の解決を迫られる局面が多くなり、従来の線形理論で

は対応が困難になってきた。線形理論は仮定(1),(2),(3)の内、どれひとつ欠けても成り立たない。摂動論を用いて弱非線形理論へと拡張することは可能であっても、基本的には仮定(1),(2),(3)に縛られるため、船底を露出するほどの大振幅動揺や、極端な例としては巻波中の小型船の転覆など、非線形性の強い極限状態における船舶の耐航性能を推定することは無理である。また、カオス現象などの周期的定常状態を解に持たない現象への適用も困難である。

そこで、仮定(2),(3)によらない新しい非線形理論が必要となる。本論文の主題は、理想流体の仮定だけに基づき、波浪中の任意形状浮体の大振幅動揺を時間領域で計算するための理論を構築し、これを応用した非線形数値計算法を開発することにある。そこで、次節に時間領域における波浪中浮体運動の非線形理論の沿革について概観する。

1.2 時間領域における波浪中浮体運動の非線形理論の沿革

非線形計算法の研究は、1976年のLonguet-Higgins & Cokelet [17]による混合オイラー・ラグランジェ法(Mixed Eulerian and Lagrangian Method, 以後MELと略記する)の開発が、ひとつの契機になったと考えられる。MELは非線形波を時間領域でシミュレートするために開発された手法で、自由表面の流体粒子を追跡することで巻波のような強い非線形波でもシミュレートすることができる。また浮体が存在する場合にも使用できるため、MELを応用した時間領域における非線形計算法が多くの研究者により開発された。

流体力学的に整合性のとれた浮体運動の時間領域計算法を開発するためのキーポイントは、線形理論が周波数領域に構築した流体と浮体との連立方程式を、時間領域に、しかも線形の仮定を外して構築する点にある。これには速度場を扱うだけでは不十分で、加速度場において流体と浮体との連立方程式を構築し、浮体の加速度や流体の変動圧はこの連立方程式の解として、すなわち流体と浮体の非線形相互作用を厳密に考慮した解として求める必要がある。

時間領域における連立方程式の構築法を初めて示したのはVinje & Brevig [18]である。1981年、Vinjeらは複素ポテンシャルを用いた2次元浮体の運動計算で加速度場を上下揺、左右揺、横揺の単位加速度運動に対応する3モードと速度場から生じる求心加速度などの加速度の都合4モードに分解し、各モードについて境界値問題を解き、その解と浮体の運動方程式を連立させて浮体加速度を計算した。Vinjeら以前の時間領域計算法では、浮体表面の変動圧(速度ポテンシャルϕの時間偏微分, $\partial\phi/\partial t \equiv \phi_t$)を速度ポテンシャルの後退差分で計算していたため、精度と安定性の点で問題があり、運動量保存の観点からも満足な解が得られなかった。Vinjeらの方法は、加速度場を解いて浮体加速度と変動圧を計算する力学的に整合性のとれた方法であり、精度と安定性の点でも優れている。

ところが、Vinjeらの研究以後でも浮体表面でϕ_tを後退差分で計算する方法が継続して用いられ、現在でもこの手法を安易に浮体運動のシミュレーションに用いる傾向がある。力学的に厳密さを欠く手法が継続して使用されて来た理由としては、簡便であること、波浪強制力は静水圧成分が大きいため、変動圧の計算に誤りがあっても一見尤もらしい結果が得られること、物体の運動が予め与えられている強制動揺物体による波の散乱放射問題と、運動自体を流体運動と連立させて解かなければならない自由浮体の散乱放射問題とを混同していることなどが考えられる。結果としてVinjeらの方法が十分理解され浮体運動の計算に

応用されるまでに約8年を要した。

1989年、Cointeは Vinjeらの方法に基づき2次元の時間領域の線形・非線形シミュレーションプログラムを開発し、線形解と非線形解の比較を行った [37]。また、1990年には Kangと Gong [38]も Vinjeらの方法を3次元問題に応用した。最近では Wu [34]が2次元問題に Vinjeらの方法を用いている。

1990年、著者 [23]は浮体の運動方程式を用いて ϕ_t の浮体表面の幾何学的境界条件式から浮体加速度を消去して陰境界条件式を導き、ϕ_t に関する境界値問題に浮体の運動方程式を連立させて解く方法を開発した。また1995年には、加速度ポテンシャルに関する境界値問題を定式化し、加速度場における境界値問題の力学的な意味を明確にした [30]。著者の方法も Vinjeらの方法と同じく力学的に整合性のとれた方法で、精度と安定性の点でも優れている。また加速度場をモード分解せずに解くことが可能で、ϕ_t に関する境界値問題を1回解くだけで、正確に変動圧および浮体の加速度を計算することができる。Van Daalen [25]や最近では池野ら [54]も陰境界条件を用いて加速度場を解いている。

Vinjeや著者の方法とは別のアプローチで浮体表面の変動圧の計算精度向上を図った研究に、Sen [26]や Caoら [28]の研究がある。彼らは流体と浮体との連立方程式を繰り返し計算で解いた。彼らの方法では未知の浮体加速度を求めるため、流体と浮体との力の釣り合いが取れるまで加速度場を繰り返し解く必要があり、計算時間の点では不利である。しかし、加速度場を解くことで力学的整合性は保たれており、速度ポテンシャルの後退差分で変動圧を近似する方法より進歩した手法であると言える。

以上を整理すると、現在では加速度場において流体と浮体との連立方程式を解く手法として

1. モード分解による方法
2. 陰境界条件を用いる方法
3. 繰り返し計算による方法

が研究されている。

1.3 本論文の主題と構成

本論文は以上に述べたこれまでの著者の研究をまとめたもので、その主題は加速度ポテンシャルを用いた流体と浮体の非線形連成運動の理論構築とその数値計算法への応用である。

本論文は第 1 章から第 6 章および付録から構成されており、本章緒論ではその背景として耐航性理論研究の歴史および時間領域における浮体運動の非線形理論の沿革について述べた。

第2章では陰境界条件を用いた流体と浮体との非線形連成運動の理論を詳述する。まず、加速度ポテンシャルを導入して加速度場の境界値問題を定式化する。本論文で用いる加速度ポテンシャルは、Plandtlが翼理論に用いた線形化された加速度ポテンシャルではなく、非線形項を含むより一般性のあるもので、線形の仮定によらずその勾配が流体加速度を与える性質がある。そこで、この性質を利用して、加速度場における物体表面の幾何学的境界条件式を、物体の加速度と物体表面の流体の加速度との関係から求める。つぎに、物体の運動方程式を用いて、未知数である物体加速度を消去し、物体表面で成り立つ幾何学的かつ力学的な陰境界条件式を求める。また、定式化した境界値問題を、より数値計算に適した形に置

き換える。

第 3 章では、第 2 章で構築した加速度場の境界値問題を数値的に解くための離散化手法、陰境界条件式を用いた流体と浮体との連立運動方程式の構築法、自由表面および浮体の運動追跡法、開領域の計算に必要な波の放射条件を疑似的に満たす減衰領域など、時間領域で流体と浮体の運動をシミュレートするための具体的な手法について述べる。

第 4 章は数値計算法の検証に当てる。前半は閉領域に置かれた 2 次元浮体の大振幅運動の計算を例にあげ、本計算法が質量、運動量、エネルギー保存則を高精度で満たす数値解を与えること、また時間刻みに対する収束性が非常によいことを示し、非線形問題の解法として理論どおりの性能を有することを検証する。後半では、波の減衰領域の性能を検証する。

第 5 章では、船体中央横断面形状および船首部横断面形状の二つの 2 次元浮体を供試浮体とし、水平方向にバネ係留されたこれら浮体の規則波中動揺の数値計算結果を示す。また計算と同じ条件で実施した水槽実験結果との比較検討を行なう。

第 6 章では以上によって得られた結果を総括する。

最後に付録として、数値計算上の有効な種々の技術について述べる。

第 2 章　流体と浮体の相互作用の非線形理論

2.1　緒 言

時間領域で浮体と流体との非線形連成運動を計算するには、速度場に加え加速度場を解く必要があることを第 1 章で述べたが、加速度場を解く必要性を理解することは、流体と浮体の相互作用の非線形理論を構築する目的を明確にする上で大変有益であると考える。そこで、第 2 章の冒頭ではバネで連結された振子の連成運動の解法と浮体と流体との連成運動の解法とを比較し、質点系力学と流体力学の違いはあるが、どちらについても連立運動方程式を解くことに本質的な違いの無いことを確認し、理想流体と剛体の力学系においては連立運動方程式を加速度場に構築する必要があることを示す。

まず、バネで連結された振子の強制振動問題の解法について考える。振子の振幅が微小でありバネの非線形性も無視できる場合には、振子は強制力の周波数 ω で調和振動する。そこで、振子の複素振幅を a として変位を $x = ae^{i\omega t}$ の形で近似すると、時間変動成分は $e^{i\omega t}$ として変数分離できるので、連立運動方程式は ω だけの方程式となり、複素振幅 a を ω の関数として求めることができる。これは周波数領域の線形解法で、周期的定常状態を求めることに主眼が置かれているが、周波数応答とフーリエ双対の関係にあるインパルス応答を用いて過渡応答を求めることも可能である。以上の線形解法は線形運動方程式のフーリエ変換もしくはラプラス変換による解法である。

振子の例では線形化は単純であるが、浮体と流体との線形連成運動についても同じ手法が適用可能である。理想流体を仮定し、流体の運動を速度ポテンシャル $\phi(x, y, z; t)$ で表現できるとする。線形理論では浮体や自由表面の微小変位を仮定することで、速度ポテンシャルの時間変動成分を $\phi(x, y, z)e^{i\omega t}$ と分離し、時間変数を含まない $\phi(x, y, z)$ に関する境界値問題を解く。浮体と流体との連成条件を満足する解を求めるには、$\phi(x, y, z)$ を入射波、散乱波、放射波 (6 自由度) の成分にモード分解し、未知数であるモード毎の複素振幅を浮体運動方程式を条件式として求めればよい。

さて、一般に速度ポテンシャル自体は、流体の質量保存則を保証するのみで、運動量保存則までは保証しないことに注意を要する。運動量保存則を満たす解は、流体の運動方程式と浮体の運動方程式を連立させ、質量保存則を付帯条件として解いて始めて得られる。しかし、線形理論では非常に巧妙に流体の運動方程式を直接扱うことを回避している。線形理論では速度ポテンシャルの時間変動を $e^{i\omega t}$ とすることで、速度場だけでなく加速度場も陰に表現しており、線形仮定の下で流体と浮体との連立運動方程式を解いて付加質量と減衰係数を決定している。線形理論では加速度ポテンシャルおよびオイラーの理想流体の運動方程式を陽に用いる必要が無いため、加速度場を意識しないで済むが、流体と浮体との連立運動方程式をフーリエ変換もしくはラプラス変換によって解いている点で、連成振子の線形振動の例とまったく同じである。

振子が有限振幅で運動する場合や、バネが弱非線形性を有する場合は、振子運動が $ae^{i\omega t}$

の形から歪むため、摂動論により $x = a_1 e^{i\omega t} + a_2 e^{2i\omega t} + \ldots$ として順次高次項を導入して歪みを表現する手法が適用される。この手法により得た解は非線形解と呼ばれるが、むしろ線形解の補正と捕らえた方が妥当である。弱非線形の仮定下では流体と浮体との連成運動についても摂動論が適用される。

振子の振幅がさらに大きくなったり、バネの非線形性が強い場合は、線形理論や摂動論で運動を求めることが困難になる。これは非線形性が強いと、解がもはや調和振動的には振舞わないためで、カオス的な挙動はその代表である。この場合は周波数領域で問題を解くこと自体が無意味であり、時間領域で発展方程式を解かざるを得ない。すなわち運動方程式をルンゲ・クッタ法などで数値積分することで時間領域で運動をシミュレートする必要がある。この方法は先に述べたインパルス応答を用いた時間領域の計算法とは本質的に異なることを認識することが大事である。インパルス応答を用いた時間領域計算法は線形理論の範疇にある手法であり、摂動論により高次成分を考慮しても波形歪の補正である以上は真の非線形応答を求めることはできない。

さて、振子のような質点系の連成運動について連立運動方程式を立てることは、系が多少複雑であっても解析力学の手法により可能であり、それをルンゲ・クッタ法などで数値積分することも容易である。しかし、理想流体と浮体の非線形連成運動については連立運動方程式を立てること自体が容易ではない。理想流体と浮体の非線形連成運動は、互いの慣性力の動的な釣り合いを保って発展し、浮体表面における流体圧力は互いの慣性力の動的な釣り合いを常に満たしている。数値計算においてもこの動的な釣り合いを保証する必要があり、連立運動方程式の構築が不可欠である。そこで第 2 章は加速度場において理想流体と浮体との連立運動方程式を構築するための基礎理論の詳述にあてる。

第 2 章では、まず準備として速度場の境界値問題の定式化を述べた後、理想流体の運動方程式 (Euler の運動方程式) から加速度ポテンシャルを導いて流体加速度が加速度ポテンシャルの勾配で与えられることを示し、次いで加速度ポテンシャルに関する境界条件を導いて加速度場の境界値問題を定式化する。

2.2 速度場の境界値問題の定式化

自由表面を有する流体と任意形状浮体の運動を、時間領域で計算するための理論について考える。Fig.2.1に示すように固定壁面および底面 S_b 、自由表面 S_f 、浮体表面 S_s で囲まれた閉領域 Ω を流体領域とし、この運動を記述するため静止水面を $X-Y$ 面、鉛直上向きに Z 軸をとった空間固定座標系 $O-XYZ$ を用いる。本論文では浮体の代表寸法 L 、重力加速度 g 、流体密度 ρ を単位に用いて無次元化を行う。 L , g , ρ を用いて種々の物理量の単位を記述すると

時間	$\sqrt{L/g}$	周波数	$\sqrt{g/L}$		
距離	L	速度	$\sqrt{Lg}$	加速度	g
角度	1	角速度	$\sqrt{g/L}$	角加速度	g/L
質量	ρL^3	慣性モーメント	ρL^5		
力	$\rho g L^3$	モーメント	$\rho g L^5$	圧力	$\rho g L$

となる。本論文では以後特に断らない限り、これらを単位として諸量を無次元化する。

流体は非粘性、非圧縮、流れは非回転であると仮定し、速度ポテンシャル ϕ を導入すると、流体の速度 $\boldsymbol{v}$ は ϕ の勾配

$$\boldsymbol{v} = \nabla\phi \tag{2.2.1}$$

で与えられ、また質量保存則により ϕ はラプラスの式

$$\nabla^2\phi = 0 \tag{2.2.2}$$

を満足する。

$1/R$ を核関数に用いてグリーンの公式を適用すると、境界上の点 $\mathcal{Q}$ におけるポテンシャル $\phi(\mathcal{Q})$ とそのフラックス $\partial\phi(\mathcal{Q})/\partial n$ との関係は

$$c(\mathcal{Q})\phi(\mathcal{Q}) = \int_S \left\{\phi(\mathcal{P})\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R(\mathcal{P},\mathcal{Q})}\right) - \frac{1}{R(\mathcal{P},\mathcal{Q})}\frac{\partial\phi(\mathcal{P})}{\partial n}\right\} dS \tag{2.2.3}$$

で表せる。ここで $\mathcal{P}$ も境界 S 上の点であり、$R(\mathcal{P},\mathcal{Q})$ は点 $\mathcal{PQ}$ 間の距離、$c(\mathcal{Q})$ は点 $\mathcal{Q}$ における境界の立体角、積分は Cauchy の主値積分、n は流体領域外向き法線方向である。この積分方程式を解いて ϕ を求めるに当たり、自由表面および浮体の運動は有限振幅であり、境界条件は常に実表面上で満足させることにする。

まず自由表面 S_f の幾何学的境界条件は

$$\frac{D\boldsymbol{X}}{Dt} = \nabla\phi \tag{2.2.4}$$

で与えられる。ここで $\boldsymbol{X} = (X, Y, Z)$ は自由表面上の流体の位置ベクトルであり、D/Dt は実質微分

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \nabla\phi\cdot\nabla \tag{2.2.5}$$

である。自由表面の力学的境界条件も実質微分を用いて記述すると

$$\frac{D\phi}{Dt} = -Z + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 \tag{2.2.6}$$

と書ける。実質微分を用いて記述した自由表面条件は、見方を変えれば自由表面の運動方程式であり、Longuet-Higgins & Cokelet [17]は自由表面条件を時間積分することで、巻波に至る自由表面の大振幅運動を追跡できることを示した。この方法は混合オイラー・ラグランジェ法 (MEL) の名で知られている。

次に、固定壁面および水底面 S_b の幾何学的境界条件は

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = 0 \tag{2.2.7}$$

浮体表面 S_s の幾何学的境界条件は浮体表面の流体領域外向き法線方向速度を V_n として

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = V_n \tag{2.2.8}$$

で与えられる。

もし浮体運動が予め与えられていれば、その変位、速度、加速度はすべて既知で、解くべき運動は流体運動だけとなり、速度ポテンシャル ϕ に関する境界値問題の解を MEL で時間積分するだけで時間領域の計算が行なえる。

しかし、自由浮体や強制動揺浮体でも変位ではなく強制力が与えられている場合には、浮体運動も未知であり、浮体加速度を時間積分して求めなければならない。浮体加速度を計算するには、浮体に働く流体力を知る必要があり、流体力は浮体表面の圧力積分より求められる。浮体表面の圧力はベルヌーイの式

$$p = -\frac{\partial \phi}{\partial t} - Z - \frac{1}{2}(\nabla \phi)^2 \tag{2.2.9}$$

で与えられるが、$\partial\phi/\partial t$ は2.4.1.(2)で明らかにするように、浮体加速度の関数であるため未知である。すなわち、浮体表面の圧力は陽には計算できず、加速度場において流体と浮体との連立運動方程式を構築し、これを解いて初めて得られる。加速度場おける流体と浮体との連立運動方程式の構築法を初めて示したのが Vinje ら[18]であることは、1.1で既に述べた。Vinje らは加速度場をモード分解して流体と浮体との連立運動方程式を解いたが、本章ではモード分解を必要としない流体と浮体との連立運動方程式の構築法を示す。また、本章では加速度場を解くことの力学的意味を明確にするため、加速度ポテンシャルを導入して加速度場の境界値問題を定式化する。

2.3 理想流体の運動方程式と加速度ポテンシャル

理想流体の微小部分にニュートンの法則を適用すると、その運動方程式すなわちオイラーの方程式は

$$\boldsymbol{a} = \frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} = -\nabla p - \nabla Z \tag{2.3.1}$$

と書ける。ここで $\boldsymbol{a}$ 、$\boldsymbol{v}$ はそれぞれ流体微小部分の加速度ベクトルと速度ベクトルである。本論ではベクトルは太字で標記する。

速度 $\boldsymbol{v}$ が速度ポテンシャル ϕ を用いて $\boldsymbol{v} = \nabla\phi$ と書けるように、加速度 $\boldsymbol{a}$ についても類似のポテンシャルを導入する。加速度は速度の実質微分であるので、速度ポテンシャルを用いて (2.3.1) 式を書き表すと

$$\boldsymbol{a} = \frac{D\nabla\phi}{Dt} = \frac{\partial \nabla\phi}{\partial t} + (\nabla\phi \cdot \nabla)\nabla\phi = \nabla\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla\left(\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2\right) = \nabla\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2\right) \tag{2.3.2}$$

である。そこで、加速度ポテンシャル Φ を

$$\Phi = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 \tag{2.3.3}$$

のように定義すると $\boldsymbol{a} = \nabla\Phi$ となり、加速度ポテンシャルの勾配で流体の加速度を表現できる。これは Prandtl が導入した加速度ポテンシャルの一般形である。加速度場は渦無しであるが、一般には $\nabla^2\Phi \neq 0$ である。これは (2.3.3) 式の右辺に非線形項を含むためである。Prandtl は翼理論に加速度ポテンシャルを応用するにあたり、翼による撹乱速度が翼の前進速度 V に比して微小であると仮定して $\Phi = \partial\phi/\partial t + V\nabla\phi$ と線形化しているので、通常加速度ポテンシャルというと線形化された定義を指すことが多い。しかし、ここではより一般性を持たせて速度の二乗項を含め、(2.3.3) 式で定義する。

加速度ポテンシャルは (2.3.1) 式と (2.3.3) 式より $\boldsymbol{a} = \nabla\Phi = \nabla(-p - Z)$ であるので

$$\Phi = -p - Z + const. \tag{2.3.4}$$

となり、その物理的意味は明確である。しかし、今まであまり利用されなかったのは、線形理論では加速度ポテンシャルを考える必要が無かったこともあるが、それ以外にも加速度場の物体表面境界条件の物理的な意味が明確にされていなかったことや、加速度場を解くにはポアソンの式を解かなければならないことなどが理由であると思われる。そこで以下の節では境界条件の物理的な意味を明確にし、さらに加速度場をラプラスの式で解けるよう工夫する。

2.4 加速度場の境界値問題の定式化

2.4.1 物体表面の幾何学的境界条件

(1) 物体表面に添って運動する流体の加速度

加速度場における物体表面の幾何学的境界条件を求めるため、まず物体表面に添って運動する流体の加速度の表示式を求める。Fig.2.2に示すように、空間固定座標系を $O-XYZ$、物体固定座標系を $o-xyz$、物体固定座標系の基本ベクトルを $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ とし、物体の運動をその重心 o の速度ベクトル $\boldsymbol{v}_o = v_{ox}\boldsymbol{i} + v_{oy}\boldsymbol{j} + v_{oz}\boldsymbol{k}$ と、重心回りの回転角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega} = \omega_x\boldsymbol{i} + \omega_y\boldsymbol{j} + \omega_z\boldsymbol{k}$ で表す。本論では物体固定座標系から空間固定座標系への変換を基本ベクトルを用いて行う。基本ベクトル $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ は並進運動に対しては極性ベクトル、回転運動に対しては軸性ベクトルを意味するものとする。

さて物体表面上の流体に固定された点を P とし、点 P の物体固定座標系に対する位置を (x_P, y_P, z_P) とする。ここでは理想流体を想定しているので、点 P は物体表面に添って移動する点として取り扱う。点 P の空間固定座標系に対する位置ベクトルを $\boldsymbol{R}$、物体重心の位置ベクトルを $\boldsymbol{R}_o$、物体重心位置からの点 P の相対位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ とすると、

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_o + \boldsymbol{r} \tag{2.4.1}$$

であり、$\boldsymbol{r} = x_P\boldsymbol{i} + y_P\boldsymbol{j} + z_P\boldsymbol{k}$ と表される。

まず、空間固定座標系における点 P の速度 $\boldsymbol{v}$ を求める。空間固定座標系における微分演算と、これに対して角速度 $\boldsymbol{\omega}$ で回転する回転座標系における微分演算との間には $d/dt = [d/dt] + \boldsymbol{\omega}\times$ が成り立つことを考慮して (2.4.1) 式を時間微分すると

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{R}}_o + \dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{v}_o + [\dot{\boldsymbol{r}}] + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}_o + [\boldsymbol{v}] + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r} \tag{2.4.2}$$

となる。ここで記号 [ ] は、回転座標系を固定座標系と見なした演算を意味し、$[\boldsymbol{v}] = [\dot{\boldsymbol{r}}] = \dot{x}_P\boldsymbol{i} + \dot{y}_P\boldsymbol{j} + \dot{z}_P\boldsymbol{k}$ である。すなわち、$[\boldsymbol{v}]$ は物体上の観測者から見た点 P の速度で、$\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$ は物体の回転による点 P の速度である。

次に、空間固定座標系における点 P の加速度 $\boldsymbol{a}$ を求める。(2.4.2) 式をさらに時間微分すると

$$\boldsymbol{a} = \ddot{\boldsymbol{R}}_o + \ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{a}_o + [\boldsymbol{a}] + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}) + 2\boldsymbol{\omega}\times[\boldsymbol{v}] + \dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r} \tag{2.4.3}$$

を得る。ここで $\boldsymbol{a}_o = \dot{\boldsymbol{v}}_o = \ddot{\boldsymbol{R}}_o$ は物体重心の加速度であり、$[\boldsymbol{a}] = [\ddot{\boldsymbol{r}}] = \ddot{x}_P\boldsymbol{i} + \ddot{y}_P\boldsymbol{j} + \ddot{z}_P\boldsymbol{k}$ は物体上の観測者から見た点 P の加速度である。$\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})$ は物体の回転角速度 $\boldsymbol{\omega}$ による点 P の加速度で、その方向は $\boldsymbol{r}$ とは逆方向で回転中心に向かっている。よってこれは求心加速度である。$-2\boldsymbol{\omega}\times[\boldsymbol{v}]$ はコリオリの加速度と呼ばれるもので $\boldsymbol{\omega}$ と $[\boldsymbol{v}]$ に直交するベクトルである。最後の項 $\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}$ は物体の回転角加速度 $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ による点 P の加速度である。

(2) 幾何学的境界条件

さて、物体表面の流体に固定された点 P の、速度と加速度の表示式が得られたので、次に物体表面の幾何学的境界条件を求める。点 P における物体表面の法線ベクトルを $\boldsymbol{n} = n_x\boldsymbol{i} + n_y\boldsymbol{j} + n_z\boldsymbol{k}$ とすると、速度場および加速度場の物体表面の幾何学的境界条件は、法線ベクトルと速度および加速度との内積を用いて

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \boldsymbol{n} \cdot \nabla\phi = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v} \tag{2.4.4}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial n} = \boldsymbol{n} \cdot \nabla\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{a} \tag{2.4.5}$$

と書ける。

まず、$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v}$ は (2.4.2) 式を用いて

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{v}_o + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) + \boldsymbol{n} \cdot [\boldsymbol{v}] \tag{2.4.6}$$

であるが、右辺第 2 項はベクトルの直交性により消えるので、結局

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{v}_o + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) \tag{2.4.7}$$

となる。よって速度場の物体表面の幾何学的境界条件 $\partial\phi/\partial n$ は、物体の運動だけから決めることができる。

一方、$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{a}$ は (2.4.3) 式を用いて

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{n} \cdot [\boldsymbol{a}] + \boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{a}_o + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r}) + \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) + \boldsymbol{n} \cdot 2\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{v}] \tag{2.4.8}$$

となる。これが加速度場における物体表面の幾何学的境界条件であるが、一般に $\boldsymbol{n}$ と $[\boldsymbol{a}]$ は直交しないので消去できないし、第 4 項に $[\boldsymbol{v}]$ を含んでいるため速度場と独立に定めることはできない。

そこで速度ポテンシャル ϕ 用いて (2.4.8) 式を書き換える。まず、$\boldsymbol{v} = \nabla\phi$ の関係と (2.4.2) 式より $[\boldsymbol{v}]$ は

$$[\boldsymbol{v}] = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_o - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} = \nabla\phi - \boldsymbol{v}_o - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} \tag{2.4.9}$$

となる。$[\boldsymbol{v}]$ は物体表面上の流体速度ベクトルで、流体が物体表面から剥離しない限り、常に物体表面の接線方向を向いている。そこで、$[\boldsymbol{a}]$ を Fig.2.3に示すように物体表面の法線方向 $\boldsymbol{n}$ と流跡線に添う接線方向 $\boldsymbol{s}$ に分解すると

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{a}]_n &= -k_n\,([\boldsymbol{v}])^2 \\ [\boldsymbol{a}]_s &= [\dot{\boldsymbol{v}}]_s \end{aligned} \tag{2.4.10}$$

となる。ここで k_n は流跡線に添った物体表面の法曲率である。物体表面の点 P を含む曲面片が、パラメータ u, v を用いて $x = x(u,v),\ y = y(u,v),\ z = z(u,v)$ と表され、物体表面から剥離しない点 P の流跡線が、$u - v$ 平面上の曲線 $u(s), v(s)$ の写像として $\boldsymbol{P}(s) = P(u(s), v(s))$ で与えられるとすると、法曲率 k_n は微分幾何学で第二基本形式と呼ばれる量で計算できて、

$$k_n(s) = \mathrm{II}\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}(\mathrm{s})}{\mathrm{ds}}, \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}(\mathrm{s})}{\mathrm{ds}}\right) \tag{2.4.11}$$

となる。

(2.4.10) 式では $[\boldsymbol{a}]_s$ は加速度場を解くまでは未定であるが、$\boldsymbol{n}\cdot[\boldsymbol{a}]_s$ は直交性により消去できるので、境界条件を定めるために必要な $\boldsymbol{n}\cdot[\boldsymbol{a}]$ は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{n}\cdot[\boldsymbol{a}] &= \boldsymbol{n}\cdot([\boldsymbol{a}]_n+[\boldsymbol{a}]_s)=\boldsymbol{n}\cdot[\boldsymbol{a}]_n \\ &= -k_n\left([\boldsymbol{v}]\right)^2=-k_n\left(\nabla\phi-\boldsymbol{v}_o-\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}\right)^2\end{aligned} \tag{2.4.12}$$

となる。以上により加速度場の物体表面の幾何学的境界条件は

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Phi}{\partial n} &= -k_n\left(\nabla\phi-\boldsymbol{v}_o-\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}\right)^2+\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{a}_o+\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}) \\ &\quad+\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})+\boldsymbol{n}\cdot 2\boldsymbol{\omega}\times(\nabla\phi-\boldsymbol{v}_o-\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})\end{aligned} \tag{2.4.13}$$

となる。

2.4.2 浮体表面の陰境界条件

(1) 浮体の運動方程式

(2.4.13) 式で与えられた物体表面の幾何学的境界条件には、右辺第 2 項に物体の加速度 $\boldsymbol{a}_o$,$\dot{\boldsymbol{\omega}}$ が含まれているため、造波板のように運動が与えられている場合には陽に計算できるが、自由浮体のように運動自体を解く必要がある場合には陽に計算できない。そこで本節では流体中を運動する物体の運動方程式を用いて、幾何学的境界条件 (2.4.13) 式から加速度を消去し、その表面で成り立つ幾何学的かつ力学的な陰境界条件式を求める。

まず、物体の 6 自由度の運動方程式を記述する。ここでも Fig.2.2に示した、空間固定座標系 $O-XYZ$ と、これに対して回転角速度 $\boldsymbol{\omega}=\omega_x\boldsymbol{i}+\omega_y\boldsymbol{j}+\omega_z\boldsymbol{k}$ で回転する物体固定座標系 $o-xyz$ を用いる。物体の質量を m 、物体重心の加速度を $\boldsymbol{a}_o=a_{ox}\boldsymbol{i}+a_{oy}\boldsymbol{j}+a_{oz}\boldsymbol{k}$ 、物体に働く外力を $\boldsymbol{f}=f_x\boldsymbol{i}+f_y\boldsymbol{j}+f_z\boldsymbol{k}$ とすると、物体重心の運動方程式は

$$m\boldsymbol{a}_o=m\dot{\boldsymbol{v}}_o=m[\dot{\boldsymbol{v}}_o]+\boldsymbol{\omega}\times m\boldsymbol{v}_o=\boldsymbol{f} \tag{2.4.14}$$

であり、$o-xyz$ 系の成分を用いると

$$\left.\begin{array}{rcccl} ma_{ox} &=& m(\dot{v}_{ox}+v_{oz}\omega_y-v_{oy}\omega_z) &=& f_x \\ ma_{oy} &=& m(\dot{v}_{oy}+v_{ox}\omega_z-v_{oz}\omega_x) &=& f_y \\ ma_{oz} &=& m(\dot{v}_{oz}+v_{oy}\omega_x-v_{ox}\omega_y) &=& f_z \end{array}\right\} \tag{2.4.15}$$

と書ける。次に重心まわりの回転運動の運動方程式は、角運動量を $\boldsymbol{H}=H_x\boldsymbol{i}+H_y\boldsymbol{j}+H_z\boldsymbol{k}$ 、重心に働く外力のモーメントを $\boldsymbol{M}=M_x\boldsymbol{i}+M_y\boldsymbol{j}+M_z\boldsymbol{k}$ と表すと

$$\dot{\boldsymbol{H}}=[\dot{\boldsymbol{H}}]+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{M} \tag{2.4.16}$$

であり、重心の運動方程式と同様に $o-xyz$ 系の成分を用いると

$$\left.\begin{array}{rcl} \dot{H}_x+H_z\omega_y-H_y\omega_z &=& M_x \\ \dot{H}_y+H_x\omega_z-H_z\omega_x &=& M_y \\ \dot{H}_z+H_y\omega_x-H_x\omega_y &=& M_z \end{array}\right\} \tag{2.4.17}$$

と書ける。ここで、角運動量 $\boldsymbol{H}$ を回転角速度 $\boldsymbol{\omega}$ と $o-xyz$ 系の軸まわりの慣性テンソル $\boldsymbol{I}$

$$\boldsymbol{I}=\left[\begin{array}{ccc} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{array}\right] \tag{2.4.18}$$

を用いて書くと $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{I}\,\boldsymbol{\omega}$ 、すなわち

$$\left\{ \begin{array}{c} H_x \\ H_y \\ H_z \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccc} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{array} \right\} \tag{2.4.19}$$

であるので、これを (2.4.17) 式に代入すると求める回転運動の運動方程式は

$$\left. \begin{array}{rcrcrcl} I_{xx}\dot{\omega}_x & + & (I_{zz} - I_{yy})\omega_y\omega_z & + & I_{xy}(\dot{\omega}_y - \omega_z\omega_x) & & \\ & + & I_{zx}(\dot{\omega}_z + \omega_x\omega_y) & + & I_{yz}(\omega_y^2 - \omega_z^2) & = & M_x \\ I_{yy}\dot{\omega}_y & + & (I_{xx} - I_{zz})\omega_z\omega_x & + & I_{yz}(\dot{\omega}_z - \omega_x\omega_y) & & \\ & + & I_{xy}(\dot{\omega}_x + \omega_y\omega_z) & + & I_{zx}(\omega_z^2 - \omega_x^2) & = & M_y \\ I_{zz}\dot{\omega}_z & + & (I_{yy} - I_{xx})\omega_x\omega_y & + & I_{zx}(\dot{\omega}_x - \omega_y\omega_z) & & \\ & + & I_{yz}(\dot{\omega}_y + \omega_z\omega_x) & + & I_{xy}(\omega_x^2 - \omega_y^2) & = & M_z \end{array} \right\} \tag{2.4.20}$$

となる。この剛体の回転運動方程式はオイラーによって導かれたもので、オイラーの運動方程式と呼ばれている。

さて次に、一般化慣性テンソル $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ を

$$\boldsymbol{\mathcal{M}} = \left[\begin{array}{cccccc} m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ 0 & 0 & 0 & I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ 0 & 0 & 0 & I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{array} \right] \tag{2.4.21}$$

で定義し、物体の一般化加速度 $\boldsymbol{\alpha}$ を重心の加速度 $\boldsymbol{a}_o = a_{ox}\boldsymbol{i} + a_{oy}\boldsymbol{j} + a_{oz}\boldsymbol{k}$ と回転角加速度 $\dot{\boldsymbol{\omega}} = [\dot{\boldsymbol{\omega}}] + \omega \times \omega = [\dot{\boldsymbol{\omega}}] = \dot{\omega}_x\boldsymbol{i} + \dot{\omega}_y\boldsymbol{j} + \dot{\omega}_z\boldsymbol{k}$ を合わせた 3 次元ベクトルの対として

$$\boldsymbol{\alpha} = (a_{ox}\boldsymbol{i} + a_{oy}\boldsymbol{j} + a_{oz}\boldsymbol{k}\ ,\ \dot{\omega}_x\boldsymbol{i} + \dot{\omega}_y\boldsymbol{j} + \dot{\omega}_z\boldsymbol{k}) \tag{2.4.22}$$

と定義する。ここでは一般化加速度 $\boldsymbol{\alpha}$ が空間固定座標系に対する加速度であることを明示するため (2.4.22) 式のように表現したが、これを物体固定座標系の成分で書くと $(a_{ox}, a_{oy}, a_{oz}, \dot{\omega}_x, \dot{\omega}_y, \dot{\omega}_z)$ である。

同様にして、物体に働く外力についても、力 $\boldsymbol{f} = f_x\boldsymbol{i} + f_y\boldsymbol{j} + f_z\boldsymbol{k}$ とモーメント $\boldsymbol{M} = M_x\boldsymbol{i} + M_y\boldsymbol{j} + M_z\boldsymbol{k}$ を合わせて一般化力の形で

$$\boldsymbol{F} = (f_x\boldsymbol{i} + f_y\boldsymbol{j} + f_z\boldsymbol{k}\ ,\ M_x\boldsymbol{i} + M_y\boldsymbol{j} + M_z\boldsymbol{k}) \tag{2.4.23}$$

と定義し、これら一般化量を用いて (2.4.15),(2.4.20) 式をひとつの式に統合すると、その成分は

$$\begin{array}{l} \left[\begin{array}{cccccc} m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ 0 & 0 & 0 & I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ 0 & 0 & 0 & I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} a_{ox} \\ a_{oy} \\ a_{oz} \\ \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{array} \right\} \\ + \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ (I_{zz} - I_{yy})\omega_y\omega_z - I_{xy}\omega_z\omega_x + I_{zx}\omega_x\omega_y + I_{yz}(\omega_y^2 - \omega_z^2) \\ (I_{xx} - I_{zz})\omega_z\omega_x - I_{yz}\omega_x\omega_y + I_{xy}\omega_y\omega_z + I_{zx}(\omega_z^2 - \omega_x^2) \\ (I_{yy} - I_{xx})\omega_x\omega_y - I_{zx}\omega_y\omega_z + I_{yz}\omega_z\omega_x + I_{xy}(\omega_x^2 - \omega_y^2) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} f_x \\ f_y \\ f_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{array} \right\} \end{array} \tag{2.4.24}$$

であり、最終的に 6 自由度の運動方程式は o–xyz 系が回転座標系であるために生ずる (2.4.24) 式の左辺第 2 項を $\boldsymbol{\beta}$ とおいて

$$\boldsymbol{\mathcal{M}}\ \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{F} \tag{2.4.25}$$

となる。

(2) 浮体に働く流体力

物体の 6 自由度の運動方程式が得られたので、次に物体に働く外力 $\boldsymbol{F}$ の表示式を求める。まず流体力 $\boldsymbol{f}_f = f_{fx}\boldsymbol{i} + f_{fy}\boldsymbol{j} + f_{fz}\boldsymbol{k}$ および流体力のモーメント $\boldsymbol{M}_f = M_{fx}\boldsymbol{i} + M_{fy}\boldsymbol{j} + M_{fz}\boldsymbol{k}$ を加速度ポテンシャル Φ を用いて書き表す。物体に働く流体力 $\boldsymbol{f}_f$ および流体力モーメント $\boldsymbol{M}_f$ は物体表面 S_s の圧力積分で表せて、

$$\boldsymbol{f}_f = \int_{S_s} p\ \boldsymbol{n} ds \tag{2.4.26}$$

$$\boldsymbol{M}_f = \int_{S_s} p\ \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{r} ds \tag{2.4.27}$$

となる。ここで $\boldsymbol{n} = n_x\boldsymbol{i} + n_y\boldsymbol{j} + n_z\boldsymbol{k}$ は物体表面の法線方向ベクトルであり $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ は物体重心から物体表面上の点を指すベクトルである。そこで、ここでも流体力 $\boldsymbol{f}_f = f_{fx}\boldsymbol{i} + f_{fy}\boldsymbol{j} + f_{fz}\boldsymbol{k}$ とモーメント $\boldsymbol{M}_f = M_{fx}\boldsymbol{i} + M_{fy}\boldsymbol{j} + M_{fz}\boldsymbol{k}$ を合わせて一般化流体力として

$$\boldsymbol{F}_f = (f_{fx}\boldsymbol{i} + f_{fy}\boldsymbol{j} + f_{fz}\boldsymbol{k}\ ,\ M_{fx}\boldsymbol{i} + M_{fy}\boldsymbol{j} + M_{fz}\boldsymbol{k}) \tag{2.4.28}$$

と定義し、さらに法線ベクトルも一般化して $\boldsymbol{n}$ と $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{r}$ を合わせて

$$\begin{aligned} \boldsymbol{N} &= (\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{r}) \\ &= (n_x\boldsymbol{i} + n_y\boldsymbol{j} + n_z\boldsymbol{k}\ ,\ (n_yz - n_zy)\boldsymbol{i} + (n_zx - n_xz)\boldsymbol{j} + (n_xy - n_yx)\boldsymbol{k}) \end{aligned} \tag{2.4.29}$$

と定義する。これら一般化量を用いて (2.4.26),(2.4.27) 式を統合して書き直すと、流体力は

$$\boldsymbol{F}_f = \int_{S_s} p\ \boldsymbol{N} ds \tag{2.4.30}$$

となり、圧力 p が (2.3.4) 式より $p = -\Phi - Z + const.$ であるので、ここでは常数を $const. = 0$ として代入すると

$$\boldsymbol{F}_f = \int_{S_s} (-\Phi - Z)\ \boldsymbol{N} ds \tag{2.4.31}$$

となる。そこで、流体力以外の推力や重力などの既知の外力を一般化力 $\boldsymbol{F}_g$ として加え、物体に作用する全一般化外力の表示式

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_f + \boldsymbol{F}_g = \int_{S_s} (-\Phi - Z)\ \boldsymbol{N} ds + \boldsymbol{F}_g \tag{2.4.32}$$

を得る。

(3) 陰境界条件

以上で物体表面の陰境界条件を求めるための準備が終わったので、その条件を求める。加速度場の物体表面の境界条件を表す (2.4.13) 式で自由浮体にとって未知であったのは右辺第2項であった。そこで速度場の解から陽に計算できる他の項をまとめて

$$\begin{aligned} q = & -k_n \left(\nabla\phi - \boldsymbol{v}_o - \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}\right)^2 \\ & + \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\omega}\times\left(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}\right) + \boldsymbol{n}\cdot 2\boldsymbol{\omega}\times\left(\nabla\phi - \boldsymbol{v}_o - \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}\right) \end{aligned} \tag{2.4.33}$$

と書き、未知の右辺第2項が一般化加速度 $\boldsymbol{\alpha}$ と一般化法線方向ベクトル $\boldsymbol{N}$ を用いて

$$\boldsymbol{n}\cdot\left(\boldsymbol{a}_o + \dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}\right) = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{a}_o + \dot{\omega}\cdot\left(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{r}\right) = \boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{\alpha} \tag{2.4.34}$$

と書けるので、これらを用いて (2.4.13) 式を書き直すと

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = \boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{\alpha} + q \tag{2.4.35}$$

となる。一方、一般化加速度 $\boldsymbol{\alpha}$ は (2.4.25) 式より

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\mathcal{M}}^{-1}\left(\boldsymbol{F} - \boldsymbol{\beta}\right) \tag{2.4.36}$$

であり、さらに外力 $\boldsymbol{F}$ は (2.4.32) 式で与えられているので、これらを (2.4.35) 式に代入して

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Phi}{\partial n} &= \boldsymbol{N}\ \boldsymbol{\mathcal{M}}^{-1}\ \left\{\int_{S_s}\left(-\Phi - Z\right)\ \boldsymbol{N}ds + \boldsymbol{F}_g - \boldsymbol{\beta}\right\} + q \\ &= \boldsymbol{N}\ \boldsymbol{\mathcal{M}}^{-1}\ \int_{S_s} -\Phi\ \boldsymbol{N}ds \\ &+ \boldsymbol{N}\ \boldsymbol{\mathcal{M}}^{-1}\ \left\{\int_{S_s} -Z\ \boldsymbol{N}ds + \boldsymbol{F}_g - \boldsymbol{\beta}\right\} + q \end{aligned} \tag{2.4.37}$$

を得る。(2.4.37) 式の最後の行はすべて速度場の解などから陽に計算できる量であるので、これを

$$Q = \boldsymbol{N}\ \boldsymbol{\mathcal{M}}^{-1}\ \left\{\int_{S_s} -Z\ \boldsymbol{N}ds + \boldsymbol{F}_g - \boldsymbol{\beta}\right\} + q \tag{2.4.38}$$

と置いて、最終的に

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = \boldsymbol{N}\ \boldsymbol{\mathcal{M}}^{-1}\ \int_{S_s} -\Phi\ \boldsymbol{N}ds + Q \tag{2.4.39}$$

を得る。(2.4.39) 式は物体表面で加速度ポテンシャル Φ とそのフラックス $\partial\Phi/\partial n$ との関係を与える式であり、これが求める陰境界条件式である。ここで定式化した物体表面の陰境界条件は、流体と浮体の運動方程式から導かれた幾何学的かつ力学的な境界条件である。運動方程式は流体も物体もともにオイラーの運動方程式と呼ばれており、流体と物体の境界が満たすべき条件として導いた (2.4.39) 式は、これらオイラーの方程式どうしを幾何学的かつ力学的に結びつける条件式である。

2.4.3 複数の流体領域が存在する場合への拡張

以上の加速度場の境界値問題の定式化は流体領域が複数存在する場合の物体と流体の相互作用の問題にも容易に拡張が可能である。そこで次に Fig.2.4に示すように内部に流体タ

ンクを有する浮体の運動を考える。流体領域に通し番号 κ を振って Ω_κ で表し、各流体領域の速度ポテンシャルや加速度ポテンシャルなども添字 κ を付けて ϕ_κ, Φ_κ で表すことにする。

(2.4.5) 式と同様に、領域 Ω_κ の加速度ポテンシャルの物体表面境界条件は

$$\frac{\partial \Phi_\kappa}{\partial n} = \boldsymbol{N}_\kappa \cdot \boldsymbol{\alpha} + q_\kappa \tag{2.4.40}$$

と書ける。ここで $\boldsymbol{N}_\kappa$ は領域 Ω_κ の外向きの一般化法線方向ベクトルである。

一方、物体内外に複数の流体領域が存在する場合に物体に働く流体力は、各流体領域から与えられる力の和として

$$\boldsymbol{F}_f = \sum_{\kappa=1}^{\nu} \int_{S_{\kappa s}} p \ \boldsymbol{N}_\kappa ds = \sum_{\kappa=1}^{\nu} \int_{S_{\kappa s}} \rho_\kappa (-\Phi_\kappa - Z) \ \boldsymbol{N}_\kappa ds \tag{2.4.41}$$

で与えられる。そこで、物体の内外の流体領域との連成項を含む運動方程式は

$$\boldsymbol{\mathcal{M}} \ \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = \sum_{\kappa=1}^{\nu} \int_{S_{\kappa s}} \rho_\kappa (-\Phi_\kappa - Z) \ \boldsymbol{N}_\kappa ds + \boldsymbol{F}_g \tag{2.4.42}$$

となる。ここで ν は領域数、ρ_κ は物体外部の流体密度を用いて無次元化した領域 Ω_κ の無次元化密度である。

そこで、(2.4.42) 式を用いて (2.4.40) 式から物体の加速度を消去すると、加速度ポテンシャルの物体表面陰境界条件

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_\kappa}{\partial n} = {} & \boldsymbol{N}_\kappa \ \boldsymbol{\mathcal{M}}^{-1} \ \left\{ \sum_{\kappa=1}^{\nu} \rho_\kappa \int_{S_{\kappa s}} -\Phi_\kappa \ \boldsymbol{N}_\kappa ds \right\} \\ & + \boldsymbol{N}_\kappa \ \boldsymbol{\mathcal{M}}^{-1} \ \left\{ \sum_{\kappa=1}^{\nu} \rho_\kappa \int_{S_{\kappa s}} -Z \ \boldsymbol{N}_\kappa ds + \boldsymbol{F}_g - \boldsymbol{\beta} \right\} + q_\kappa \end{aligned} \tag{2.4.43}$$

が得られる。この条件式が物体と内外の流体との連成条件式である。

2.4.4 自由表面条件

本節の最後に加速度場の自由表面条件を示しておく。加速度ポテンシャルが (2.3.4) 式で表せるように圧力であるため、加速度場の自由表面条件は非常に簡単である。自由表面上で圧力をゼロとすると (2.3.4) 式中の $p = const. = 0$ として自由表面の圧力境界条件は

$$\Phi = -Z \tag{2.4.44}$$

で与えられる。

2.5 数値計算に適した加速度場の定式化

ここまでの議論で加速度場の境界条件が定まった。しかし、2.3節で述べたように一般には $\nabla^2 \Phi \neq 0$ であるので、このままではポアソンの式に関する境界値問題を数値的に解く必要があり、境界分割だけで問題を解くことができない。これは数値計算を行う上で欠点であるため、ラプラスの式に関する境界値問題に置き換える。

$\nabla^2 \Phi \neq 0$ であるのは加速度ポテンシャルの定義 (2.3.3) 式の右辺第 2 項の非線形性による。しかし、この非線形項は速度場の解より既知であるので加速度ポテンシャルに含めて解き

直す必要はない。線形である (2.3.3) 式の右辺第 1 項だけが未知であり、かつラプラスの式 $\nabla^2(\partial\phi/\partial t) = 0$ を満たす。そこで、本節では 2.4 で定式化した加速度ポテンシャルに関する境界値問題を $\partial\phi/\partial t$ に関する境界値問題に置き換えることで、より数値計算に適した加速度場の定式化を行なう。$\partial\phi/\partial t$ の勾配は流体の加速度とは一致しないので、ここでは加速度ポテンシャルの用語は用いず、ϕ_t で表すことにする。

$$\phi_t = \frac{\partial\phi}{\partial t} = \Phi - \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 \tag{2.5.1}$$

ϕ_t に対する境界条件は、既に導かれている加速度ポテンシャル Φ に関する境界条件 (2.4.35),(2.4.39),(2.4.44) 式から簡単に求めることができる。まず、物体表面の幾何学的境界条件は (2.4.35) 式と (2.5.1) 式より

$$\frac{\partial\phi_t}{\partial n} = \boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{\alpha} + q' \ , \tag{2.5.2}$$

で与えられる。ここで、

$$q' = q - \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2\right) \tag{2.5.3}$$

である。次に浮体表面の陰境界条件は (2.4.39) 式と (2.5.1) 式より

$$\frac{\partial\phi_t}{\partial n} = \boldsymbol{N}\ \boldsymbol{\mathcal{M}}^{-1}\ \int_{S_s}\left(-\phi_t - \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2\right)\ \boldsymbol{N}ds + Q - \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2\right) \tag{2.5.4}$$

となる。そこで、ここでも速度場の解から陽に計算できる量を括り出して

$$\begin{aligned} Q' &= \boldsymbol{N}\ \boldsymbol{\mathcal{M}}^{-1}\ \int_{S_s} -\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2\ \boldsymbol{N}ds + Q - \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2\right) \\ &= \boldsymbol{N}\ \boldsymbol{\mathcal{M}}^{-1}\ \left\{\int_{S_s}\left(-Z - \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2\right)\ \boldsymbol{N}ds + \boldsymbol{F}_g - \boldsymbol{\beta}\right\} + q' \end{aligned} \tag{2.5.5}$$

と置くと陰境界条件は最終的に

$$\frac{\partial\phi_t}{\partial n} = \boldsymbol{N}\ \boldsymbol{\mathcal{M}}^{-1}\ \int_{S_s} -\phi_t\ \boldsymbol{N}ds + Q' \tag{2.5.6}$$

と書ける。また、自由表面の圧力境界条件は (2.4.44),(2.5.1) 式から

$$\phi_t = \Phi - \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 = -Z - \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 \tag{2.5.7}$$

となる。

複数の流体領域が存在する場合についても同様にして $\phi_{\kappa t}$ に関する境界条件を導くことができる。すなわち、(2.5.1) 式を (2.4.40),(2.4.43),(2.4.44) 式に代入して、物体表面の幾何学的境界条件は

$$\begin{aligned} \frac{\partial\phi_{\kappa t}}{\partial n} &= \boldsymbol{N}_\kappa\cdot\boldsymbol{\alpha} + q'_\kappa \\ q'_\kappa &= q_\kappa - \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{2}(\nabla\phi_\kappa)^2\right) \end{aligned} \tag{2.5.8}$$

物体表面の陰境界条件は

$$\frac{\partial\phi_{\kappa t}}{\partial n} = \boldsymbol{N}_\kappa\boldsymbol{\mathcal{M}}^{-1}\left\{\sum_{\kappa=1}^{\nu}\rho_\kappa\int_{S_{\kappa s}} -\phi_{\kappa t}\boldsymbol{N}_\kappa ds\right\} + Q'_\kappa \tag{2.5.9}$$

$$Q'_\kappa = \boldsymbol{N}_\kappa\boldsymbol{\mathcal{M}}^{-1}\left\{\sum_{\kappa=1}^{\nu}\rho_\kappa\int_{S_{\kappa s}}\left(-Z - \frac{1}{2}(\nabla\phi_\kappa)^2\right)\boldsymbol{N}_\kappa ds + \boldsymbol{F}_g - \boldsymbol{\beta}\right\} + q'_\kappa \tag{2.5.10}$$

自由表面条件は

$$\phi_{\kappa t} = -Z - \frac{1}{2}(\nabla\phi_\kappa)^2 \tag{2.5.11}$$

で与えられる。

2.5節では、加速度ポテンシャル Φ の物体表面の幾何学的境界条件から、ϕ_t の幾何学的境界条件を導いた。これは、Φ の勾配が流体加速度を与えるのに対し、ϕ_t の勾配は流体加速度を与えず、物理的な対応が明確でないためであった。しかし、速度ポテンシャル ϕ の物体表面の幾何学的境界条件式を時間微分して、直接 ϕ_t の幾何学的境界条件を導くことも可能である。その導出法については付録 A.1に示す。

2.6 結 言

本章では理想流体の仮定だけに立脚し、流体と浮体の連成運動を時間領域で解くための基礎として、加速度場において流体と物体との連立運動方程式を構築するための数学的な定式化を行い、次の結論を得た。

1. 加速度ポテンシャルを導入して理想流体のオイラーの微分方程式を積分方程式に変換した。
2. 物体表面での流体加速度の表示式を求め、これより加速度ポテンシャルの物体表面での幾何学的境界条件を導いた。
3. 物体の運動方程式をこの幾何学的境界条件に代入して、浮体表面で成り立つ陰境界条件を導いた。この陰境界条件は流体と物体の運動方程式を連立させる幾何学的かつ力学的境界条件である。
4. 加速度ポテンシャルの自由表面条件を示した。
5. 複数の流体領域と浮体との相互作用を取り扱うため、理論の拡張を行なった。
6. 加速度ポテンシャルはラプラスの式を満足しないため、ラプラスの式を満たす ϕ_t に関する境界値問題に置き換え、より数値計算に適した加速度場の定式化を行った。

第 3 章　時間領域の非線形数値計算法

3.1　緒 言

第 2 章では浮体と流体との連成運動を計算するための基礎として、加速度場の境界値問題を定式化し、浮体と流体との連成条件式を導いた。そこで第 3 章では、これらを応用し、時間領域で浮体と流体の連成運動をシミュレートする非線形数値計算法を構築する。

本論文では速度場および加速度場の境界値問題の数値解法として境界要素法を用いる。そこで、第 3 章の前半では境界要素を用いてグリーンの恒等式と陰境界条件式を離散化し、これら離散化式を行列演算形式に組み立てる。

第 3 章の後半では、浮体と流体の運動の時間追跡法を示す。本論文では自由表面の追跡に MEL を用い、時間積分には 4 次のルンゲ・クッタ法を用いる。

3.2　速度場および加速度場の境界値問題の数値解法

3.2.1　グリーンの式の離散化

Fig.2.1に示す自由表面 S_f 、固定壁面および底面 S_b 、そして自由浮体表面 S_s から構成された境界 S に囲まれた閉領域 Ω を例として、離散化手法を説明する。流体と浮体との連成運動はラプラスの式を満たす速度ポテンシャル ϕ およびその時間偏微分 ϕ_t を用いて記述される。ϕ と ϕ_t にグリーンの恒等式を適用すると 3 次元問題では $1/R$ を核関数に用いて

$$c(\mathcal{Q})\left\{\begin{array}{c}\phi(\mathcal{Q})\\ \phi_t(\mathcal{Q})\end{array}\right\}=\int_S\left\{\begin{array}{c}\phi(\mathcal{P})\\ \phi_t(\mathcal{P})\end{array}\right\}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R(\mathcal{P},\mathcal{Q})}\right)-\frac{1}{R(\mathcal{P},\mathcal{Q})}\left\{\begin{array}{c}\dfrac{\partial\phi(\mathcal{P})}{\partial n}\\ \dfrac{\partial\phi_t(\mathcal{P})}{\partial n}\end{array}\right\}dS\ , \tag{3.2.1}$$

が成り立つ。ここで、$\mathcal{P},\mathcal{Q}$ は境界上の点、$R(\mathcal{P},\mathcal{Q})$ は点 $\mathcal{P}\mathcal{Q}$ 間の距離、$c(\mathcal{Q})$ は点 $\mathcal{Q}$ における境界の立体角、積分は Cauchy の主値積分である。2 次元問題では $\ln R$ を核関数に用いて

$$c(\mathcal{Q})\left\{\begin{array}{c}\phi(\mathcal{Q})\\ \phi_t(\mathcal{Q})\end{array}\right\}=\int_S\left\{\begin{array}{c}\phi(\mathcal{P})\\ \phi_t(\mathcal{P})\end{array}\right\}\frac{\partial}{\partial n}\ln R(\mathcal{P},\mathcal{Q})-\ln R(\mathcal{P},\mathcal{Q})\left\{\begin{array}{c}\dfrac{\partial\phi(\mathcal{P})}{\partial n}\\ \dfrac{\partial\phi_t(\mathcal{P})}{\partial n}\end{array}\right\}dS\ , \tag{3.2.2}$$

となる。

離散化手法は 2 次元問題も 3 次元問題も同様であるので、ここでは ϕ に関する (3.2.1) 式を用いて説明する。(3.2.1) 式を離散化するため、境界 S を M 枚の要素 S_k, $k=1,2,\ldots,M$ で分割し、積分を各要素上の積分の総和として書き直すと

$$c(\mathcal{Q})\phi(\mathcal{Q})=\sum_{k=1}^{M}\int_{S_k}\left\{\phi(\mathcal{P})\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R(\mathcal{P},\mathcal{Q})}\right)-\frac{1}{R(\mathcal{P},\mathcal{Q})}\frac{\partial\phi(\mathcal{P})}{\partial n}\right\}dS \tag{3.2.3}$$

となる。

ここで要素は十分微小で、要素形状や要素上のポテンシャル値およびフラックス値が、各要素の局所座標系を用いて定義された多項式またはスプライン関数などで近似できるとすると、これらの近似関数を用いて要素上で積分を行なうことができる。しかし、一般に解析的に積分することは困難であるので、数値的に積分するのが普通である。そこで、各要素に数個の節点 $\hat{P}$ (Collocational points) を置き、この節点の座標、ポテンシャル値、そしてフラック値を用いて要素形状と要素上のポテンシャル値とフラックス値の分布を多項式またはスプラインなどで表現して数値積分を行う。このような節点を有する微小要素は境界要素と呼ばれ、境界要素を用いた離散化手法は総称して境界要素法と呼ばれる。

以下に境界要素を用いた具体的な離散化の説明に入る前に、記号の混同を避けるため本節で用いる離散化記号についてまとめておく。

総境界要素数	M
浮体表面上の境界要素数	M_S
要素番号を示す添字	k
節点を表す記号	$\hat{P}$
境界上の総節点数	N
浮体表面上の節点数	N_S
節点番号を示す添字	i or j
一要素当たりの節点数	n
一要素上のローカルな節点番号を示す添字	ℓ

さて最初に境界要素として最も簡単な 0 次要素を用いた離散化手法について述べる。0 次要素とは要素中央に節点を唯一つだけ持つ境界要素であり、要素番号 k と節点番号 j は一対一に対応するので $j \equiv k$ 、また総要素数 M と総節点数 N は等しく $M = N$ となる。0 次要素では要素内のポテンシャル値やフラックス値をこの節点 $\hat{P}_j$ の値で代表させ、要素上の積分を代表値に要素面積 ΔS_j を乗じた値で近似計算する。そこで 0 次要素を用いて (3.2.3) 式を積分して行列演算形に書き直す。式を簡潔に記述するため、節点の値を節点番号を添字として

$$\begin{aligned} c_i &= c(\hat{P}_i) \\ \phi_j &= \phi(\hat{P}_j) \\ \phi_{nj} &= \partial\phi(\hat{P}_j)/\partial n \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

と書き、さらに

$$\begin{aligned} H_{ij} &= \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R(\hat{P}_i,\hat{P}_j)}\right)\Delta S_j \\ G_{ij} &= \frac{1}{R(\hat{P}_i,\hat{P}_j)}\Delta S_j \end{aligned} \tag{3.2.5}$$

と書く。$\mathcal{Q}$ 点を節点 $\hat{P}_i$ 点に一致させると、(3.2.3) 式は

$$c_i\phi_i = \sum_{j=1}^{N} H_{ij}\phi_j - \sum_{j=1}^{N} G_{ij}\phi_{nj} \tag{3.2.6}$$

となり、ここで $H_{ii} - c_i$ を改めて H_{ii} と置いて離散化された方程式

$$\sum_{j=1}^{N} H_{ij}\phi_j = \sum_{j=1}^{N} G_{ij}\phi_{nj} \tag{3.2.7}$$

が得られる。

0 次要素は要素内のポテンシャル値やフラックス値を一定値で近似するため計算は簡単であるが、積分精度を上げるには非常に小さな境界要素を用いる必要がある。そこで実際にはより高次の境界要素が用いられる。境界要素法の解説は本論の主旨ではないが、後で物体表面の陰境界条件の離散化の説明を容易にするため、一境界要素に複数の節点を有する高次境界要素を用いた場合の離散化手法についても触れておく。今度は、要素番号 k と節点番号 j は一対一に対応しないし、境界要素の総数 M と節点の総数 N も一致しない。高次境界要素を用いると要素上の積分は一般に重みを用いて

$$\begin{aligned}\int_{S_k}\phi(\mathcal{P})\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R(\mathcal{P},\mathcal{Q})}\right)dS &= \sum_{\ell=1}^{n} w_{k\ell}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R(\hat{P}_i,\hat{P}_{k\ell})}\right)\Delta S_k\phi(\hat{P}_{k\ell}) \\ \int_{S_k}\frac{1}{R(\mathcal{P},\mathcal{Q})}\frac{\partial\phi(\mathcal{P})}{\partial n}dS &= \sum_{\ell=1}^{n} w_{k\ell}\frac{1}{R(\hat{P}_i,\hat{P}_{k\ell})}\Delta S_k\frac{\partial\phi(\hat{P}_{k\ell})}{\partial n}\end{aligned} \tag{3.2.8}$$

と書ける。ここで $\hat{P}_{k\ell}$ は k 番目の境界要素の ℓ 番目の節点で、$w_{k\ell}$ はその節点での重みである。この重みは要素上の値の近似関数 (境界要素の種類により多項式であったり、スプラインであったりする。) から計算できる。ここで 0 次要素の時と同様に

$$\begin{aligned}h_{ik\ell} &= w_{k\ell}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R(\hat{P}_i,\hat{P}_{k\ell})}\right)\Delta S_k \\ g_{ik\ell} &= w_{k\ell}\frac{1}{R(\hat{P}_i,\hat{P}_{k\ell})}\Delta S_k\end{aligned} \tag{3.2.9}$$

とおいて (3.2.8) 式を書き直すと境界要素 S_k 上の積分は

$$\begin{aligned}\int_{S_k}\phi(\mathcal{P})\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R(\mathcal{P},\mathcal{Q})}\right)dS &= \sum_{\ell=1}^{n} h_{ik\ell}\phi(\hat{P}_{k\ell}) \\ \int_{S_k}\frac{1}{R(\mathcal{P},\mathcal{Q})}\frac{\partial\phi(\mathcal{P})}{\partial n}dS &= \sum_{\ell=1}^{n} g_{ik\ell}\frac{\partial\phi(\hat{P}_{k\ell})}{\partial n}\end{aligned} \tag{3.2.10}$$

となる。そこで、0 次要素の時と同様に式を簡潔に記述するため

$$\begin{aligned}c_i &= c(\hat{P}_i) \\ \phi_{k\ell} &= \phi(\hat{P}_{k\ell}) \\ \phi_{nk\ell} &= \partial\phi(\hat{P}_{k\ell})/\partial n\end{aligned} \tag{3.2.11}$$

と書き、求めた (3.2.10) 式を (3.2.3) 式に代入して $\mathcal{Q}$ 点を節点 $\hat{P}_i$ 点に一致させると高次要素を用いた場合の離散化方程式

$$c_i\phi_i = \sum_{k=1}^{M}\sum_{\ell=1}^{n} h_{ik\ell}\phi_{k\ell} - \sum_{k=1}^{M}\sum_{\ell=1}^{n} g_{ik\ell}\phi_{nk\ell} \tag{3.2.12}$$

が得られる。

さて境界要素法では、節点を要素の辺上に配して要素間で値とその微係数の連続性を保つようにした適合要素を用いるのが一般的で、要素の辺や角で隣合う要素が節点を共有する。そこで、k 番目の要素にある ℓ 番目の節点と k' 番目の要素にある ℓ' 番目の節点とが空間的に同一座標にある節点で、その節点の通し番号が j であるとすると、(3.2.12) 式の要素

数 M と一要素が有する節点数 n に関する2重和のうち、同一節点に関する和を括り出して、

$$\begin{aligned} H_{ij} &= \sum_{k\ell \equiv j} h_{ik\ell} \\ G_{ij} &= \sum_{k\ell \equiv j} g_{ik\ell} \end{aligned} \tag{3.2.13}$$

とし、(3.2.12) 式を総節点数 N に関する和に書き直すと

$$c_i \phi_i = \sum_{j=1}^{N} H_{ij} \phi_j - \sum_{j=1}^{N} G_{ij} \phi_{nj} \tag{3.2.14}$$

となり、ここで $H_{ii} - c_i$ を改めて H_{ii} と置いて、離散化された方程式

$$\sum_{j=1}^{N} H_{ij} \phi_j = \sum_{j=1}^{N} G_{ij} \phi_{nj} \tag{3.2.15}$$

が得られる。(3.2.14), (3.2.15) 式は 0 次要素について求めた (3.2.6), (3.2.7) 式とまったく同型である。(3.2.15) 式を行列形で

$$\left[\quad \boldsymbol{H} \quad \right] \left\{ \boldsymbol{\phi} \right\} = \left[\quad \boldsymbol{G} \quad \right] \left\{ \boldsymbol{\phi}_n \right\} \tag{3.2.16}$$

と書く。$\left[\boldsymbol{H} \right]$ $\left[\boldsymbol{G} \right]$ は N 行 N 列の行列である。離散化したグリーンの式 (3.2.16) 中の速度ポテンシャル ϕ は、加速度場を解きたい場合には ϕ_t に置き換えればよい。要は境界条件が異なるだけのことであり、マトリックス H_{ij}, G_{ij} は速度場でも加速度場でも同じである。ただし加速度場を解く場合には、浮体表面で (2.5.6) 式で与えられる陰境界条件を満足させる必要があり、これには (2.5.6) 式も離散化して、(3.2.16) 式との連立方程式として解かなければならない。そこで次に陰境界条件 (2.5.6) 式の離散化について述べる。

3.2.2 陰境界条件式の離散化

3.2.1と同様の方法で2.5で示した浮体表面の陰境界条件式、(2.5.6) 式を離散化する。まず、浮体表面 S_s を M_s 枚の要素 $S_k, k = 1,2,\ldots,M_s$ で分割し、(2.5.6) 式の積分を各要素上の積分の総和として書き直すと

$$\frac{\partial \phi_t(\mathcal{Q})}{\partial n} = \boldsymbol{N}(\mathcal{Q})\, \boldsymbol{\mathcal{M}}^{-1} \sum_{k=1}^{M_s} \int_{S_k} -\phi_t(\mathcal{P})\, \boldsymbol{N}(\mathcal{P}) ds + Q'(\mathcal{Q}) \tag{3.2.17}$$

となる。ここで $\boldsymbol{N}(\mathcal{Q}), \boldsymbol{N}(\mathcal{P})$ は浮体表面 S_s 上の $\mathcal{Q}$ 点および $\mathcal{P}$ 点における一般化法線方向ベクトル、$\boldsymbol{\mathcal{M}}$ は浮体の一般化慣性テンソルであり、$Q'(\mathcal{Q})$ は (2.5.3) 式で積分形で与えられている。ここで (2.5.3) 式も離散化して積分を各要素上の積分の総和として書き直すと

$$\begin{aligned} Q'(\mathcal{Q}) &= \boldsymbol{N}(\mathcal{Q})\, \boldsymbol{\mathcal{M}}^{-1} \sum_{k=1}^{M_s} \int_{S_k} \left(-Z(\mathcal{P}) - \frac{1}{2} (\nabla \phi(\mathcal{P}))^2 \right) \boldsymbol{N}(\mathcal{P}) ds \\ &+ \boldsymbol{N}(\mathcal{Q})\, \boldsymbol{\mathcal{M}}^{-1} \left(\boldsymbol{F}_g - \boldsymbol{\beta} \right) + q - \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{2} (\nabla \phi(\mathcal{P}))^2 \right) \end{aligned} \tag{3.2.18}$$

となる。

つぎに3.2.1と同様に高次境界要素を用いて要素上の積分を

$$\int_{S_k} f(\mathcal{P})\ \boldsymbol{N}(\mathcal{P})ds = \sum_{\ell=1}^{n} w_{k\ell} f(\hat{P}_{k\ell})\ \boldsymbol{N}(\hat{P}_{k\ell})\Delta S_k \tag{3.2.19}$$

で近似する。ここで被積分関数 f は (3.2.17) 式の積分では $f \equiv -\phi_t$ であり、(3.2.18) 式の積分では $f \equiv -Z - \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2$ である。

これを用いて浮体表面 S_s 上の積分を各要素 $S_k, k = 1, 2, \ldots, M_s$ 上の積分の総和で表すと

$$\begin{aligned}
\int_{S_s} f(\mathcal{P})\ \boldsymbol{N}(\mathcal{P})ds &= \sum_{k=1}^{M_s} \int_{S_k} f(\mathcal{P})\ \boldsymbol{N}(\mathcal{P})ds \\
&= \sum_{k=1}^{M_s} \sum_{\ell=1}^{n} w_{k\ell} f(\hat{P}_{k\ell})\ \boldsymbol{N}(\hat{P}_{k\ell})\Delta S_k \\
&= \sum_{k=1}^{M_s} \sum_{\ell=1}^{n} \boldsymbol{e}_{k\ell} f(\hat{P}_{k\ell})
\end{aligned} \tag{3.2.20}$$

と書ける。ここで $\boldsymbol{e}_{k\ell}$ は

$$\boldsymbol{e}_{k\ell} = w_{k\ell}\ \boldsymbol{N}(\hat{P}_{k\ell})\Delta S_k \tag{3.2.21}$$

である。さらに境界上の節点が隣接する要素間で共有されていることを考慮して、k と ℓ に関する二重和のうち同一節点に関する和を括り出して

$$\boldsymbol{e}_j = \sum_{j \equiv k\ell} e_{k\ell} \tag{3.2.22}$$

と書くと、結局 (3.2.20) 式の積分は

$$\int_{S_s} f(\mathcal{P})\ \boldsymbol{N}(\mathcal{P})ds = \sum_{j=s_1}^{s_N} \boldsymbol{e}_j f(\hat{P}_j) \tag{3.2.23}$$

のように各節点 $\hat{P}_j$ の値 $f(\hat{P}_j)$ に重み $\boldsymbol{e}_j$ を乗じて浮体表面の節点番号 j ($j = \overbrace{s_1, \ldots, s_N}^{N_S\ nodes}$) にわたって足し合わせたものになる。(3.2.23) 式を行列形で

$$\int_{S_s} f(\mathcal{P})\ \boldsymbol{N}(\mathcal{P})ds = \begin{bmatrix} & \boldsymbol{e} & \end{bmatrix} \left\{ \boldsymbol{f} \right\} \tag{3.2.24}$$

と書く。ここで $\begin{bmatrix} & \boldsymbol{e} & \end{bmatrix}$ は 6 行 N_S 列の行列である。

(3.2.23) 式の f を $-\phi_t$ に置換して (3.2.17) 式に代入し、点 $\mathcal{Q}$ を節点 $\hat{P}_i$ に一致させると、

$$\frac{\partial \phi_t(\hat{P}_i)}{\partial n} = -\boldsymbol{N}(\hat{P}_i)\ \boldsymbol{\mathcal{M}}^{-1}\ \sum_{j=s_1}^{s_N} \boldsymbol{e}_j \phi_t(\hat{P}_j) + Q'(\hat{P}_i) \tag{3.2.25}$$

を得、ここで

$$A_{ij} = \boldsymbol{N}(\hat{P}_i)\ \boldsymbol{\mathcal{M}}^{-1}\ \boldsymbol{e}_j \tag{3.2.26}$$

とおいて、最終的に

$$\frac{\partial \phi_t(\hat{P}_i)}{\partial n} = -\sum_{j=s_1}^{s_N} A_{ij}\phi_{tj} + Q'_i \tag{3.2.27}$$

を得る。

また同様にして (3.2.23) 式の f を $-Z-\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2$ に置換して (3.2.18) 式に代入し、(3.2.26) 式の置換を行うと

$$\begin{aligned} Q_i' &= \sum_{j=s_1}^{s_N} A_{ij}\left(-Z_j-\frac{1}{2}(\nabla\phi_j)^2\right) \\ &+ \boldsymbol{N}_i\,\boldsymbol{\mathcal{M}}^{-1}\,(\boldsymbol{F}_g-\boldsymbol{\beta})+q_i-\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{2}(\nabla\phi_i)^2\right) \end{aligned} \tag{3.2.28}$$

を得る。右辺最後の項を正確に計算するのは多少厄介である。この項は加速度ポテンシャル Φ に関する境界値問題を、ϕ_t に関する境界値問題に置換した際に、Φ に含まれていた非線形項が境界条件に現れたものであり、ϕ_t の物体表面境界条件には省略できない重要な項である。この項を計算するには、物体表面近傍の流体内部の点で流体速度を計算し、差分により法線方向の勾配を求める方法が最も直接的である。しかし、この方法では内部点の位置により求める値が大きく変化して数値的に収束せず、正しい解が得られ難い。この項の計算には

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2\right)=-k(\nabla\phi)^2+\frac{\partial\phi}{\partial n}\left(-\frac{\partial^2\phi}{\partial s^2}\right)+\frac{\partial\phi}{\partial s}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial\phi}{\partial n}\right) \tag{3.2.29}$$

が役立つ。ここで k は物体表面の曲率で、式の導出は付録 A.2に示す。(3.2.29) 式の右辺はすべて物体表面の値だけを用いて評価できるので、流体内部の点における値を計算する必要はなく都合がよい。また (3.2.29) 式は物体表面の要素サイズに対しても安定した結果を与える。

(3.2.26) 式を行列形で

$$\left[\quad \boldsymbol{A} \quad\right]=\left[\boldsymbol{N}\right]\left[\,\boldsymbol{\mathcal{M}}\,\right]^{-1}\left[\quad \boldsymbol{e} \quad\right] \tag{3.2.30}$$

と書き、(3.2.27) 式を行列形で

$$\left\{\boldsymbol{\phi}_{tn}\right\}=-\left[\quad \boldsymbol{A} \quad\right]\left\{\boldsymbol{\phi}_t\right\}+\left\{\boldsymbol{Q}'\right\} \tag{3.2.31}$$

と書く。$\left[\,\boldsymbol{N}\,\right]$ は N_S 行 6 列、$\left[\,\boldsymbol{\mathcal{M}}\,\right]$ は 6 行 6 列、$\left[\,\boldsymbol{e}\,\right]$ は 6 行 N_S 列、$\left[\,\boldsymbol{A}\,\right]$ は N_S 行 N_S 列の行列である。

3.2.3 連立方程式の構築

加速度場を解くには (3.2.16) 式のポテンシャルを ϕ_t とした

$$\left[\quad \boldsymbol{H} \quad\right]\left\{\boldsymbol{\phi}_t\right\}=\left[\quad \boldsymbol{G} \quad\right]\left\{\boldsymbol{\phi}_{tn}\right\} \tag{3.2.32}$$

と離散化した陰境界条件 (3.2.31) 式とを連立させて解く必要がある。そこで次に連立方程式の構築法を示す。

まず浮体表面の境界値を、それ以外の境界値と区別するため $\phi'_t, \phi'_t n$ と書き、(3.2.32) 式の行と列を入れ換えて

$$\left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{H}_{11} & \boldsymbol{H}_{12} \\ \hline \boldsymbol{H}_{21} & \boldsymbol{H}_{22} \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \boldsymbol{\phi}_t \\ \hline \boldsymbol{\phi}'_t \end{array}\right\} = \left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{G}_{11} & \boldsymbol{G}_{12} \\ \hline \boldsymbol{G}_{21} & \boldsymbol{G}_{22} \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \boldsymbol{\phi}_{tn} \\ \hline \boldsymbol{\phi}'_{tn} \end{array}\right\} \tag{3.2.33}$$

とする。ここで $\left[\ \boldsymbol{H}\ \right], \left[\ \boldsymbol{G}\ \right]$ は N 行 N 列の全体行列であり $\left[\ \boldsymbol{H}_{ij}\ \right], \left[\ \boldsymbol{G}_{ij}\ \right]$ は部分行列である。$\left[\ \boldsymbol{H}_{22}\ \right], \left[\ \boldsymbol{G}_{22}\ \right]$ は N_S 行 N_S 列の行列で浮体表面節点の境界要素行列である。(3.2.33) 式に (3.2.31) 式を代入して

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{H}_{11} & \boldsymbol{H}_{12} \\ \hline \boldsymbol{H}_{21} & \boldsymbol{H}_{22} \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \boldsymbol{\phi}_t \\ \hline \boldsymbol{\phi}'_t \end{array}\right\} &= \left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{G}_{11} & \boldsymbol{G}_{12} \\ \hline \boldsymbol{G}_{21} & \boldsymbol{G}_{22} \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \boldsymbol{\phi}_{tn} \\ \hline -\boldsymbol{A}\boldsymbol{\phi}'_t + \boldsymbol{Q}' \end{array}\right\} \\ &= \left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{G}_{11} & -\boldsymbol{G}_{12}\boldsymbol{A} \\ \hline \boldsymbol{G}_{21} & -\boldsymbol{G}_{22}\boldsymbol{A} \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \boldsymbol{\phi}_{tn} \\ \hline \boldsymbol{\phi}'_t \end{array}\right\} \\ &\quad + \left\{\begin{array}{c} \boldsymbol{G}_{12}\boldsymbol{Q}' \\ \hline \boldsymbol{G}_{22}\boldsymbol{Q}' \end{array}\right\} \end{aligned} \tag{3.2.34}$$

を得、さらに整理して連立方程式

$$\left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{H}_{11} & \boldsymbol{H}_{12} + \boldsymbol{G}_{12}\boldsymbol{A} \\ \hline \boldsymbol{H}_{21} & \boldsymbol{H}_{22} + \boldsymbol{G}_{22}\boldsymbol{A} \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \boldsymbol{\phi}_t \\ \hline \boldsymbol{\phi}'_t \end{array}\right\} = \left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{G}_{11} & \boldsymbol{G}_{12} \\ \hline \boldsymbol{G}_{21} & \boldsymbol{G}_{22} \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \boldsymbol{\phi}_{tn} \\ \hline \boldsymbol{Q}' \end{array}\right\} \tag{3.2.35}$$

を得る。

連立方程式の構築法を具体的に示すため、(3.2.32) 式の行と列を入れ換えた (3.2.33) 式を用いたが、実際には $\left[\ \boldsymbol{A}\ \right]$ のサイズを空行列 $\emptyset$ を用いて N 行 N 列に拡張することで、行と列を入れ換ることなく連立方程式を構築することができる。すなわち、

$$\left[\ \mathring{\boldsymbol{A}}\ \right] = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & on\ S_s & \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c|c} \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \hline \emptyset & \boldsymbol{A} & \emptyset \\ \hline \emptyset & \emptyset & \emptyset \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ on\ S_s \\ \\ \end{array} \tag{3.2.36}$$

とすると、連立方程式は

$$\left[\begin{array}{c} \boldsymbol{H}+\boldsymbol{G}\mathring{\boldsymbol{A}} \end{array}\right]\left\{\begin{array}{c} \boldsymbol{\phi}_t \\ \hline \boldsymbol{\phi}'_t \\ \hline \boldsymbol{\phi}_t \end{array}\right\}=\left[\begin{array}{c} \boldsymbol{G} \end{array}\right]\left\{\begin{array}{c} \boldsymbol{\phi}_{tn} \\ \hline \boldsymbol{Q}' \\ \hline \boldsymbol{\phi}_{tn} \end{array}\right\} \tag{3.2.37}$$

で与えられる。

3.2.4 複数の流体領域が存在する場合の離散化と連立方程式の構築

浮体内外に 2 つの流体領域 Ω_1, Ω_2 が存在する場合を例に、離散化と連立方程式の構築法を示す。流体領域が 3 つ以上ある場合 (Fig.2.4) についても同様の方法で離散化と連立方程式の構築を行なうことができる。

まず、(3.2.16) 式を流体領域 Ω_1, Ω_2 に適用して、各領域での離散化方程式

$$\left[\begin{array}{c} \boldsymbol{H}_1 \end{array}\right]\left\{\boldsymbol{\phi}_{1t}\right\}=\left[\begin{array}{c} \boldsymbol{G}_1 \end{array}\right]\left\{\boldsymbol{\phi}_{1tn}\right\} \tag{3.2.38}$$

$$\left[\begin{array}{c} \boldsymbol{H}_2 \end{array}\right]\left\{\boldsymbol{\phi}_{2t}\right\}=\left[\begin{array}{c} \boldsymbol{G}_2 \end{array}\right]\left\{\boldsymbol{\phi}_{2tn}\right\} \tag{3.2.39}$$

を得る。(3.2.38,3.2.39) 式を統合した方程式を

$$\left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{H}_1 & \boldsymbol{\emptyset} \\ \hline \boldsymbol{\emptyset} & \boldsymbol{H}_2 \end{array}\right]\left\{\begin{array}{c} \boldsymbol{\phi}_{1t} \\ \hline \boldsymbol{\phi}_{2t} \end{array}\right\}=\left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{G}_1 & \boldsymbol{\emptyset} \\ \hline \boldsymbol{\emptyset} & \boldsymbol{G}_2 \end{array}\right]\left\{\begin{array}{c} \boldsymbol{\phi}_{1tn} \\ \hline \boldsymbol{\phi}_{2tn} \end{array}\right\} \tag{3.2.40}$$

とし、さらに簡単に

$$\left[\begin{array}{c} \boldsymbol{H} \end{array}\right]\left\{\boldsymbol{\phi}_t\right\}=\left[\begin{array}{c} \boldsymbol{G} \end{array}\right]\left\{\boldsymbol{\phi}_{tn}\right\} \tag{3.2.41}$$

で表す。

つぎに、陰境界条件 (2.5.4) 式を離散化するため、領域 Ω_1, Ω_2 の浮体表面での一般化法線方向行列 N_1, N_2 を部分行列とする N 行 6 列の一般化法線方向行列を

$$\left[\boldsymbol{N}\right]=\left[\begin{array}{c} \boldsymbol{\emptyset} \\ \boldsymbol{N}_1 \\ \boldsymbol{\emptyset} \\ \hline \boldsymbol{\emptyset} \\ \boldsymbol{N}_2 \\ \boldsymbol{\emptyset} \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \leftarrow on\ S_{1s} \\ \\ \\ \leftarrow on\ S_{2s} \\ \end{array} \tag{3.2.42}$$

と定義し、(3.2.24) 式と同様に積分を

$$\sum_{k=1}^{2}\int_{S_{sk}} f_k(\mathcal{P})\,\boldsymbol{N}_k(\mathcal{P})ds=\left[\begin{array}{c} \boldsymbol{e}_1 \end{array}\right]\left\{\boldsymbol{f}_1\right\}+\left[\begin{array}{c} \boldsymbol{e}_2 \end{array}\right]\left\{\boldsymbol{f}_2\right\}$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} \emptyset & \boldsymbol{e}_1 & \emptyset & \emptyset & \boldsymbol{e}_2 & \emptyset \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \emptyset \\ \boldsymbol{f}_1 \\ \emptyset \\ \hline \emptyset \\ \boldsymbol{f}_2 \\ \emptyset \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccc} & \boldsymbol{e} & \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \\ \boldsymbol{f} \\ \\ \end{array} \right\} \tag{3.2.43}$$

で離散化する。ここで $\left[\begin{array}{ccc} & \boldsymbol{e} & \end{array} \right]$ は 6 行 N 列の行列である。(3.2.36) 式に対応する N 行 N 列の行列 $\left[\mathring{\boldsymbol{A}} \right]$ は

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc} & \mathring{\boldsymbol{A}} & \end{array} \right] &= \left[\boldsymbol{N} \right] \left[\begin{array}{ccc} & \boldsymbol{\mathcal{M}} & \end{array} \right]^{-1} \left[\begin{array}{ccc} & \boldsymbol{e} & \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{c} \emptyset \\ \boldsymbol{N}_1 \\ \emptyset \\ \hline \emptyset \\ \boldsymbol{N}_2 \\ \emptyset \end{array} \right] \left[\boldsymbol{\mathcal{M}} \right]^{-1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} \emptyset & \boldsymbol{e}_1 & \emptyset & \emptyset & \boldsymbol{e}_2 & \emptyset \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \boldsymbol{N}_1\boldsymbol{\mathcal{M}}^{-1}\boldsymbol{e}_1 & \emptyset & \emptyset & \boxed{\boldsymbol{N}_1\boldsymbol{\mathcal{M}}^{-1}\boldsymbol{e}_2} & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \hline \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \boxed{\boldsymbol{N}_2\boldsymbol{\mathcal{M}}^{-1}\boldsymbol{e}_1} & \emptyset & \emptyset & \boldsymbol{N}_2\boldsymbol{\mathcal{M}}^{-1}\boldsymbol{e}_2 & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \end{array} \right] \end{aligned} \tag{3.2.44}$$

となる。ここで $\boxed{}$ で囲まれた部分行列は浮体を介した内部流体と外部流体との連成運動を表す項である。

そこで、これらを用いて陰境界条件 (2.5.4) 式を離散化すると

$$\left\{ \begin{array}{c} \emptyset \\ \boldsymbol{\phi}'_{1tn} \\ \emptyset \\ \hline \emptyset \\ \boldsymbol{\phi}'_{2tn} \\ \emptyset \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccc} & \mathring{\boldsymbol{A}} & \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \emptyset \\ \boldsymbol{\phi}'_{1t} \\ \emptyset \\ \hline \emptyset \\ \boldsymbol{\phi}'_{2t} \\ \emptyset \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \emptyset \\ \boldsymbol{Q}'_1 \\ \emptyset \\ \hline \emptyset \\ \boldsymbol{Q}'_2 \\ \emptyset \end{array} \right\} \tag{3.2.45}$$

となる。ここでも ϕ'_{1t}, ϕ'_{2t} は浮体表面の値である。これを (3.2.41) 式と組み合わせて離散化連立方程式

$$\left[\begin{array}{ccc} & \boldsymbol{H} + \boldsymbol{G}\mathring{\boldsymbol{A}} & \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\phi}_{1t} \\ \boldsymbol{\phi}'_{1t} \\ \boldsymbol{\phi}_{1t} \\ \hline \boldsymbol{\phi}_{2t} \\ \boldsymbol{\phi}'_{2t} \\ \boldsymbol{\phi}_{2t} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccc} & \boldsymbol{G} & \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\phi}_{1tn} \\ \boldsymbol{Q}'_1 \\ \boldsymbol{\phi}_{1tn} \\ \hline \boldsymbol{\phi}_{2tn} \\ \boldsymbol{Q}'_2 \\ \boldsymbol{\phi}_{2tn} \end{array} \right\} \tag{3.2.46}$$

を得る。

3.3 流体と浮体運動の時間領域非線形計算法

3.3.1 浮体運動の計算

(1) 浮体に働く流体力

速度場と加速度場の境界値問題を解くことで、浮体表面における流速 ϕ_n, ϕ_s と変動圧 ϕ_t が得られるので、これらをベルヌーイの式 (2.2.9) に代入して浮体表面での圧力分布を求めることができる。浮体に働く流体力は、圧力を (2.4.30) または (2.4.41) 式を用いて浮体表面で積分して計算する。この積分の計算は離散化式 (3.2.24) または (3.2.43) において、$f(P)$ を圧力と解釈して $\boldsymbol{F}_f = \left[\boldsymbol{e} \right]\{\boldsymbol{f}\}$ で与えられる。

(2) 浮体加速度

流体力 $\boldsymbol{F}_f$ が得られれば、浮体に作用する全外力は重力や係留力などの既知の外力を $\boldsymbol{F}_g$ として $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_f + \boldsymbol{F}_g$ で与えられるので、浮体の加速度は (2.4.36) 式で計算できる。

3.3.2 自由表面波動の計算

自由表面上の流体に固定された節点 i を追跡することで、自由表面を追跡する。これには速度場の解と自由表面の幾何学的および力学的境界条件を用いる。

幾何学的境界条件 (2.2.4) 式は、自由表面上の流体が常に自由表面上に留まることを示している。そこで、流体に固定された節点 i の位置を追跡することで時々刻々の自由表面形状を知ることができる。時刻 t における節点 i の位置を $\boldsymbol{X}_i(t) = (X_i, Y_i, Z_i)$ 、その点での自由表面の接線と方線方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{s}, \boldsymbol{n}$ とする。速度場の離散化境界値問題を解いて自由表面でのフラックス ϕ_n が求まれば、自由表面上では速度ポテンシャル ϕ は既知で、接線方向の勾配 ϕ_s が計算できるので、(2.2.4) 式より節点 i の速度 $\boldsymbol{V}_i(t)$ は

$$\boldsymbol{V}_i = \frac{D\boldsymbol{X}_i}{Dt} = \nabla\phi = \phi_s \boldsymbol{s} + \phi_n \boldsymbol{n} \tag{3.3.1}$$

で与えられ、時刻 $t + \Delta t$ における節点 i の位置は

$$\boldsymbol{X}_i(t + \Delta t) = \boldsymbol{X}_i(t) + \boldsymbol{V}_i \Delta t \tag{3.3.2}$$

で計算できる。

また、新しい位置での速度ポテンシャルの値は、力学的境界条件 (2.2.6) 式より

$$\phi_i(t + \Delta t) = \phi_i(t) + \{-Z + \frac{1}{2}(\nabla\phi_i(t))^2\}\Delta t \tag{3.3.3}$$

で与えられる。

以上の手法は混合オイラー・ラグランジェ法 (MEL) として知られており、非線形波の数値シミュレーションに好く用いられる手法である。

3.3.3 自由表面と浮体表面との交線および交点の取り扱い

自由表面と浮体表面との交線は線形理論においては特異点であり、時間領域の非線形計算法においても、衝撃荷重により浮体速度が不連続的に変化する場合には、交線の移動速度が非常に大きくなる。しかし、大振幅であっても通常の波浪中動揺においては交線の移動

速度は有限値であり、交線上に二重節点を配する方法を用いて、その運動を追跡することができる。

まず、Fig.3.1に示す2次元の場合を例に交点速度の計算法を説明する。自由表面と浮体表面の交点における流体の速度を $\boldsymbol{V}$ 、自由表面から交点に近づいた時の法線方向ベクトルを $\boldsymbol{n}_f$ 、浮体表面から交点に近づいた時の法線方向ベクトルを $\boldsymbol{n}_b$ とする。交点に二重節点を配して、一方を自由表面上の節点 P_f 、もう一方を浮体表面の節点 P_b と見なし、P_f には速度ポテンシャル ϕ を、P_b にはフラックス ϕ_{n_b} を境界条件として与える。二重節点においてポテンシャル値が等しい条件 $\phi(P_f)=\phi(P_b)$ を付加して境界値問題を解くと、P_f におけるフラックス ϕ_{n_f} が得られる。

一方、ϕ_{n_f} と ϕ_{n_b} は $\boldsymbol{V}$ の $\boldsymbol{n}_f$ 及び $\boldsymbol{n}_b$ 方向への投影であるから

$$\left.\begin{array}{rcl}\phi_{n_f} &=& \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}_f \\ \phi_{n_b} &=& \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}_b\end{array}\right\} \tag{3.3.4}$$

の関係があり、$\boldsymbol{V},\boldsymbol{n}_f,\boldsymbol{n}_f$ の成分をそれぞれ $(V_X,V_Z),(n_{b_X},n_{b_Z}),(n_{f_X},n_{f_Z})$ として、書き直すと

$$\left.\begin{array}{rcl}\phi_{n_f} &=& V_X n_{f_X}+V_Z n_{f_Z} \\ \phi_{n_b} &=& V_X n_{b_X}+V_Z n_{b_Z}\end{array}\right\} \tag{3.3.5}$$

となる。

$(n_{f_X},n_{f_Z}),(n_{b_X},n_{b_Z})$ は境界形状より既知であり、ϕ_{n_b} は境界条件として与えられ、ϕ_{n_f} は境界値問題を解いて得られる。そこで (3.3.5) 式を解いて (V_X,V_Z) が計算できる。

この方法は3次元の場合にも容易に拡張可能である。自由表面と浮体表面の交線上のある点における流体の速度を $\boldsymbol{V}$ 、その点の自由表面の法線方向ベクトルを $\boldsymbol{n}_f$ 、浮体表面の法線方向ベクトルを $\boldsymbol{n}_b$ 、交線の接線方向ベクトルを $\boldsymbol{s}$ とする。交線上の ϕ の分布は既知であるので ϕ_s も既知である。2次元の場合と同様に二重節点を配して、一方を自由表面上の節点 P_f 、もう一方を浮体表面の節点 P_b と見なして境界値問題を解くと、P_f におけるフラックス ϕ_{n_f} が得られる。

一方、$\phi_{n_f},\phi_{n_b},\phi_s$ は $\boldsymbol{V}$ の $\boldsymbol{n}_f,\boldsymbol{n}_b,\boldsymbol{s}$ 方向への投影であるから

$$\left.\begin{array}{rcl}\phi_{n_f} &=& \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}_f \\ \phi_{n_b} &=& \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}_b \\ \phi_s &=& \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{s}\end{array}\right\} \tag{3.3.6}$$

の関係があり、これを解いて $\boldsymbol{V}$ を決定できる。

3次元の場合には水面、水槽壁面、造波機面の交差する点や、箱船の角と水面の交点など、3面の交点が存在する。この点の運動を追跡するには三重節点を用いればよい。交点における流体の速度を $\boldsymbol{V}$ 、自由表面の法線方向ベクトルを $\boldsymbol{n}_f$ 、二つの物体表面の法線方向ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{n}_{b_1},\boldsymbol{n}_{b_2}$ とする。交点に自由表面上の節点として P_f 、物体表面の節点として P_{b_1},P_{b_2} の三重節点を配して境界値問題を解くと、P_f におけるフラックス ϕ_{n_f} が得られる。$\phi_{n_f},\phi_{n_{b_1}},\phi_{n_{b_2}}$ は $\boldsymbol{V}$ の $\boldsymbol{n}_f,\boldsymbol{n}_{b_1},\boldsymbol{n}_{b_2}$ 方向への投影であるから

$$\left.\begin{array}{rcl}\phi_{n_f} &=& \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}_f \\ \phi_{n_{b_1}} &=& \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}_{b_1} \\ \phi_{n_{b_2}} &=& \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}_{b_2}\end{array}\right\} \tag{3.3.7}$$

の関係があり、これを解いて $\boldsymbol{V}$ を決定できる。

3.4 水槽端および造波機からの反射波防止法

浮体の過渡水波中の動揺計算などの短時間の計算では、水槽長を少し長めに設定することで水槽端からの反射波の影響を小さくすることが可能である。しかし、規則波中での周期的定常状態を非線形計算したい場合には、周期的定常状態に達するまでに長時間の計算を要する。そこで現実的な水槽長で解を得るには、水槽端からの反射波を防ぐ必要がある。これには大別して水槽端で Sommerfeld の放射条件を用いる方法[78, 79, 80, 83, 84]と、減衰領域を設けて波動を減衰させる方法[37, 82, 85]がある。放射条件を用いる方法は、余分な計算領域を必要としないため、計算時間の点では有利であるが、不規則波や規則波でも非線形性の強い場合には高い消波効率が得られ難いようである。一方、減衰領域を設ける方法は、余分な計算領域を必要とするが、不規則波でも非線形性の強い場合でも高い消波効率が得られる柔軟性を有している。さらに減衰領域は造波機側にも設けることができるので、造波機からの再反射を防止することも可能である。そこで本論文では減衰領域を設けて波を減衰させる方法を用いる。

減衰領域では自由表面条件に人工的な減衰項を付加して入射波を減衰させる。この減衰領域は境界要素法などの積分方程式型の数値計算法でよく用いられる手法で、減衰領域における自由表面条件は波の進行方向を X として

$$\frac{D\phi}{Dt} = -Z + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - \nu(X_e)(\phi - \phi_e) \tag{3.4.1}$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \phi_Z - \nu(X_e)(\eta - \eta_e) \tag{3.4.2}$$

で与えられる。ここで減衰係数 $\nu(X_e)$ を含む項が減衰項である。 $\nu(X_e)$ は減衰領域の範囲

$$X_0 \leq X \leq X_1 = X_0 + \frac{2\pi\beta}{k} = X_0 + \beta\lambda \tag{3.4.3}$$

で定義された一階微分までが連続な関数

$$\nu(X) = \alpha\omega[\frac{k}{2\pi}(X - X_0)]^2 \tag{3.4.4}$$

で、α は減衰項の強さ、(3.4.3) 式の β は減衰領域の長さを調節する無次元化パラメータである。減衰項に含まれる ϕ_e, η_e は速度ポテンシャルと自由表面形状の参照値であり、減衰領域はこの参照値からのズレを減衰させるように働く。Fig.3.2に示すように減衰領域を単純な消波ビーチとして用いる場合には、静止時の値 $\phi_e = 0, \eta_e = 0$ を用いる。また Fig.3.3のように造波機側に減衰領域を設けて反射波だけを吸収する場合には、Fig.3.2の造波シミュレーションで速度ポテンシャルと波形を求めておき、これらを ϕ_e , η_e として用いればよい。より簡易な方法として線形解で代用することもできる。すなわちピストン造波機が作る進行波の線形解 [87]

$$\phi(X, Z, t) = \frac{4s\tanh kh \sinh kh}{\omega(2kh + \sinh 2kh)} \cosh k(Z + h)\cos(kX - \omega t) \tag{3.4.5}$$

$$\eta(X, t) = -\frac{\partial\phi}{\partial t}\bigg|_{Z=0} = \frac{4s\sinh^2 kh}{2kh + \sinh 2kh} \sin(kX - \omega t) \tag{3.4.6}$$

を ϕ_e , η_e として用いる。ここで s, ω は造波機の振幅と角周波数、 k は進行波の振幅と波数である。ピストン造波機と線形解を用いた減衰領域の組合せは、数値水槽に対する吸収式造波機として機能する。

3.5 非線形計算法の手順と時間積分

3.5.1 計算の手順

本非線形計算法では、次の (1) から (5) の手続きにより、与えられた初期条件から出発して時々刻々の運動を追跡する。

(1) ϕ に関する境界値問題を BEM で解いて速度場を決定する。
(2) 速度場の解を用いて加速度場の境界条件を定める。
(3) ϕ_t に関する境界値問題を BEM で解いて加速度場を決定する。
(4) 加速度場の解を用いて圧力分布、浮体に働く流体力、浮体の加速度などを計算する。
(5) 以上 (1) から (4) の結果を用いて次の時間ステップの自由表面形状や浮体の位置と姿勢などを求める。

Fig.3.4に計算のフローチャートを示す。手続き (2),(3) で加速度場を解いて圧力分布、浮体に働く流体力、浮体の加速度などを計算するのが特徴である。

本計算法を 1.2で述べた従来の計算法 (加速度場を解かず、速度場の解を用いて ϕ_t を後退差分で近似し浮体運動を計算する方法、以下では慣用計算法と書く) と対比するため、そのフローチャートを Fig.3.5に示す。速度場の解だけを用いて物体表面の圧力を計算するには、$\partial\phi/\partial t$ を後退時間差分で近似計算せざるをえない。すなわち、物体表面上の節点 i の時刻 t での速度ポテンシャル値を $\phi_i(t)$ 、節点 i の移動速度を $\boldsymbol{v}$ とすると、速度ポテンシャルの時間変化 $d\phi_i(t)/dt$ は

$$\frac{d\phi_i(t)}{dt} = \frac{\partial\phi_i(t)}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\phi_i(t) \tag{3.5.1}$$

で表せるので、$d\phi_i(t)/dt$ を後退差分で近似して、求める $\partial\phi_i/\partial t$ を

$$\frac{\partial\phi_i(t)}{\partial t} = \frac{\phi_i(t)-\phi_i(t-\Delta t)}{\Delta t} - \boldsymbol{v}\cdot\nabla\phi_i(t) \tag{3.5.2}$$

で計算する。この方法では、後退差分で近似計算した圧力を物体表面で積分して流体力を求め、これを用いて物体の加速度を計算し、これを時間積分して次の時間ステップの物体の姿勢や運動を求める。しかし、次のステップでは再び後退差分を用いて圧力を計算するので、後退差分と時間積分の繰り返しとなり、正しい解に収束する保証はない。時間領域の非線形シミュレーションでは流体と物体の連立運動方程式を、(2),(3) の手順で解いて初めて力学的に整合性の取れた数値解が得られる。本計算法と慣用計算法との具体的な精度の比較は第 4 章にて行なう。

3.5.2 ルンゲ·クッタ法による時間積分

3.3では自由表面や浮体運動の追跡法を $O(\Delta t)$ の陽な時間積分で簡明に説明した。しかし、実際の計算では高次の積分法を用いた方が、精度と計算時間の両面で有利である。そこで、$O(\Delta t^4)$ のルンゲ·クッタ法を時間積分に用いた場合の離散化積分式を示す。

時刻 t での状態がすべて分かっているとし、離散化積分式では自由表面上の節点を i 、その座標と速度ポテンシャルの値を $\boldsymbol{X}_i(t), \phi_i(t)$ 、浮体の位置と姿勢および速度を 6 自由度ベクトルで表記して $\boldsymbol{R}(t), \boldsymbol{U}(t)$ とする。境界形状は $\boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{R}$ に従って時々刻々変化するので、$S(t) = S(\boldsymbol{X}_i(t), \boldsymbol{R}(t))$ で表現し、その境界形状と境界条件について速度場および加速度場を解いて得られた速度ポテンシャルを $\phi(S(t))$ 、その時間偏微分を $\phi_t(S(t))$ で表記する。また、浮体加

速度は $\phi(S(t))$ と $\phi_t(S(t))$ から決定されるので、$\boldsymbol{\alpha}(\phi(S(t)),\phi_t(S(t)))$ と表記する。4 次のルンゲ·クッタ法は Δt 時間刻みを進めるにあたり、4 ステップの演算を要する。以下に各ステップの離散化積分式を示す。

第 1 ステップ

$$\left.\begin{array}{lcl}
\Delta \boldsymbol{X}_{i1} & = & \Delta t \nabla \phi(S(t)) \\
\Delta \phi_{i1} & = & \Delta t(-Z_i(t) + \frac{1}{2}(\nabla \phi(S(t)))^2) \\
\Delta \boldsymbol{U}_1 & = & \Delta t \boldsymbol{\alpha}(\phi(S(t)), \phi_t(S(t))) \\
\Delta \boldsymbol{R}_1 & = & \Delta t \boldsymbol{U}(t) \\
\boldsymbol{X}_{i1} & = & \boldsymbol{X}_i(t) + \frac{1}{2}\Delta \boldsymbol{X}_{i1} \\
\phi_{i1} & = & \phi_i(t) + \frac{1}{2}\Delta \phi_{i1} \\
\boldsymbol{U}_1 & = & \boldsymbol{U}(t) + \frac{1}{2}\Delta \boldsymbol{U}_1 \\
\boldsymbol{R}_1 & = & \boldsymbol{R}(t) + \frac{1}{2}\Delta \boldsymbol{R}_1 \\
S_1 & = & S(\boldsymbol{X}_{i1}, \boldsymbol{R}_1) \\
\phi(S_1) & \Leftarrow & B.E.M. \\
\phi_t(S_1) & \Leftarrow & B.E.M.
\end{array}\right\} \qquad (3.5.3)$$

第 2 ステップ

$$\left.\begin{array}{lcl}
\Delta \boldsymbol{X}_{i2} & = & \Delta t \nabla \phi(S_1) \\
\Delta \phi_2 & = & \Delta t(-Z_{i1} + \frac{1}{2}(\nabla \phi(S_1)^2)) \\
\Delta \boldsymbol{U}_2 & = & \Delta t \boldsymbol{\alpha}(\phi(S_1), \phi_t(S_1)) \\
\Delta \boldsymbol{R}_2 & = & \Delta t \boldsymbol{U}_1 \\
\boldsymbol{X}_{i2} & = & \boldsymbol{X}_i(t) + \frac{1}{2}\Delta \boldsymbol{X}_{i2} \\
\phi_{i2} & = & \phi_i(t) + \frac{1}{2}\Delta \phi_{i2} \\
\boldsymbol{U}_2 & = & \boldsymbol{U}(t) + \frac{1}{2}\Delta \boldsymbol{U}_2 \\
\boldsymbol{R}_2 & = & \boldsymbol{R}(t) + \frac{1}{2}\Delta \boldsymbol{R}_2 \\
S_2 & = & S(\boldsymbol{X}_{i2}, \boldsymbol{R}_2) \\
\phi(S_2) & \Leftarrow & B.E.M. \\
\phi_t(S_2) & \Leftarrow & B.E.M.
\end{array}\right\} \qquad (3.5.4)$$

第 3 ステップ

$$\left.\begin{array}{lcl}
\Delta \boldsymbol{X}_{i3} & = & \Delta t \nabla \phi(S_2) \\
\Delta \phi_3 & = & \Delta t(-Z_{i2} + \frac{1}{2}(\nabla \phi(S_2)^2)) \\
\Delta \boldsymbol{U}_3 & = & \Delta t \boldsymbol{\alpha}(\phi(S_2), \phi_t(S_2)) \\
\Delta \boldsymbol{R}_3 & = & \Delta t \boldsymbol{U}_2 \\
\boldsymbol{X}_{i3} & = & \boldsymbol{X}_i(t) + \Delta \boldsymbol{X}_{i3} \\
\phi_{i3} & = & \phi_i(t) + \Delta \phi_{i3} \\
\boldsymbol{U}_3 & = & \boldsymbol{U}(t) + \Delta \boldsymbol{U}_3 \\
\boldsymbol{R}_3 & = & \boldsymbol{R}(t) + \Delta \boldsymbol{R}_3 \\
S_3 & = & S(\boldsymbol{X}_{i3}, \boldsymbol{R}_3) \\
\phi(S_3) & \Leftarrow & B.E.M. \\
\phi_t(S_3) & \Leftarrow & B.E.M.
\end{array}\right\} \qquad (3.5.5)$$

第 4 ステップ

$$\left.\begin{array}{lcl}
\Delta \boldsymbol{X}_{i4} & = & \Delta t \nabla \phi(S_3) \\
\Delta \phi_4 & = & \Delta t(-Z_{i3} + \frac{1}{2}(\nabla \phi(S_3)^2)) \\
\Delta \boldsymbol{U}_4 & = & \Delta t \boldsymbol{\alpha}(\phi(S_3), \phi_t(S_3)) \\
\Delta \boldsymbol{R}_4 & = & \Delta t \boldsymbol{U}_3 \\
\boldsymbol{X}_i(t+\Delta t) & = & \boldsymbol{X}_i(t) + \frac{1}{6}(\Delta \boldsymbol{X}_{i1} + 2\Delta \boldsymbol{X}_{i2} + 2\Delta \boldsymbol{X}_{i3} + \Delta \boldsymbol{x}_{i4}) \\
\phi_i(t+\Delta t) & = & \phi_i(t) + \frac{1}{6}(\Delta \phi_1 + 2\Delta \phi_2 + 2\Delta \phi_3 + \Delta \phi_4) \\
\boldsymbol{U}(t+\Delta t) & = & \boldsymbol{U}(t) + \frac{1}{6}(\Delta \boldsymbol{U}_1 + 2\Delta \boldsymbol{U}_2 + 2\Delta \boldsymbol{U}_3 + \Delta \boldsymbol{U}_4) \\
\boldsymbol{R}(t+\Delta t) & = & \boldsymbol{R}(t) + \frac{1}{6}(\Delta \boldsymbol{R}_1 + 2\Delta \boldsymbol{R}_2 + 2\Delta \boldsymbol{R}_3 + \Delta \boldsymbol{R}_4) \\
S(t+\Delta t) & = & S(\boldsymbol{X}_i(t+\Delta t), \boldsymbol{R}(t+\Delta t)) \\
\phi(S(t+\Delta t)) & \Leftarrow & B.E.M. \\
\phi_t(S(t+\Delta t)) & \Leftarrow & B.E.M.
\end{array}\right\} \qquad (3.5.6)$$

4 次のルンゲ･クッタ法では各ステップ毎に、ϕ と ϕ_t を解く必要があるため、Δt 時間を進めるのに境界値問題を合計 8 回解く。これは $O(\Delta t)$ の積分法と比べて 4 倍の計算量であるが、波周期の 1/20 程度の大きな Δt を用いても安定で高精度な計算が可能であり、結果として計算時間を短縮することができる。

3.6 結 言

本章では第 2 章で定式化した速度場と加速度場の境界値問題を応用し、理想流体と浮体の連成運動の時間領域非線形数値計算法を構築した。

1. 速度場および加速度場の境界値問題を境界要素法で解くため、境界要素を用いたグリーンの式の離散化手法を示した。
2. 加速度場の浮体表面条件式である陰境界条件式の離散化を行なった。また、離散化されたグリーンの式と陰境界条件式をひとつの行列演算式に組み立て、浮体と流体の連成条件を満たす離散化方程式を構築した。
3. 複数の流体領域が存在する場合についても離散化を行い、浮体と複数の流体との連成条件を満たす離散化方程式を構築した。
4. これらの離散化方程式の解から浮体に働く流体力および浮体加速度を計算する方法を示した。
5. 速度場の離散化方程式の解から自由表面の運動を非線形計算する手法と、自由表面と浮体表面との交線および交点の取り扱い方を示した。
6. 波の減衰領域を用いた水槽端および造波機からの反射波防止法を示した。
7. 以上の方法を統合し、流体と浮体の連成運動を時間領域で数値計算する手順を示した。また、4 次のルンゲ･クッタ法による離散化時間積分式を示した。

第 4 章　数値計算法の検証

4.1　緒 言

第 4 章では第 3 章で構築した数値計算法の検証を行なう。本計算法の特徴は速度場と加速度場の両方を解く点にある。そして、この物理的な意味を考察すると、連続の式を満たすように速度場を解くことは質量保存則を満たす解を、オイラーの運動方程式を満たすように加速度場を解くことは運動量保存則を満たす解を求めることに他ならない。よって、本計算法の数値解は質量保存則、運動量保存則、それから理想流体を仮定しておりエネルギーの散逸がないので、エネルギーの保存則を原理的に満足し、空間的および時間的離散化に伴う誤差は、数値解がこれら保存則を満たす精度を調べることで定量的に評価できる。

そこで、第 4 章の前半では、2 次元浮体の閉領域中での大振幅動揺の計算結果が、これらの保存則を満たす精度を示すことで、本計算法の精度検証を行なう。また加速度場を解かない従来の慣用計算法との精度比較も行なう。

本計算法を用いて浮体運動の長時間計算を行うには、境界端に開境界条件を課し、反射波の影響を除く必要がある。そこで、第 3 章では開境界条件を近似的に満足させるために波の減衰領域を用いる方法を示した。第 4 章の後半は、この減衰領域の性能を波の反射率を計算することで定量的に評価する。

なお、第 4 章以降の 2 次元問題の計算では、Fig.4.1に示す座標系を用いる。

4.2　保存則による計算精度の検証

本節では、本計算法の精度を保存則に照らし合わせて定量的に評価するとともに、Fig.3.5に示した速度場の解だけを用いる慣用計算法との精度比較を行なう。

4.2.1　理想流体の質量, 運動量, エネルギー保存則と計算精度の検証法

計算開始から終了までの流体の体積変化、流体の運動量と境界が流体に与えた力積との釣り合い、流体の全エネルギー (位置エネルギーと運動エネルギーの和) と境界が流体になした仕事との釣り合いを調べることで、本計算法の精度を検証する。保存量を式で明示すると、

- 流体の体積

$$V_f = \sum_{\kappa=1}^{\nu} \iint_{\Omega_\kappa} dv = \sum_{\kappa=1}^{\nu} \int_{s_\kappa} Z\ n_Z\ ds \tag{4.2.1}$$

- 流体の運動量

$$\boldsymbol{P}_f = \sum_{\kappa=1}^{\nu} \iint_{\Omega_\kappa} \nabla\phi_\kappa\ dv = \sum_{\kappa=1}^{\nu} \int_{s_\kappa} \phi_\kappa\ \boldsymbol{n}\ ds \tag{4.2.2}$$

• 流体のエネルギー

$$E_f = \sum_{\kappa=1}^{\nu} \iint_{\Omega_\kappa} Z + \frac{1}{2}(\nabla\phi_\kappa)^2 dv = \frac{1}{2}\sum_{\kappa=1}^{\nu} \int_{s_\kappa} -Z^2 n_Z + \phi_\kappa \frac{\partial\phi_\kappa}{\partial n}\, ds \tag{4.2.3}$$

• 境界から流体に与えられた力積

$$\boldsymbol{I} = \sum_{\kappa=1}^{\nu} \int_0^t \int_{s_\kappa} p\, \boldsymbol{n}\, ds\, dt \tag{4.2.4}$$

• 境界から流体に与えられた仕事量

$$W = \sum_{\kappa=1}^{\nu} \int_0^t \int_{s_\kappa} p\, \frac{\partial\phi_\kappa}{\partial n}\, ds\, dt \tag{4.2.5}$$

となる。ここで総和記号 $\sum_{\kappa=1}^{\nu}$ は、流体領域が複数存在する場合には、各流体領域 Ω_κ について和をとることを示している。

これらの式から明らかなように、流体の体積 V_f 、運動量 $\boldsymbol{P}_f$ 、エネルギー E_f は速度場の解から計算できる量で、境界が流体に与える力積 $\boldsymbol{I}$ や仕事 W は加速度場の解を時間積分して得られる量である。加速度場が精度よく解けて境界上の圧力分布が正しく計算できていれば、$\boldsymbol{P}_f$ と $\boldsymbol{I}$ の計算結果は釣り合わなければならない。E_f と W についても同様である。

4.2.2 計算精度の検証

(1) 2 次元浮体の自由上下揺の計算

Fig.4.2に示す半円形状の底部を有する 2 次元浮体の、自由上下揺の計算精度を検証する。計算に用いた境界要素数は浮体表面が36、造波機面と垂直壁面がそれぞれ18、水底が20、自由表面が184である。自由上下揺は、浮体を水槽中央で排水量が自重の半分になる喫水線まで引き上げた状態から静かに放して励起させた。また、閉領域中での動揺であるので、計算には反射波の影響も含まれている。

まず、自由上下揺の計算波形をFig.4.3に示す。この浮体上下揺の固有周期は $T_h = 2.26\,s$ であり、時間刻みとして $\Delta t = T_h/320,\ T_h/160,\ T_h/80,\ T_h/40,\ T_h/20$ の 5 つを試した。Conventional Method と題した計算波形は、速度場の解だけを用いる慣用計算法によるもの、The Present Method と題した計算波形は、加速度場を解く本計算法によるものである。計算波形より本計算法はすべての時間刻みについてほぼ等しい結果を与えることが分かる。このことは本計算法が、1 周期 20 分割の粗い時間刻みでも十分収束した計算結果を与えることを示している。一方慣用計算法では、1 周期 160 分割程度でやっと収束した結果が得られている。

本計算法と慣用計算法との精度差は、保存量を調べることでさらに明確になる。まず、質量の保存状況をFig.4.4に示す。この図では本計算法と慣用計算法は、ともにすべての時間刻みで質量保存則を高精度で満足する計算結果を与えており、最大誤差は僅か 0.007% ほどであることが分かる。このことは双方の計算法で速度場の境界値問題が正確に解けていることを示している。

ところが、鉛直方向の運動量保存状況を示したFig.4.5では、計算精度の差が明確に現れている。この図は鉛直方向の運動量 $\boldsymbol{P}_f$ と力積 $\boldsymbol{I}$ を実線と破線で描いたもので、本計算法ではすべての時間刻みで、実線と破線が重なって区別できないほどよく一致しているのに対し、

慣用計算法では最も小さな時間刻み $\Delta t = T_h/320$ による計算でも一致度が低く、本計算法の $\Delta t = T_h/20$ の計算精度にすら及ばない。これは、慣用計算法では加速度場を解かずに、速度ポテンシャルの後退時間差分で変動圧を計算しているためで、運動方程式を解いていないのであるから運動量は保存しない。一方、加速度場を解く本計算法では、浮体と流体との連立運動方程式を解いているため、運動量の保存精度は良好である。

エネルギーの保存状況を示したFig.4.6にも、同様の傾向が示されている。やはり本計算法がすべての時間刻みで保存則をよく満たしているのに対し、慣用計算法では精度が低く $\Delta t = T_h/80$ でようやく保存則を満たす結果に収束している。閉領域の計算では浮体の上下揺れに伴い、平均水面の上下運動が生じるため、運動エネルギーの変動より位置エネルギーの変動が支配的となる。エネルギーと仕事の釣合を示すFig.4.6に、運動量と力積の釣り合いを示したFig.4.5ほど計算法の違いによる精度差が出ないのは、そのためである。

次に、数値解の精度と時間刻み対する収束性をより明確に示すため、時間刻みと運動量およびエネルギーの保存誤差との関係をFig.4.7に示す。ここでは運動量の保存誤差 Err_m およびエネルギーの保存誤差 Err_e を

$$Err_m^2 = \frac{\int_0^T (\boldsymbol{P}_f(t) - \boldsymbol{I}(t))^2 dt}{\int_0^T \boldsymbol{P}_f(t)^2 dt} \tag{4.2.6}$$

$$Err_e^2 = \frac{\int_0^T (E_f(t) - W(t))^2 dt}{\int_0^T E_f(t)^2 dt} \tag{4.2.7}$$

で定義した。T は計算時間である。Fig.4.7から本計算法は時間刻みに対して非常に安定しており、1周期20分割の粗い時間分割でも既に十分収束した計算結果を与えることが読みとれる。一方、慣用計算法はかなり小さな時間刻みを用いないと収束した解が得難いことが分かる。特に運動量保存に関しては収束速度が低く、1周期320分割でも十分に収束しないため、慣用計算法で数値的に収束した解を得るのは困難であると思われる。

(2) 2次元浮体の大振幅動揺の計算

次に、本計算法による同じ2次元浮体の大振幅過渡運動の計算結果をFig.4.8に示す。これはFig.4.2において、ピストン造波機を用いて波長 $\lambda = 4\ m$ の規則波を造波した場合の過渡運動で、造波機の周期と振幅は $T_w = 1.60\ s$, $a_{WM} = 10\ cm$ 、時間刻みは $\Delta t = T_w/40$ である。この計算では上下揺と左右揺の両振幅はそれぞれ喫水の約80%と約50%、横揺の両振幅はまだ過渡状態であるが約12°で、浮体はかなりの大振幅動揺を伴いながら波下へ流されている。

この計算における流体の水平、垂直方向の運動量と境界が流体に与えた力積をFig.4.9(1),(2) に、また流体の全エネルギーと境界が流体になした仕事をFig.4.9(3) に示す。これらの図では運動量と力積、エネルギーと仕事がともによく釣りあっており、本計算法は大振幅の計算においても運動量とエネルギー保存則を満たす高精度の数値解を与えることが示された。なお、この計算における流体の体積変化は0.003% 減で無視できる程度であった。

慣用計算法でも同じ計算を試みたが、計算が途中で発散して比較できる結果は得られな

かった。慣用計算法では精度と安定性の両面で問題がある。そこで以下では本計算法を用いた計算結果だけを示す。

(3) 液体貨物を積載する 2 次元浮体の大振幅過渡運動の計算

Fig.4.10に示す船体中央横断面形状 2 次元浮体の大振幅過渡運動を、3 種類の載荷状態について計算した結果を示す。図中の Cal.1 は比重 0.8 の固体貨物、Cal.2 は同じく比重 0.8 の液体貨物、Cal.3 は Cal.2 と同じ液体貨物を船槽中央に仕切を設けて積載した状態の計算を指す。計算は静止状態から始め、水槽左端のピストン造波機を用いて波長 $\lambda = 2\ m$ の入射波を発生させて浮体運動を励起した。造波機の周期と振幅は $T_w = 1.13\ s,\ a_{WM} = 4\ cm$ である。

まず、Fig.4.11, Fig.4.12, Fig.4.13に時刻 $t = 2.25T_w$ から $t = 3.75T_w$ の 7 つの瞬間について、自由表面形状と浮体の姿勢の計算結果を示す。これらの図が示すように浮体の運動も浮体内外の流体の運動もかなり大振幅で、特に波上側の相対水位変動の振幅は大きい。また、載荷状態の違いにより、浮体運動に差が見られる。

そこで次に、各載荷状態についての浮体運動の計算結果を Fig.4.14に比較して示す。Cal.1 と Cal.2 では大きな差が見られ、特に横揺の差は顕著である。浮体内の流体運動が左右揺と横揺に強く影響しているようである。一方、Cal.1 と Cal.3 との間には大きな差は認められない。これはタンク内の中央仕切により流体貨物の運動が制限されるため、浮体と載荷流体の相互作用があまり強くならないためと考えられる。

Cal.2 の計算における、流体の水平および垂直方向の運動量と境界が流体に与えた力積、また流体の全エネルギーと境界が流体になした仕事を Fig.4.15に示す。この図から、計算結果は運動量保存則とエネルギー保存則をともによく満足しており、浮体とその内外の流体との連成運動が正しく計算できていることが分かる。また質量の保存についても計算開始から終了までの間の質量変化は僅か 0.016% で無視できる程度である。

以上、2 次元の計算例で本計算法の精度を検証し、加速度場を解くことで原理どおり質量、運動量、エネルギーともに保存則を満足する数値解が得られることが確認できた。

4.3 減衰領域の性能検証

本節では、3.4で導入した減衰領域の消波性能を、波の反射率を計算することで定量的に評価し、減衰領域の自由表面条件に含まれるパラメータ、(3.4.3),(3.4.4) 式の α, β 、の最適値を求める。また、ピストン造波機と組み合わせて吸収式造波機を構成した場合の消波性能についても評価する。

4.3.1 消波性能

Fig.3.2に示す 2 次元水槽における規則波の造波シミュレーションの結果を用いて、右端に設けた減衰領域の消波性能を示す。計算に用いた要素数は造波機面と水槽右端壁面がそれぞれ 10 要素、水槽底面が 50 要素、自由表面が 100 要素で、自由表面の要素数は波長あたり 20 要素である。また、時間刻みは波周期 T_w の 1/20 である。

まず、Fig.4.16に造波開始から 45 波周期後の波の空間波形を、1 周期を 4 分割して示す。この計算の波傾斜は約 1/20 であり、減衰領域のパラメータは $\alpha = 1, \beta = 1$ である。図には減衰領域内で入射波の減衰する様子がよく示されている。この空間波形は周期的定常状態に達

した波形であり、さらに時間が経過しても変化しないことから、減衰領域の消波性能が良好であることが分かる。

減衰領域の消波性能を定量的に評価するには、反射率を求める必要がある。そこで次に、合田の方法[86]を用いて反射率を計算した結果をFig.4.17示す。合田の方法は隣接した2点で同時計測した波の時間波形から、入射波と反射波の波高を分離して反射率を計算する手法で、その概要は付録Dに記述する。図中のζ_1,ζ_2 はFig.4.16 に示した計算における $X_1 = 3.00, X_2 = 3.05$ の2点の波高の時間波形である。これらの時間波形に合田の方法を適用して入射波と反射波の振幅を分離したものが a_I, a_R であり、その比 a_R/a_I が反射率である。波が波高計測点に到達し定常状態に至った後($t > 10T_w$)の反射率の計算値は安定し、その値は約1.8%である。

反射率は減衰領域のパラメータ α, β によって変化する。そこでFig.4.18に $\beta = 1$ に固定し、α を変化させた場合の反射率の変化を示す。減衰効果が働かない $\alpha = 0$ の完全反射状態から α が大きくなるにつれて反射率は急減し、$\alpha \approx 1$ で極小となり、その後徐々に増加する傾向が見られる。これは大きな α を用いると、減衰領域自体からの反射が増加するためと考えられる。次にFig.4.19に $\alpha = 1$ に固定し、β を変化させた場合の反射率の変化を示す。減衰効果が働かない $\beta = 0$ の完全反射状態から β が大きくなるにつれて反射率は急減し、$\beta \geq 1$ で反射率はほぼ一定となっている。よって減衰領域の長さは1波長程度で十分であることが分かる。以上の結果からパラメータ α,β はともに1程度が適当であると考えられる。

次に反射率の波高依存性を見るため、Fig.4.20にパラメータを $\alpha = \beta = 1$ に固定し、波高を変化させた場合の反射率の変化を示す。白丸で示すのが減衰領域全体からの反射率である。波高が大きくなるにつれて反射率も若干増加するが、波高波長比約 1/12 の大波高でも3%弱(エネルギーでは1/1000以下)となっている。この値は試験水槽消波板の反射率と比しても十分満足できる値である。

なお、Fig.4.20に黒丸で示した値は、減衰領域端の垂直壁面からの反射波の成分である。この値は垂直壁面上の波振幅(垂直壁面上の定在波振幅の2分の1)と減衰領域への入射波の振幅との比を減衰率とし、垂直壁面からの反射波が減衰領域を一往復することを考慮して減衰率の自乗で概算した。減衰領域全体からの反射と比べて垂直壁面からの反射は僅かであることから、減衰領域からの反射の大半は、減衰効果を付加した自由表面からの反射であると考えられる。

4.3.2 吸収式造波機としての性能

次に、Fig.3.3に示すように、ピストン造波機の前に減衰領域を設けて吸収式造波機を構成した場合の消波性能を示す。この計算の要素分割および時間分割はFig.3.2の計算と同じであり、減衰領域のパラメータは $\alpha = \beta = 1$ とした。また、減衰領域の参照値 ϕ_e , η_e には、(3.4.5),(3.4.6)式で与えられるピストン造波機が作る進行波の線形解を用いた。

Fig.4.21は造波開始から十分時間が経ち(45波周期後)周期的定常状態に達した自由表面形状を1/4周期毎に示したもので、入射波と水槽右端からの反射波とが重畳して定在波が発生しているが、減衰領域内では反射波は急速に減衰し、目立った多重反射は存在しないことが分かる。

減衰領域を造波機の前面に配置した場合の反射率を定量的に計算することは難しいので、ここでは波振幅の時間変化を示すことで吸収式造波機の消波性能を検討する。Fig.4.22に $X = 3$ における波振幅の時間変化を示す。波振幅の時間変化は階段状に変化しており、最初

$t \approx 7T_w$ で入射波が到達して一定振幅となった後、$t \approx 17T_w$ で水槽右端からの反射波が到達して定在波となり、入射波の約2倍の波振幅となっている。その後の波振幅の変化はほとんど無く定常状態に達している。よって、多重反射はほとんど無く、減衰領域を消波ビーチとして用いた場合と同様に反射率は十分小さいと考えられる。

最後に、減衰領域の参照値 ϕ_e , η_e として、造波シミュレーションにより求めた非線形解を用いた場合と、(3.4.5),(3.4.6) 式の線形解を用いた場合の、波形状の差をFig.4.23に示す。これは造波開始後、4 周期目から 5 周期目の 1/4 周期毎の自由表面形状で、実線は線形解を、破線は非線形解を参照値に用いた計算結果である。この計算では造波開始後の最初の 1 周期は造波機を緩起動させているため、減衰は2 周期目から効かせている。破線と比して実線は非線形解と線形解の差が減衰効果として働くため、波高が若干低くなっており、波の前面の形状にも差が見られる。よって、厳密な非線形造波シミュレーションを行なうのが目的である場合は、参照値に線形解を用いることはできない。しかし、浮体運動の長時間計算を行なうのが目的である場合は、減衰領域と造波機とを一体として吸収式造波装置と見なし、その造波特性が明確であればよいので、参照値による差はあまり問題にならないと考えられる。

4.4 結 言

本章では、第 3 章で構築した数値計算法の検証を行ない、次の結論を得た。

1. 本計算法を用いて、閉領域中の 2 次元浮体の自由上下揺、規則波中の 3 自由度大振幅動揺、液体貨物を積載した場合の大振幅過渡運動の計算を実施し、数値解が理論どおり質量、運動量、エネルギー保存則を高精度で満足することを示した。
2. このことから、本計算法の空間的および時間的離散化に伴う誤差は僅かであり、高精度で浮体と流体との連成運動をシミュレートできることが裏付けられた。
3. 減衰領域の消波性能を定量的に評価するため、波の反射率を合田の方法で概算した結果、波形勾配が小さい波では 1.8% 程度、波形勾配の大きな波に対しても波高比で 3% 未満であり、良好な消波性能を有していることが分かった。
4. また、造波機と減衰領域を組み合わせて吸収式造波機を構成した場合でも、多重反射はほとんどなく、吸収式造波機とし実用的な性能を有することが分かった。
5. 以上の研究により、本計算法を用いて数値造波水槽を構築し、浮体運動の波浪中での長時間計算を行なうことが可能となった。

第 5 章　数値計算と実験との比較

5.1　緒 言

本論文では第 2 章, 第 3 章, 第 4 章を通して浮体運動を時間領域で非線形計算するための理論、数値計算法、計算精度について述べてきた。そこで第 5 章では、本計算法の具体的な応用例として、船体中央横断面形状およびフレアを有する船首部横断面形状の 2 種類の 2 次元浮体の規則波中での運動を計算し、実験結果との比較検討を行なう。本章では以後、船体中央横断面形状の浮体を船体中央浮体、船首部横断面形状浮体を船首部浮体と略称する。

5.2　水槽実験の概要

数値計算は実験状態をできるだけ忠実に再現するように行なったので、実験の概要から先に説明する。

5.2.1　実験施設と供試模型の概要

実験は船舶技術研究所運動性能部の動揺水槽において実施した。動揺水槽の見取り図を Fig.5.1に示す。本試験水槽の主要寸法は有効長 37m、幅 8m、水深 4.5m で、造波装置として油圧式プラップ型造波機を備えている。この造波機は吸収式ではないため、有効な計測時間は浮体による散乱波が造波機で反射され、再び浮体に到達するまでに限られている。浮体を水槽中央に配した時の有効計測時間 (浮体に入射波が到達してから、反射波が到達するまでの計測時間) を Table 5.1 に示す。この値は造波開始時に放射される長波長成分波は無視し規則波成分だけを考慮した値である。浮体に入射波が到達した後、係留系の長周期運動を含む過渡現象が減衰して周期的定常状態に収束するまでには、波周期を T_w として少なくとも $10T_w$ 程度の時間が必要であり、さらに $5T_w$ の計測時間を確保すると、必要な有効計測時間は $15T_w$ となる。この要件を満たす波長は $\lambda \leq 5m$ であるので、本実験では $1m \leq \lambda \leq 5m$ の波長域の規則波を用い、これに対する浮体の応答を計測の対象とした。なお、動揺水槽の造波機は数値計算で用いたピストン型造波機とは形式が異なるが、発生した進行波は造波機遠方ではどちらの造波機でも大差はないので、計算との比較に支障はないと考えられる。

動揺水槽中央には浮体近傍での 2 次元性を保つため、浮体を挟んで整流板を設置した。Fig.5.2に整流板の取り付け状況を示す。整流板の寸法は長さ 3m、幅 1m、深さ 1.8m で牽引台車の下部に取り付けた。

実験で供試模型として用いた船体中央浮体と船首部浮体の形状を Fig.5.3と Fig.5.4に、その主要目を Table 5.2 と Table 5.3 に示す。

5.2.2 計測装置および計測項目

本実験の計測項目は浮体の3自由度運動(左右揺、上下揺、横揺)、水平方向の波浪強制力、船側水圧である。

3自由度運動は牽引台車に設置した動揺計測装置を用いて計測した。動揺計測装置の略図をFig.5.5に示す。本動揺計測装置は浮体の左右揺、上下揺、横揺に滑らかに追従するキャリッジ、ヒーブロッド、ジンバルから構成されており、浮体はその重心がジンバルの回転軸と一致するよう取り付けた。本動揺計測装置の計測範囲は左右揺 $\pm 40cm$ 、上下揺 $\pm 20cm$ 、横揺 $\pm 30°$ である。実験中に浮体が際限なく漂流して左右揺計測範囲外に出ないようにキャリッジは弱いバネと零点シフト用の重りで水平方向に係留されており、係留系全体としてのバネ常数は $51N/m$ である。

水平方向の波浪強制力は、浮体の左右揺を2階微分して計算した加速度に浮体質量を掛けて求めた。ただし、動揺計測装置の慣性力と摩擦力、係留装置の復元力は、ヒーブロッドとジンバルの間に取り付けた検力計の計測値を用いて補正した。この検力計の計測値は、浮体からヒーブロッドを介して動揺計測装置へ伝達される水平方向力であり、補正は以下の方法で簡単に行なえる。

浮体の質量を M 、計測装置一式の質量を m 、波浪強制力を F 、動揺計測装置に働く摩擦力や係留装置の復元力などの外力を G 、検力計で計測される荷重を f とし、計測系は十分剛で浮体と動揺計測装置の水平方向の加速度は同じ値 α であるとすると、計測系全体の運動方程式は

$$F + G = (M + m)\alpha \tag{5.2.1}$$

動揺計測装置の運動方程式は

$$f + G = m\alpha \tag{5.2.2}$$

となる。これらから G を消去して波浪強制力

$$F = M\alpha + f \tag{5.2.3}$$

を得る。

船側水圧はFig.5.3とFig.5.4に白丸で示した $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \ldots, \mathrm{P}_8$ の水圧計で計測した。この水圧計の最大測定圧は $2kg/cm^2$ 、受圧面直径は $6mm$ 、固有振動数は $14KHz$ である。

これら計測装置の寸法と重量を、まとめてTable 5.4 に示す。

5.3 数値計算の概要

Fig.5.6に計算モデルを図示する。計算では水槽長は4波長+減衰領域1波長 $\times 2$ の6波長、水深は1波長とした。計算に用いた境界要素数は造波機面と水槽右端壁面がそれぞれ10要素、水槽底面が50要素、自由表面が120要素、浮体表面が船体中央浮体と船首部浮体ともに34要素である。計算の時間刻みは波周期の1/20であるが、大振幅動揺が発生して1/20では発散する場合には $1/40, 1/80$ とした。

水槽左端の減衰領域では、その参照値としてピストン造波機がつくる線形進行波の解析解(3.4.5),(3.4.6)を用いた。この計算では水槽両端で放射条件が近似的に満たされているため、反射波による計算時間の制限はなく、水槽中央に配置した浮体の運動を長時間にわたり計算することが可能である。

浮体の形状や主要寸法、係留系のバネ定数などの計算条件の詳細は、水槽実験の概要で示した値と同じ値を用いた。また計算においては実験状態を忠実に再現するため、係留装置や動揺計測装置の運動も計算に含めた。

5.4 計算結果と実験結果との比較

5.4.1 船体中央浮体の規則波中動揺の計算と実験

(1) 浮体動揺および波浪強制力

まず、船体中央浮体の規則波中動揺および波浪強制力の計算結果と実験結果を、波長が $1.8m, 2.7m, 3.6m$ の 3 点、波高が $5cm, 10cm$ の 2 点、その組合せで計 6 点の入射波について比較して、Fig.5.7からFig.5.12に示す。図中の左列は計算値、右列は対応する実験値の時系列波形である。計算では造波開始から 50 波周期をシミュレートした。図の横軸は波周期で無次元化した時間である。実験では造波機からの反射波があるため、Table 5.1 に示した有効計測時間外では、反射波の影響により計測波形に乱れがあり、計算結果との比較は有効計測時間内に限られる。

浮体の水平方向の運動には入射波の強制力による左右揺と、入射波の定常波漂流力に対する係留系のステップ応答としての長周期動揺の成分がある。左右揺の成分は入射波の到達後すぐに一定振幅の運動へと収束しているが、係留系の長周期動揺の成分はゆっくりと減衰し、最終的には係留系の復元力と定常波漂流力とが釣り合う位置へと収束する。水平方向運動の計算結果と実験結果を比較すると、左右揺の振幅については全般的によく一致しており、左右揺の波浪強制力の比較でも、計算結果と実験結果はよく一致している。また、浮体の漂流距離 (初期位置から係留系の復元力が定常波漂流力と釣り合う位置までの距離) についても、計算値は実験値と概ね一致しており、定常波漂流力の計算値も妥当であると思われる。一方、長周期動揺の減衰については、計算結果は実験結果より少し弱い。この原因は、理想流体を仮定した本計算法では、粘性抵抗や渦抵抗が考慮されていないためと考えられる。長周期動揺に対する主な減衰力は、波漂流減衰力と粘性減衰力である。本計算法では減衰力として最も支配的な波漂流減衰力は計算に含まれているが、理想流体を仮定しているため、粘性減衰力は含まれていない。そこで計算では実験より減衰力が弱く、長周期動揺の収束も遅い。本計算法を用いて波漂流減衰力を求める方法については (3) で後述する。

上下揺は水平方向の運動の影響をあまり受けず、入射波周期の定常運動へと迅速に収束している。上下揺振幅の計算結果と実験結果の比較では、長波長の場合はよく一致しているが、短波長では計算結果は実験結果より少し大きな値となっている。

横揺には水平方向の運動の影響が少し認められ、減衰力も他の運動と比較して小さいため、周期的定常運動への収束に時間を要しているが、計算終了時刻 ($t = 50T_w$) には波下側への定常傾斜角まわりの周期運動へと概ね収束している。横揺振幅については計算結果は実験結果より少し大きな値を与えている。この原因も、計算に減衰力として粘性抵抗や渦抵抗が考慮されていないためと考えられる。一方、Fig.5.10 に示す短波長規則波中での定常傾斜角については計算は実験とよく一致している。実験の過渡状態時の横揺波形に大きな乱れがあるのは、実験では波の前面がかなり急峻で、浮体に衝撃的な横揺モーメントが作用したためである。横揺の定常傾斜角は、横揺モーメントの計算波形に見られる非対象性に起因する。計算波形では正のピーク値 (浮体を波上側に傾斜させるモーメント) が負のピー

ク値より大きいが、持続時間では負のモーメントがかなり長いため、平均値は負となり、浮体は波下側へ定傾斜することが分かる。

(2) 浮体表面の流体圧力

本計算法では(1)で示した浮体運動や流体力を、浮体表面圧力を積分して計算している。そこで次に、浮体表面圧力の計算値と計測値との比較を行なう。Fig.5.3に白丸で示した点P1からP8における圧力変動の計算波形を、計測波形と比較してFig.5.13に示す。これらの波形は静止時の各位置での圧力を基準に示されている。この計算では入射波の波長は$2.7m$、波高は$10cm$で、Fig.5.11と同じ計算である。計算波形と実験波形は全般的によく一致しているといえる。圧力変動の振幅で計算値が計測値を少し上回っているのは、浮体の動揺振幅の計算値が実験値より大きいからである。また、計測波形に多少ドリフトが見られるのは、水圧計をフルレンジの1%程度の精度限界で用いているためである。

個々の波形について比較すると、点P1は空中に露出したままであり、圧力は0である。点P2からP5は相対水位変動に応じて水面からの出入りがある点で、計算波形にも実験波形にも水面からの出入りがあることが示されている。水圧計は空気と水との熱伝導率の違いに起因する温度ショックに敏感であるため、水面から出入りする点では計測精度が悪い。しかし、非線形計算では水から出入りする様子も忠実に計算できるため、水圧については計算値の方が信頼できると考えられる。点P6は水面から露出しない点であるが、圧力変動の計算波形には非対象性が見られ、負圧側のピークが正圧側のピークより尖った形状をしている。計算波形ほど明確ではないが、計測波形にも同様の非対象波形が認められる。ビルジ部の点P7では計算波形の負圧側のピークに乱れが見られ、計測波形にも乱れが認められる。これはビルジ部を回る流速が速く、動圧成分が大きいためと考えられる。船底中央の点P8の圧力変動についても計算波形と計測波形はよく一致している。

(3) 長周期動揺と入射波との相互作用

浮体が規則波中を微速前進すると、入射波に対して向波方向に進む時と、追波方向に進む時とで出会波周期に差が生じるため、定常波漂流力にも差が生じる。これと同じ理由により、係留された浮体が入射波周期の運動と比べて長周期で大振幅な水平運動を行なうと、出会波周期が変動し、波漂流力も変動する。これは長周期動揺と入射波との相互作用のひとつであり、波漂流減衰力の発生要因となっている。

係留系の長周期動揺と入射波の相互作用は、これまでにWicheres and Slujis [58], 斉藤, 高木, 大久保, 平島 [61], Faltinsen [59], Hearn and Tong [63], Nossen, Grue and Palm [65], Zhao and Faltinsen [64], Eatock Taylor and Teng [67], 砂原 [70], Newman [69]らにより研究され、波漂流減衰力を主な研究対象として、理論と実験の両面から論じられて来た。これらの研究の大半は波漂流減衰力を定常波漂流力の定常漂流速度に対する変化率、すなわち準静的な力として扱い、実験においても準静的な手法で波漂流減衰力を計測している。しかし、実際には長周期動揺は周期運動であり、漂流速度と漂流力は位相差を持って周期変動する。準静的な考え方では、周期無限大の極限を想定し、漂流速度と漂流力との位相差は無視されている。このため入射波と長周期動揺の相互作用に起因する流体力の減衰力成分として、波漂流減衰力を理解するには不十分であると思われる。また位相差の存在は、相互作用に起因する流体

力に減衰力成分だけではなく、付加質量成分も存在することを意味する。付加質量成分の存在は木下, 高岩, 村上, 増田 [62]により実験で確認されており、その特性についても報告されている。

そこで、本計算法を用いて入射波と長周期動揺の相互作用を数値解析し、付加質量成分ならびに減衰力成分の合理的な解釈を試みる。本計算法の数値解は動的相互作用を含むが、粘性影響は含まないため、相互作用を純粋に解析するのに好都合で、計算結果の考察から波漂流減衰力などをより合理的に解釈することができる。本節ではFig.5.11に示した入射波 ($\lambda = 2.7\ m,\ h_w = 10\ cm$) 中での長周期動揺を例に、長周期動揺と入射波の相互作用について解析する。

最初に、係留系の平水中での特性を明らかにする。Fig.5.14に示す波形は、時刻 $t = 0$ において定常波漂流力に相当する水平方向の一定外力を、平水中の浮体に加えた時の係留系のステップ応答を本計算法でシミュレートした結果である。この計算では、平水中の浮体の長周期動揺の周波数は $\tilde{\omega}_o = 0.384\ rad/s$ で、減衰はほとんど無い。この計算結果をフーリエ解析して長周期動揺に対する付加質量と減衰係数を計算すると、$m_{sd}(\tilde{\omega}_o) = 155.75\ kg,\ \ c_{sd}(\tilde{\omega}_o) = 0.1091\ N/(m/s)$ が得られる。周波数 $\tilde{\omega}_o$ に対応する波長は約 $390m$ で浮体幅の520倍以上もあるため、これらの流体力係数は $\omega \to 0$ の極限値 $m_{sd}(0) = 148.56\ kg,\ \ c_{sd}(0) = 0\ N/(m/s)$ にほぼ等しい値となっている。

さて、Fig.5.11に示した計算結果からFFTを用いて入射波の周波数成分を除去し、漂流速度 U と長周期流体力 F_X を抽出してFig.5.15に示す。F_X の波形には定常波漂流力の成分 $\bar{F}_X$ に重畳して、長周期動揺の周波数で変動する成分 $\tilde{F}_X$ が認められる。この計算結果では長周期動揺の周波数は $\tilde{\omega} = 0.420\ rad/s$ で、平水中の周波数と差がある。また減衰も強く、これらの差は変動成分 $\tilde{F}_X$ の作用と考えられる。

ところで、$\tilde{F}_X$ には浮体の長周期動揺に対する付加質量と減衰係数に相当する流体力も含まれているため、長周期動揺と入射波の相互作用を純粋に抽出するには、これらを除去する必要がある。これにはFig.5.15の波形は過渡応答であるため適当でない。そこで、長周期動揺と同期して周波数 $\tilde{\omega}$ で変動する水平方向の外力 G_X を浮体に加え、波長 $2.7m$ 、波高 $10cm$ の規則波中で長周期動揺が周期的定常状態に達するまでの長時間シミュレーションを実施した。計算に用いた G_X の振幅は $|G_X| = 1.8\ N$ で、この値は定常波漂流力の 20% に相当する。

計算結果をFig.5.16に示す。最上段は計算開始から計算終了までの浮体の水平方向の運動で、$2 \sim 4$ 段には長周期動揺がほぼ周期的定常状態に達した $t = 150T_w$ から $t = 200T_w$ までの浮体の水平方向変位、速度、および水平方向の流体力が拡大して示されている。$5 \sim 7$ 段は、これらからFFTを用いて入射波の周波数成分を除去した波形で、長周期流体力 F_X の波形には定常波漂流力の成分 $\bar{F}_X$ に重畳して、周波数 $\tilde{\omega}$ で変動する成分 $\tilde{F}_X$ がより明確に認められる。この変動成分には浮体の長周期動揺による付加質量 $m_{sd}(\tilde{\omega})$ や減衰係数 $c_{sd}(\tilde{\omega})$ に相当する流体力 F_{sd} も含まれているので、これを除去し長周期動揺と入射波の相互作用による流体力を抽出すると最下段に示す波形が得られる。ここでは、この流体力 $F_{wd} = F_X - F_{sd}$ を波漂流力と呼ぶことにする。F_{wd} の定常成分が定常波漂流力である。

F_{sd} は平水中における浮体の水平方向の強制変位運動の数値計算から正確に求めることができる。Fig.5.17に Fig.5.16と同じ振幅と周波数で浮体を強制動揺させた場合の計算結果を示す。最上段は計算開始から計算終了までの浮体の水平方向変位であり、以下の3段には

$t = 150T_w$ から $t = 200T_w$ までの変位、速度、および水平方向の流体力が拡大して示されている。この水平方向の流体力が F_{sd} である。

さて、Fig.5.16では F_{wd} と U がほぼ逆位相になっており、F_{wd} は長周期動揺に対して主に減衰力として作用することが分かる。より、定量的に調べるため、フーリエ解析を行って F_{wd} と U の振幅 $|F_{wd}|, |U|$ および位相差 θ を求めると、$|F_{wd}| = 1.814\ N$, $|U| = 0.0551\ m/s$, $\theta = 2.712\ rad.$ となる。ここで $|F_{wd}| = |G_X|$ がほぼ成り立っているのは、長周期動揺が周期的定常状態に達し、起振力と減衰力が釣り合っているからである。Fig.5.16と Fig.5.17に示した二つの独立した計算結果から得られた $|F_{wd}|$ の値が $|G_X|$ とよく釣り合っていることからも、本計算の精度が良好であることが分かる。

ここで、

$$U = |U| \sin \tilde{\omega} t \tag{5.4.1}$$

と置き、F_{wd} を $\sin, \cos$ 成分に分解すると

$$F_{wd} = |F_{wd}| \cos\theta \sin \tilde{\omega} t + |F_{wd}| \sin\theta \cos \tilde{\omega} t \tag{5.4.2}$$

と書けるので、F_{wd} の加速度に比例する成分は

$$A_X = -\frac{|F_{wd}| \sin\theta}{\tilde{\omega}|U|} \tag{5.4.3}$$

速度に比例する成分は

$$B_X = -\frac{|F_{wd}| \cos\theta}{|U|} \tag{5.4.4}$$

で与えられる。そこで以上のフーリエ解析の結果を、(5.4.3) 式と (5.4.4) 式に代入すると、$A_X = -32.65\ kg$, $B_X = 29.93\ N/(m/s)$ が得られる。これらの流体力成分は形式的に付加質量ならびに減衰係数と見なすことも可能である。ただし、A_X , B_X は長周期動揺と入射波の相互作用による流体力成分であり、入射波無しでは存在しない。よって、m_{sd}, c_{sd} と混同しないよう、注意する必要がある。

A_X を付加質量と見なすと、平水中と規則波中の固有周波数の差を説明することができる。まず、浮体と計測装置の合計質量 $191.79kg$ 、係留系のバネ定数 $51.07N/m$ 、平水中の付加質量 $155.75kg$ を用いて平水中の固有振動数を概算すると $0.383rad/s$ となり、$\tilde{\omega}_o$ とよく一致する結果が得られる。そこで次に、A_X による付加質量の減少を考慮して固有振動数を概算値すると $0.403rad/s$ となり $\tilde{\omega}$ に近い値となる。

B_X は波漂流減衰力と呼ばれる流体力に対応すると考えられる。そこで次に、B_X と波漂流減衰力との関係について整理する。従来の理論では F_X と U は非常にゆっくりと変化する準定常値と仮定し、波漂流減衰力を

$$\bar{B}_X = -\left.\frac{\partial \bar{F}_X}{\partial U}\right|_{U=0} \tag{5.4.5}$$

で定義している。実際には F_X と U は $\tilde{\omega}$ で変動するが、この影響は無視されている。この定義式は長周期動揺が周期的定常状態にあり、$\tilde{\omega}$ が非常に小さい場合には、(5.4.4) 式と等価になることを示すことができる。

まず、(5.4.1) を用いると (5.4.2) 式は

$$F_{wd} = \frac{|F_{wd}| \cos\theta}{|U|} U + \frac{|F_{wd}| \sin\theta}{\tilde{\omega}|U|} \dot{U} \tag{5.4.6}$$

と書ける。周期的定常状態では $|F_{wd}|$ と $|U|$ は時間によらず一定値となるので、F_{wd} の U についての偏微分は

$$\frac{\partial F_{wd}}{\partial U} = \frac{|F_{wd}|\cos\theta}{|U|} + \frac{|F_{wd}|\sin\theta}{\tilde{\omega}|U|}\frac{\partial \dot{U}}{\partial U} \tag{5.4.7}$$

となる。ここで

$$\frac{\partial \dot{U}}{\partial U} = -\tilde{\omega}^2\frac{U}{\dot{U}} \tag{5.4.8}$$

の関係を考慮すると、$U=0$ で $\partial\dot{U}/\partial U = 0$ であるので、

$$\left.\frac{\partial F_{wd}}{\partial U}\right|_{U=0} = \frac{|F_{wd}|\cos\theta}{|U|} \tag{5.4.9}$$

となる。そこで (5.4.4) 式は

$$B_X = -\left.\frac{\partial F_{wd}}{\partial U}\right|_{U=0} \tag{5.4.10}$$

と書き直すことができる。これは F_X と U が $\tilde{\omega}$ で変動する場合にも適用できる定義式である。ここで $\tilde{\omega}\to 0$ の極限では $F_{sd}\to 0$, $F_{wd}\to \bar{F}_X$ であるため、(5.4.5) 式は (5.4.10) 式と等価となることが分かる。よって、(5.4.4) 式または (5.4.10) 式は $\tilde{\omega}$ の変動を考慮した、より合理的な波漂流減衰力の定義式であるといえる。

(4) 周期的定常状態への収束加速法

入射波周期の運動の定常状態を求めることに的を絞った場合、計算をより迅速に収束させる手法について触れる。水平方向をバネなどで係留すると固有周期を持つため長周期動揺が発生し、計算が波周期運動へと収束する妨げとなる。そこで水平方向の流体力 S_f の過去 N 周期の平均値 $\bar{S_f}$ を波漂流力を打ち消すため、また水平方向の浮体速度 V_x の過去 N 周期の平均値 $\bar{V_x}$ に比例する減衰力を漂流速度を減少させるための外力として浮体に与えることで、固有周期を持たない係留系を数値計算に導入した。浮体に与える係留力を式で書くと

$$\begin{aligned} G_x(t) &= -\bar{S_f}(t) - \frac{M}{NT_w}\bar{V_x}(t) \\ &= -\frac{1}{NT_w}\int_{t-NT_w}^{t} S_f(\tau)d\tau - \frac{M}{(NT_w)^2}\int_{t-NT_w}^{t} V_x(\tau)d\tau \end{aligned} \tag{5.4.11}$$

となる。ここで M は浮体の質量で、この式では N 周期の時間で漂流速度による運動量が零となる強さの減衰力を与えたことになる。漂流速度が零に収束した後は、減衰は無くなるので、浮体の左右揺の計算に影響はない。計算結果を Fig.5.18に示す。この計算では $N=2$ としており、係留系以外の条件は Fig.5.11と同じである。水平方向の運動に長周期動揺は見られず、左右揺と上下揺については $10T_w$ 程度、横揺は減衰が小さいためか $20T_w$ 程度の時間でほぼ周期的定常状態に達している。下段に示す係留力 $G_x(t)$ も速やかに定常波漂流力に収束しており、減衰力成分は零に収束している。

5.4.2 船首部浮体の波浪中動揺の計算と実験

Fig.5.4に示す船首部浮体は側壁が水面と 47° の角度で交差しており、喫水変化に従って水線幅が変化する形状特性を備えている。そこで、船首部浮体が波浪中で上下揺するとメタセンタ高さが大きく変化し、横揺にパラメータ励振を誘起する場合がある。パラメータ励

振が誘起されると波周期の 2 倍周期の横揺が急激に発達して容易に計測範囲を越えるほどの大振幅動揺 (パラメータ振動) となる。パラメータ振動は入射波周期の定常解の存在を仮定している線形理論では取り扱うことが困難な現象であるが、時間領域の非線形計算法では調和振動と同様に取り扱うことができる現象であり、調和振動からパラメータ振動へ移行する過程をシミュレートすることもできる。そこで、本節では船首部浮体の横揺に見られるパラメータ振動の計算結果を示し、実験結果との比較検討を行なう。

(1) 入射波周期の運動

最初にパラメータ励振が発生しない場合について水槽実験と非線形計算の結果を比較する。例として波長が $1.4m$ 、波高 $5cm$ の規則波中での船首部浮体の動揺を Fig.5.19に示す。この規則波では船首部浮体の運動は過渡現象を経て入射波周期の定常運動へと収束して行く。左右揺には係留系の長周期動揺も見られるが、やがて定常漂流力と釣り合う位置に収束し、最終的には入射波周期の定常運動だけが残る。計算波形と計測波形を比較すると横揺の過渡期の波形に少し差が見られるものの、入射波周期の動揺振幅や係留系の長周期動揺など、全体として非常によく一致している。本計算法は水面と浮体表面とが直交しない形状を有する浮体についても、精度のよい運動計算が可能である。

(2) パラメータ振動

次にパラメータ振動が発生する、波長 $3.6m$ 、波高 $8cm$ の規則波中での船首部浮体の動揺を Fig.5.20に示す。この規則波中ではパラメータ励振により横揺に入射波の倍周期の成分が励起され、これが指数関数的に発達するため最終的には転覆に至る。従って、この規則波に対する周期的定常運動は存在しない。横揺の波形にはパラメータ振動が発達する様子が示されており、調和振動に比してパラメータ振動の振幅が非常に大きくなることが分かる。計算波形は左右揺、上下揺、横揺ともに計測波形とよく一致しており、横揺のパラメータ振動が発達する様子もよく計算されている。ただし、パラメータ振動が発達する速さは計算値が実験値を上回っている。これはポテンシャル理論に基づく本計算法では、大きな横揺に伴う渦の流出などの流体の粘性影響が考慮されていないためと考えられる。

横揺のパラメータ振動の様子を把握するため、Fig.5.21に計算で求めた時刻 $t/T_w = 21.25, 21.50, \ldots, 25.00$ の船首部浮体の姿勢を示す。図中の細線は静止水面である。同じ段の左右の列は時間で $2T_w$ の隔たりがあり、横揺のパラメータ振動が $2T_w$ の周期を持つことが分かる。詳細に見ると、上下揺れの度に左右揺れがブランコを漕ぐように自然に発達してゆく様子が観察できる。左右揺れの倍周期動揺は大振幅となるが非常に滑らかであり、この運動による波の放射はあまり顕著ではなく、砕波も発生しない。これは実験においても同様であり、倍周期動揺が流体力学的に無理のない自然な運動であることが分かる。

流場をさらに詳細に観察するため、Fig.5.22と Fig.5.23に、時刻 $t/T_w = 24.00$ の瞬間の速度ポテンシャル ϕ とその時間偏微分 ϕ_t の分布を等高線図にして示す。本計算法では ϕ_t に関する境界値問題を解いているので、流体内部の ϕ_t 分布、すなわち変動圧分布を計算することも容易である。

次に、パラメータ励振が発生している時の水圧の計算波形と計測波形を比較して Fig.5.24に示す。同じ時刻で比較すると計算の方がパラメータ振動が速く発達して横揺振幅が大き

いため、水圧の波形振幅も計算値が実験値を上回っている。しかし、同振幅の箇所で比較すると両者の波形はよく一致しており、水圧計算点P3が水面からの出入りする様子もよくシミュレートされている。

(3) パラメータ振動の発生条件

横揺のパラメータ振動の発生条件について考察する前に、本実験の波長と波高の組み合わせで、パラメータ振動が発生した範囲をFig.5.25に示す。図中の △ は主に入射波周期の運動が観測され、顕著な倍周期動揺が見られなかった実験点であり、▼ は横揺にパラメータ励振による倍周期動揺の急激な発達が見られた実験点である。同じ波長であっても波高が低い時には調和振動的であるが、波高がある閾値(太実線)を越えると急にパラメータ振動が発生している。波長が約2.7mの時に最も低い波高でパラメータ振動が発生しているのは、この波周期の2倍が船首部浮体の横揺固有周期に一致しているためである。

このように波高が変化すると異なる運動モードが出現する問題を解析的に扱うには、運動モード毎に別々のモデル化が必要で、パラメータ振動の場合はMathieu型方程式でモデル化するのが一般的である。横揺のパラメータ振動については、横揺と上下揺とのMathieu型連成方程式でモデル化することができる。また、その安定性解析からパラメータ振動の発生条件を推定することもできる。モデル方程式の構築とその解析は、現象を定性的に理解するには非常に有効な手段であるため、本節においてもこれを行なう。ただ、モデル方程式では流体の運動を流体力係数として表現するため、流体と浮体との非線形相互作用をモデルに含めることは困難であり、定量的な現象の解明には限界がある。一方、運動モードを仮定しない時間領域の非線形計算法では異なるモードの運動をシームレスに取り扱うことが可能で、流体と浮体との非線形相互作用を含んだ数値解を得ることができるため、定量的な現象の解明にも有効であると考えられる。そこで本節ではパラメータ振動が発生する波高の閾値を、Mathieu型連成モデル方程式と数値計算から求め、これらを実験結果と比較検討する。

まず、Fig.5.26に示す座標系を用いて上下揺 Z_G と横揺 Θ のMathieu型連成モデル方程式を

$$(M+M_1)\ddot{Z_G}+C_1\dot{Z_G}+F_1(Z_G-\eta)=0 \tag{5.4.12}$$

$$(I+M_2)\ddot{\Theta}+C_2\dot{\Theta}+F_2(Z_G-\eta,\Theta-\eta_X)=0 \tag{5.4.13}$$

と記述する。ここで、M_1,C_1 は上下揺に対する付加質量と減衰係数、M_2,C_2 は横揺に対する付加慣性モーメントと減衰係数であり、船首部浮体の自由動揺試験から求めた M_1,C_1,M_2,C_2 の値は

M_1	15.62	kg
M_2	0.8595	kgm^2
C_1	189.5	kg/sec
C_2	0.2739	kgm^2/sec

である。M_1,C_1,M_2,C_2 は周波数の関数であるが、本モデル方程式では自由動揺時の値で代表させる。η と η_X は浮体重心位置での自由表面の変位と傾斜であり、波強制力と復元力は分離せずに浮体と水面との相対運動の関数として F_1,F_2 で表す。Fig.5.20では、上下揺に横揺の影響はあまり見られないが、横揺には上下揺の強い影響が認められるため、F_1 は相対水位 $Z_G-\eta$ の関数、F_2 は相対水位 $Z_G-\eta$ と相対角度 $\Theta-\eta_X$ の関数とする。

関数 F_1, F_2 は船首部浮体の形状から定めることができる。船首部浮体の喫水変化 Δd に対する浮力変化 ΔW および GM 変化 ΔGM を Fig.5.27に示す。図中の曲線を 2 次関数

$$\Delta W = A_1 \Delta d + B_1 \Delta d^2 \tag{5.4.14}$$

$$\Delta GM = A_2 \Delta d + B_2 \Delta d^2 \tag{5.4.15}$$

で近似すると、その係数は

A_1	2975.	N/m
B_1	7969.	N/m^2
A_2	1.293	
B_2	1.627	$1/m$

となる。そこで、Δd を $Z_G - \eta$ と見なし、F_1, F_2 を 2 次の精度で近似すると、

$$F_1(Z_G - \eta) \approx A_1(Z_G - \eta) + B_1(Z_G - \eta)^2 \tag{5.4.16}$$

$$\begin{aligned} F_2(Z_G - \eta, \Theta - \eta_X) &\approx W\ GM\ \sin(\Theta - \eta_X) \qquad (5.4.17) \\ &\approx \{W_0 + A_1(Z_G - \eta) + B_1(Z_G - \eta)^2\} \\ &\times \{GM_0 + A_2(Z_G - \eta) + B_2(Z_G - \eta)^2\} \sin(\Theta - \eta_X) \\ &\approx W_0 GM_0(\Theta - \eta_X) + (W_0 A_2 + GM_0 A_1)(Z_G - \eta)(\Theta - \eta_X) \end{aligned}$$

と書ける。

以上の近似式と係数を (5.4.12),(5.4.13) 式に代入して整理し、さらに船首部浮体の幅 B , 奥行 L , 重力加速度 g , 水の密度 ρ を単位として第 2 章の緒言に示した無次元化を行って、無次元化 Mathieu 型連成モデル方程式

$$\ddot{z_G} + c_1 \dot{z_G} + a_1(z_G - \xi) + b_1(z_G - \xi)^2 = 0 \tag{5.4.18}$$

$$\ddot{\theta} + c_2 \dot{\theta} + a_2(\theta - \xi_x) + b_2(z_G - \xi)(\theta - \xi_x) = 0 \tag{5.4.19}$$

を得る。ここで、z_G,θ,ξ は無次元化した上下揺、横揺、自由表面変位であり、無次元係数の値は

a_1	$=$	$\dfrac{A_1 B}{(M + M_1)g}$	$=$ 2.839	a_2	$=$	$\dfrac{W_0 GM_0 B}{(I + M_2)g}$	$=$ 0.3495
b_1	$=$	$\dfrac{B_1 B^2}{(M + M_1)g}$	$=$ 4.562	b_2	$=$	$\dfrac{(W_0 A_2 + GM_0 A_1)B^2}{(I + M_2)g}$	$=$ 9.783
c_1	$=$	$\dfrac{C_1}{M + M_1}\sqrt{\dfrac{B}{g}}$	$=$ 0.7308	c_2	$=$	$\dfrac{C_2}{I + M_2}\sqrt{\dfrac{B}{g}}$	$=$ 0.02541

である。

この Mathieu 型連成モデル方程式に入射波

$$\xi = \xi_a \sin(\omega t) \tag{5.4.20}$$

$$\xi_x = k\xi_a \cos(\omega t) \tag{5.4.21}$$

を強制力として入力した場合の周期的定常解の存在範囲を調べることで、パラメータ励振の発生条件を知ることができる。しかし、(5.4.18),(5.4.19) 式をそのまま解析的に解くことは

困難であるので、さらに簡略化してMathieu方程式に帰着させ、周期的定常解の存在範囲を定性的に把握することにする。

まず、(5.4.19)式の強制力項を右辺に移項して

$$\ddot{\theta} + c_2\dot{\theta} + \{a_2 + b_2(z_G - \xi)\}\theta = \{a_2 + b_2(z_G - \xi)\}\xi_x \tag{5.4.22}$$

と書き直し、強制力項はMathieu方程式の安定性には影響しないので無視する。さらに、

$$\theta = \vartheta e^{-c_2(z_G - \xi)/2} \tag{5.4.23}$$

と置くと(5.4.22)式は

$$\ddot{\vartheta} + \{a_2 - c_2^2/4 + b_2(z_G - \xi)\}\vartheta = 0 \tag{5.4.24}$$

と変形でき、減衰項$c_2\dot{\theta}$を消去することができる。しかし、減衰項の影響は$c_2^2/4 = 1.614 \times 10^{-4}$と微小であるので、ここでは$c_2\dot{\theta}$項を無視し、単に

$$\ddot{\theta} + \{a_2 + b_2(z_G - \xi)\}\theta = 0 \tag{5.4.25}$$

としても現象の本質を失わないと考えられる。

次に、式中の相対水位変動$z_G - \xi$の波形を

$$z_G - \xi = \xi_r \cos(\omega t) \tag{5.4.26}$$

と仮定する。この振幅ξ_rは(5.4.18)を線形化して求めることができ、

$$\xi_r = \frac{\sqrt{\omega^4(a_1 - \omega^2 + c_1^2)^2 + a_1^2 c_1^2 \omega^2}}{(a_1 - \omega^2)^2 + c_1^2\omega^2}\xi_a \tag{5.4.27}$$

で与えられる。そこで(5.4.26)式を(5.4.25)式に代入して整理すると、横揺の運動方程式はMathieu方程式に帰着し、

$$\ddot{\theta} + \{a_2 + b_2\xi_r \cos(\omega t)\}\theta = 0 \tag{5.4.28}$$

となる。さらに、$2\tau = \omega t$と置換してMathieu方程式の標準形

$$\ddot{\theta} + \{\lambda - 2h^2 \cos(2\tau)\}\theta = 0 \tag{5.4.29}$$

を得る。ここでλとhはMathieu方程式の標準パラメータで

$$\lambda = \frac{4a_2}{\omega^2} \tag{5.4.30}$$

$$2h^2 = -\frac{4b_2\xi_r}{\omega^2} \tag{5.4.31}$$

である。

Mathieu方程式からパラメータ振動が発生する波高の閾値を求める。Mathieu方程式が$-\infty < \tau < +\infty$において有界な解をもつλとhの範囲は安定域と呼ばれ、$-\infty < \tau < +\infty$において0以外に有界な解のない範囲は不安定域と呼ばれる。(λ, h^2)を直交座標とする平面上において、安定域と不安定域の境界をFig.5.28に示す[76]。図中にλ_n^s, λ_n^cで示した境界線はMathieu方程式の固有値であり、安定域は網掛を施した領域である。図中の小さな四角形

で囲んだ領域は、本研究が対象とする波長、波高域で、この領域に関係する固有値 λ_1^s, λ_1^c は h^2 が微小であるので級数表示

$$\lambda_1^s(h^2) = 1 - h^2 - \frac{1}{8}h^4 + O(h^6) \tag{5.4.32}$$

$$\lambda_1^c(h^2) = 1 + h^2 - \frac{1}{8}h^4 + O(h^6) \tag{5.4.33}$$

で精度よく計算できる。そこで、これら λ_1^s, λ_1^c の級数表示式に (5.4.31) 式を代入し、さらに (5.4.27) 式を代入して ξ_r を ξ_a に変換すると、波高-波長平面における安定領域と不安定領域との境界線、すなわちパラメータ振動が発生する波高の閾値が得られる。

以上の方法で求めた波高の閾値を Fig.5.29に示す。限界波傾斜は 1/10 程度であるので、図中の波傾斜 1/10 の線より上の領域は工学的には無意味な領域である。さて、先に Fig.5.25に示した実験結果と Mathieu 方程式から得られた結果を比較すると定性的な傾向は一致しており、モデル方程式を用いた解析からパラメータ振動の発生条件を定性的に知ることができた。

さて、本計算法で求めた波高の閾値を Fig.5.30に示す。図中の △ は主に入射波周期の運動が卓越し、顕著な倍周期動揺が見られなかった計算点であり、▼ は横揺にパラメータ励振による倍周期動揺の急激な発達が見られた計算点である。△ と ▼ の中間に波高の閾値が存在するので、図では △ と ▼ の中間点を太実線で結んで閾値として示した。この閾値は実験結果を定量的にも非常によく説明している。

最後に、実験、非線形数値計算、Mathieu 型連成モデル方程式の 3 種類の方法で求めた閾値をまとめて Fig.5.31に示す。非線形計算では実験と比較して少し低めの波高でパラメータ振動が発生している。これは数値計算に流体の粘性影響が含まれていないことが要因のひとつであろう。

Mathieu 型連成モデル方程式を用いたパラメータ振動の解析に限らず、モデル方程式を用いた浮体運動の解析では、浮体と流体との相互作用を流体力係数として表現するのが一般的であり、非線形運動の解析においても流体力係数は線形計算で得られた値を用いるか、もしくは高次の流体力係数を用いて波形の歪み程度の弱非線形性を考慮する程度であった。これは、今までに流体と浮体との非線形連成運動をシミュレートする合理的かつ実用的な手段が無かったためである。本論で構築した非線形計算法は、モデル方程式を用いた運動解析に代わる合理的かつ実用的な手段を提供するものである。

5.5 結言

本章では第 2 章, 第 3 章, 第 4 章を通して述べてきた非線形数値計算法の具体的な応用例として、船体中央浮体および船首部浮体の規則波中での運動を計算し、実験結果との比較検討を行なった。その結果、次の結論を得た。

まず、船体中央浮体の規則波中動揺の計算では

1. 入射波周期の運動および波強制力の計算結果と実験結果との比較では、粘性抵抗や渦抵抗が計算では考慮されていないことによる差は認められるものの、全般的に計算結果は実験結果と一致した。
2. 横揺の定常傾斜角や浮体の漂流距離などの定常成分についても、計算結果は実験結果とよく一致した。

3. 浮体表面圧力の計算波形と計測波形との一致も良好であった。水圧計測における圧力センサーの感度や温度ショックの問題を考えると、むしろ計算結果の方が信頼性が高いと考えられる。
4. 係留系の長周期動揺についても計算結果と実験結果の対応は良好であった。ただ粘性影響が考慮されていないため、計算では長周期動揺の減衰が少し弱い結果となった。
5. 長周期動揺の計算結果から長周期動揺と入射波との相互作用に起因する流体力成分を抽出する方法を示した。またその解析から、波漂流減衰力のより合理的な解釈を示した。

船首部浮体の規則波中動揺の計算では

6. 入射波周期の運動では全般的に計算結果と実験結果はよく一致した。
7. パラメータ振動が発生する場合についても、浮体運動および浮体表面圧力の計算結果は実験結果とよく一致した。
8. パラメータ振動の力学を理解するため、上下揺と横揺の Mathieu 型連成モデル方程式を立て、パラメータ振動の発生条件を求めた。これを、波長と波高を変えた一連の水槽実験から得られた発生条件と比較したところ、定性的には一致した。
9. 一方、波長と波高を変えた一連の数値計算で求めたパラメータ振動の発生条件は実験結果と定性的にも定量的にもよく一致することが分かった。

本章で示した数値計算例は本計算法の応用のほんの数例である。本計算法はこれら以外にも内部滞留水によるカオス横揺の解析など、線形理論で扱うことが困難な種々の問題に対し、強力な解析ツールとして活用できると考える。

第 6 章　結 論

船舶および海洋構造物の耐航性理論は、理想流体、微小波高、微小動揺を仮定する線形理論と、その摂動論による弱非線形問題への拡張を主な手段として研究されて来た。しかし、近年では荒天時の大振幅動揺、転覆、波浪衝撃などの問題、また横揺に見られるパラメータ振動やカオス現象など、従来の理論の枠組を越えた問題の解決を迫られる局面が多くなっている。そこで、本論文ではこれら種々の非線形問題に対応できる新しい理論と計算手法の確立を目指し、理想流体の仮定だけに立脚する流体と浮体の非線形連成運動の理論と数値計算法を構築した。本論文の主な成果を以下にまとめて示す。

第 1 章では耐航性理論の研究史を概説し、その中での時間領域の非線形理論の位置付けを明確にした。時間領域の非線形理論の研究は 1976 年の Longuet-Higgins ら [17] による混合オイラーラグランジェ法の研究にまで遡って約 20 年の歴史がある。また非線形耐航性理論の観点では、1981 年の Vinje ら [18] の研究により初めて流体力学的に整合性のとれた浮体運動計算法が示されたので、その歴史は約 15 年である。これらの研究を背景にして最近の 5 年間で非線形耐航性理論は急速に進歩した。これら最近の研究のキーポイントは線形理論が周波数領域で構築した流体と浮体との連立方程式を時間領域で、しかも線形の仮定を外して構築する点にあった。これらの研究を加速度場の解法により分類すると、(1) モード分解による方法、(2) 陰境界条件を用いる方法、(3) 繰り返し計算による方法があり、本論文で詳述した陰境界条件を用いる著者の方法を、他の手法と対比して概説した。

第 2 章では流体と浮体の非線形連立運動方程式を構築するための基礎理論を示した。まず、加速度ポテンシャルを導入して理想流体のオイラーの運動方程式を積分方程式に変換した。次いで物体表面での流体加速度の幾何学的な表示式を求め、これより加速度ポテンシャルの物体表面での幾何学的境界条件を導いた。さらに、浮体の運動方程式をこの幾何学的境界条件に代入して、流体と物体の運動方程式を連立させる幾何学的かつ力学的境界条件である陰境界条件式を導いた。また、浮体内部に液体タンクや浸水による滞留水が存在する場合にも適用できるよう、流体領域が複数存在する問題への理論拡張を行なった。以上の理論を数値計算に応用するには、加速度ポテンシャルはラプラスの式を満足しないため都合が悪い。そこで、ラプラスの式を満たす ϕ_t に関する境界値問題に置換し、数値計算に適した加速度場の定式化を行った。

第 3 章では時間領域で浮体と流体の連成運動をシミュレートする非線形数値計算法を構築した。最初に、速度場および加速度場の境界値問題を境界要素法で解くため、グリーンの式の離散化法を示した。ついで、積分方程式で与えられた陰境界条件式の離散化法を示し、これらをひとつの行列演算式に組み立て、浮体と流体との離散化連立方程式を構築した。また、流体領域が複数存在する場合についても離散化し連立方程式を構築した。次に、これらの離散化方程式の解を時間積分し、流体と浮体の連成運動をシミュレートする手順、自由表面運動の非線形追跡法、自由表面と浮体表面との交線および交点の取り扱い方、4 次

のルンゲ·クッタ法による離散化時間積分式などを示した。また、波の減衰領域を用いた水槽端および造波機からの反射波防止法を示した。

第 4 章では本計算法の精度検証を行った。まず、閉領域中の 2 次元浮体の自由上下揺、規則波中の 3 自由度大振幅動揺、液体貨物を積載した場合の大振幅過渡運動の計算を実施し、数値解が理論どおり質量、運動量、エネルギー保存則を高精度で満足することを示した。次に、減衰領域の消波性能を合田の方法を用いて定量的に評価した結果、非常に良好な消波性能を有していることが分かった。また、造波機と減衰領域を組み合わせて吸収式造波機を構成した場合でも、多重反射はほとんどなく、吸収式造波機とし実用的な性能を有することが分かった。以上により、本計算法を用いて数値造波水槽を構築すれば、浮体の波浪中動揺を長時間かつ高精度でシミュレートできることが分かった。

第 5 章では本計算法の具体的な応用例として、船体中央浮体および船首部浮体の規則波中での運動を計算し、実験結果との比較検討を行なった。まず、船体中央浮体では、入射波周期の運動、波強制力、横揺の定常傾斜角や浮体の漂流距離などの定常成分、浮体表面圧力、係留系の長周期動揺などについて比較を行なった結果、計算結果と実験結果の対応は良好であった。また、長周期動揺の計算結果から長周期動揺と入射波との相互作用に起因する流体力成分を抽出する方法を示し、その解析から波漂流減衰力の合理的な解釈を示した。次に、船首部浮体についても入射波周期の運動、パラメータ振動による運動と、その際の浮体表面圧力などについて比較を行なった結果、計算結果と実験結果の対応は良好であった。また、実験、数値計算、Mathieu 型モデル方程式からパラメータ振動の発生条件を求めたところ、Mathieu 型モデル方程式から求めた発生条件は定性的に、数値計算から求めた発生条件は定量的にも実験結果とよく一致することが分かった。

以上、本研究の所期の目標を達成することができた。今後は、この研究を継続して発展させる必要がある。そこで最後に、時間領域の非線形計算法の将来展望を述べて本論文の締めくくりとする。時間領域の非線形計算法を発展させる方向として、現在次の二方向を検討している。ひとつは 3 次元問題への拡張であり、もうひとつは流力弾性問題への拡張である。

3 次元問題への拡張は、既に第 2 章と第 3 章で 3 次元の定式化を終えているので、数値計算プログラムの 3 次元化が課題である。これには自由表面上の節点密度制御、最適パネル生成、曲面のスプライン近似などの要素技術の研究開発[31, 32]が不可欠で、これらを根気強く開発してゆく必要がある。3 次元化により船舶や海洋構造物の現実的な問題への適用が可能になるであろう。

流力弾性問題への拡張は、第 2 章で求めた流体と浮体の連成運動の非線形理論を、流体と弾性体の相互作用を表現できるように拡張することから始めなければならない。しかし、この拡張は線形の仮定を捨てたが故にむしろ容易であり、振動モードによる展開を必要としない理論構築が可能である。本論文で用いた 2 次元計算プログラムの流力弾性問題への拡張も容易であると思われるので、近い将来には水面衝撃現象における弾性影響の解析に威力を発揮するものと考える。

さらに、これらの拡張を統合し、3 次元の流力弾性問題が解けるようになれば、強力な構造設計ツールとして活用できるであろう。

以上、将来の課題である。

謝　　辞

本論文の主題は浮体と流体との連成運動を時間領域で非線形計算するための理論構築と数値計算法の開発であった。著者がこの主題に関連する研究に着手したのは 1983 年頃からで、境界要素法と混合オイラー・ラグランジェ法を用いて非線形波をシミュレートする数値計算プログラムを開発したことが契機である [19]。その後、このプログラムを非線形波だけに留まらず、波浪中浮体運動や水面衝撃問題などへ応用し、計算プログラムの改良を重ねて来た。しかし、波浪中浮体運動の計算については研究当初からのひとつの重大な問題があった。当時の浮体運動の非線形計算法では、浮体表面の圧力計算に必要な ϕ_t の値を ϕ の後退時間微分で近似計算していたが、この方法では力学的に流体から浮体への作用が考慮されているだけで、浮体から流体への反作用が欠落していたのである。この力学的な欠陥を解消するには、流体と浮体の連立運動方程式を解く必要がある。しかし、連立運動方程式の構築法は不明のままであった。著者が Vinje の論文 [18] の真価に気付いたのは、以上の問題意識が煮詰まり、加速度場において流体と浮体の連立運動方程式を構築できる可能性があると感じ始めた 1989 年頃で、その後の研究の急展開については第 1 章で述べたとおりである。

1983 年から現在に至る間には、この主題に関する研究を中断した期間が何度があったが、多くの方に助けられ論文をまとめることができた。本論文を終えるにあたり、御指導、御教示、御討論ならびに御援助を賜わった次の方々に対し、深い感謝の意を表する次第である。

本論文をまとめるに際しては、大阪大学工学部船舶海洋工学科教授内藤林先生より、始終暖かい御指導と御教示を賜わった。また、同学科教授浜本剛実教授ならびに鈴木敏夫教授からも貴重な意見を頂戴した。

九州大学応用力学研究所教授大楠丹先生ならびに助教授柏木正先生からは、本論文に関連した研究の要所において、暖かい御教示と激励を頂戴した。

本論文で用いた種々の数値計算技術には著者がマサチューセッツ工科大学に滞在していた間に、海洋工学科教授 Dick K.P.Yue 先生の御指導で開発したものが多く含まれている。

著者が勤務する運輸省船舶技術研究所の諸先輩からも多大なご支援を頂いた。海洋開発工学部長菅信博士 (当時運動性能部長) ならびに運動性能部長足達宏之博士には研究時間や研究費の面で御援助を賜わった。加速度場の境界条件の導出に関しては、運動性能部波浪外力研究室長冨田宏博士、同部主任研究官村重淳博士、推進性能部高速流体研究室長日夏宗彦博士から貴重な意見、討論、ヒントを賜った。波漂流減衰力の関連では、海洋開発工学部主任研究官加藤俊司博士に御教示を頂いた。水槽実験行なうに当たっては、運動性能部沢田博史主任研究官に大変お世話になった。

以上の方々に心から厚く御礼申し上げます。

付 録

A　加速度場の物体表面境界条件に関する補足

A.1　境界条件の直接的導出

ϕ_t の物体表面の幾何学的境界条件式を、速度ポテンシャル ϕ の幾何学的境界条件式の時間微分から直接導く。

第 2 章と同じく、ここでも Fig.2.2に示した座標系を用いる。また、物体表面に接する流体に固定された点 P の位置ベクトルを $\boldsymbol{R}$ 、物体重心の位置ベクトルを $\boldsymbol{R}_o$ 、物体重心位置からの点 P への相対位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ とし、点 P の位置、速度、加速度が

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_o + \boldsymbol{r} \tag{A.1}$$

$$\frac{D\boldsymbol{R}}{Dt} = \boldsymbol{v}_o + [\boldsymbol{v}] + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} = \nabla\phi \tag{A.2}$$

$$\frac{D^2\boldsymbol{R}}{Dt^2} = \boldsymbol{a}_o + [\boldsymbol{a}] + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) + 2\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{v}] + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r} \tag{A.3}$$

で与えられることを利用する。ここで $\frac{D}{Dt}$ は実質微分で、 $\boldsymbol{v}_o \equiv \dot{\boldsymbol{R}}_o$, $\boldsymbol{a}_o \equiv \ddot{\boldsymbol{R}}_o$, $[\boldsymbol{v}] \equiv [\dot{\boldsymbol{r}}]$, $[\boldsymbol{a}] \equiv [\ddot{\boldsymbol{r}}]$ である。

まず、速度ポテンシャル ϕ の物体表面における幾何学的境界条件式

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = \nabla\phi \cdot \boldsymbol{n} \tag{A.4}$$

の実質微分をとると、

$$\frac{D}{Dt}\left\{\frac{\partial\phi}{\partial n}\right\} = \frac{D\nabla\phi}{Dt} \cdot \boldsymbol{n} + \nabla\phi \cdot \frac{D\boldsymbol{n}}{Dt} \tag{A.5}$$

となり、

$$\frac{D\nabla\phi}{Dt} = \nabla\phi_t + (\nabla\phi \cdot \nabla)\nabla\phi \tag{A.6}$$

を考慮すると、

$$\frac{D}{Dt}\left\{\frac{\partial\phi}{\partial n}\right\} = \nabla\phi_t \cdot \boldsymbol{n} + (\nabla\phi \cdot \nabla)\nabla\phi \cdot \boldsymbol{n} + \nabla\phi \cdot \frac{D\boldsymbol{n}}{Dt} \tag{A.7}$$

となる。

一方、(A.2) 式を用いると、 $\frac{\partial\phi}{\partial n}$ の実質微分は

$$\begin{aligned}\frac{D}{Dt}\left\{\frac{\partial\phi}{\partial n}\right\} &= \frac{D}{Dt}\left\{(\boldsymbol{v}_o + [\boldsymbol{v}] + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{n}\right\} \\ &= \left\{\boldsymbol{a}_o + [\boldsymbol{a}] + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) + 2\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{v}] + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r}\right\} \cdot \boldsymbol{n} + \nabla\phi \cdot \frac{D\boldsymbol{n}}{Dt}\end{aligned} \tag{A.8}$$

と書けるので、(A.7),(A.8) を等値して $\nabla\phi_t \cdot \boldsymbol{n}$ について解くと、

$$\begin{aligned}\nabla\phi_t \cdot \boldsymbol{n} = {} & \boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{a}_o + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r}) + \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) + \boldsymbol{n} \cdot 2\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{v}] \\ & + \boldsymbol{n} \cdot [\boldsymbol{a}] - (\nabla\phi \cdot \nabla)\nabla\phi \cdot \boldsymbol{n}\end{aligned} \tag{A.9}$$

が得られる。ここで、

$$\nabla\phi_t \cdot \boldsymbol{n} = \frac{\partial \phi_t}{\partial n} \tag{A.10}$$

$$(\nabla\phi \cdot \nabla)\nabla\phi \cdot \boldsymbol{n} = \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2\right) \tag{A.11}$$

であるので、結局 ϕ_t の物体表面における幾何学的境界条件は

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi_t}{\partial n} &= \boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{a}_o + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r}) + \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) + \boldsymbol{n} \cdot 2\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{v}] \\ &\quad + \boldsymbol{n} \cdot [\boldsymbol{a}] - \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2\right)\end{aligned} \tag{A.12}$$

となる。この式は第 2 章の (2.4.10),(2.4.33), (2.4.34) 式を用いて簡潔に書くと

$$\frac{\partial \phi_t}{\partial n} = \boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{\alpha} + q - \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2\right) \tag{A.13}$$

となり、加速度ポテンシャルを用いて導いた (2.5.2) 式と一致する。

A.2 $\frac{\partial}{\partial n}(\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2)$ の計算

Fig.A.1 に示す物体境界の曲率中心を原点とする局所極座標系 (r,θ) を用いて、流体速度の自乗の r 方向の勾配を書き表すと

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2\right) = \frac{\partial\phi}{\partial r}\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{\partial\phi}{r\partial\theta}\left\{-\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{r\partial\theta} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2\phi}{\partial r\partial\theta}\right\} \tag{A.14}$$

となる。これをラプラスの式

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} = 0 \tag{A.15}$$

を用いて

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2\right) = -\frac{1}{r}\left\{\left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{r\partial\theta}\right)^2\right\} + \frac{\partial\phi}{\partial r}\left(-\frac{\partial^2\phi}{r^2\partial\theta^2}\right) + \frac{\partial\phi}{r\partial\theta}\frac{\partial}{r\partial\theta}\left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) \tag{A.16}$$

と変形し、さらに

$$\frac{\partial}{\partial r} \equiv \frac{\partial}{\partial n}, \quad \frac{\partial}{r\partial\theta} \equiv \frac{\partial}{\partial s}, \quad \frac{1}{r} \equiv k \tag{A.17}$$

の関係を考慮して書き直して

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2\right) = -k(\nabla\phi)^2 + \frac{\partial\phi}{\partial n}\left(-\frac{\partial^2\phi}{\partial s^2}\right) + \frac{\partial\phi}{\partial s}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial\phi}{\partial n}\right) \tag{A.18}$$

を得る。

B　物体固定座標系から空間固定座標系への変換

本論では物体固定座標系から空間固定座標系への変換を基本ベクトル $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ を用いて行った。しかし船舶の姿勢は基本ベクトルを用いて表すより、オイラー角を用いて表すのが一般的である。そこで基本ベクトルとオイラー角の関係を与えておく。

空間固定座標系 $O-XYZ$ を平行移動して、原点 O を物体の重心 o に一致させた座標系を $o-x_1y_1z_1$ とする。Fig.B.1 に示すように、オイラー角としてピッチ角 θ 、ロール角 φ 、ヨー角 ψ を用い、ψ 、θ 、φ の順で回転座標変換を行なって $o-x_1y_1z_1$ を物体固定座標系 $o-xyz$ に一致させる。その手順は、z_1 軸まわりの ψ の回転によって $o-x_1y_1z_1$ を $o-x_2y_2z_2$ に変換し、次に y_2 軸まわりの θ の回転によって $o-x_2y_2z_2$ を $o-x_3y_3z_3$ に変換し、最後に x_3 軸まわりの φ の回転によって $o-x_3y_3z_3$ を $o-xyz$ に移す。これらを式で書くと

$$\begin{Bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{Bmatrix} \tag{B.1}$$

$$\begin{Bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{Bmatrix} \tag{B.2}$$

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{Bmatrix} \tag{B.3}$$

となる。以上の 3 回の回転座標変換における変換マトリックスを $\boldsymbol{M}(\psi),\boldsymbol{M}(\theta),\boldsymbol{M}(\varphi)$ とすると、座標系間の変換式は

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \boldsymbol{M}(\varphi)\boldsymbol{M}(\theta)\boldsymbol{M}(\psi) \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{Bmatrix} \tag{B.4}$$

と書ける。また逆変換は

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{Bmatrix} = \boldsymbol{M}^{-1}(\psi)\boldsymbol{M}^{-1}(\theta)\boldsymbol{M}^{-1}(\varphi) \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \tag{B.5}$$

で与えられる。ここで、$\boldsymbol{M}^{-1}(\psi)=\boldsymbol{M}(-\psi)$, $\boldsymbol{M}^{-1}(\theta)=\boldsymbol{M}(-\theta)$, $\boldsymbol{M}^{-1}(\varphi)=\boldsymbol{M}(-\varphi)$ であることを考慮して逆変換を展開して書くと、

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\psi & -\sin\varphi\sin\theta\cos\psi - cos\varphi\sin\psi & \\ \cos\theta\sin\psi & -\sin\varphi\sin\theta\sin\psi + cos\varphi\cos\psi & \\ \sin\theta & \sin\varphi\cos\theta & \\ & -\cos\varphi\sin\theta\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi & \\ & -\cos\varphi\sin\theta\sin\psi - \sin\varphi\cos\psi & \\ & \cos\varphi\cos\theta & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \tag{B.6}$$

が得られる。$(x_1,y_1,z_1)=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ であるので基本ベクトル $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ とオイラー角との関係はこの変換式より明らかである。

C　その他の数値計算上のテクニック

C.1　Mesh function を用いた節点再配置法

本論で用いた時間領域の非線形数値計算法は、時々刻々変化する自由表面形状や浮体の姿勢を追跡することで流体と浮体の運動をシミュレートする。そこで時間とともに変化する境界形状を常に適切に離散化するための節点再配置法が必須の要素技術となる。本論で用いた節点再配置法は、境界上で定義されたMesh function [89]と呼ばれる評価関数を用い、その各要素上での積分値が等しくなるように要素長を決定することで節点再配置を実現している。以下では、Fig.C.1に示す船首部浮体の接水領域 S_s を n 要素に分割する問題を例に、Mesh function を用いた節点再配置法について説明する。

まず、S_s に沿った曲線座標 s を導入し、Mesh function を s の関数として $f_m(s)$ と表す。$f_m(s)$ は要素長を制御するための評価関数で、解くべき問題に適当と思われる関数を設定する。本論で示した計算では要素長を曲率 k で制御するため、

$$f_m(s) = \frac{|k| + k_c}{|k|_{max} + k_c} \tag{C.1}$$

としている。ここで $|k|_{max}$ は最大曲率、k_c は曲率が零の直線境界で要素長が無限大となるのを防ぐために導入した正の常数である。

$k_c = |k|_{max}/5$ とした場合の $f_m(s)$ とその積分 $F_m(s) = \int_0^s f_m(s)ds$ をFig.C.2に図示する。曲率 k は浮体形状 ($x = x(s), y = y(s)$) をCubic-B splineで近似して計算している。境界 S_s を n 要素に分割し各要素上での $f_m(s)$ 積分値が等しくなるようにするには

$$F_{mi} = \int_{s_i}^{s_{i+1}} f_m(s)ds = \frac{F_m(s_{n+1})}{n} \ : \ i = 1, 2, \ldots, n \tag{C.2}$$

となるように境界 S_s 上に節点 s_i を配する。節点 s_i の配置を作図法で求めるには、Fig.C.2に示すように $F_m(s_{n+1})$ を n 等分する水平線を引き、これと $F_m(s)$ との交点から下ろした垂線が横軸と交わる点に節点を置けばよい。実際にはこの作業を内挿補間を用いて数値的に行うことで節点 s_i の配置を計算する。Fig.C.1に示す節点配置はこの方法により求めたものである。本論で用いた非線形計算プログラムでは浮体表面や水槽壁面などの自由表面との交点を有する物体表面では時間ステップ毎に節点再配置を行っている。

自由表面についても基本的には物体表面と同じ手法を用いて節点の再配置を行う。ただし、自由表面の曲率の計算にはC.2に示すSmoothing splineを用いている。またMELを用いた自由表面節点のラグランジェ流の追跡では、節点が波下へ漂流し、適切な節点配置が失われるのを防ぐための節点の再配置であるので、5から10ステップに1回程度の再配置で十分である。

ここで例示したMesh functionは単純なものであるが、Mesh functionを工夫することでより複雑な節点配置を行うことが可能であり、解くべき問題に応じて適切なMesh functionを用いることが、少ない要素数で安定した高精度な数値計算を行うためには重要である。

C.2　Smoothing spline を用いた平滑化

大振幅動揺の計算を行なうと自由表面の思わぬ箇所で砕波が発生し、そこから計算が発散して継続不能になることが多くある。このような場合は平滑化を行って砕波を防止し、数

値的不安定を除去する必要がある。しかし、平滑化は計算誤差の要因となるため、できれば用いたくない。この相反する要求を満たすには、計算対象としている現象の波数成分に上限値を設定し、それ以上の高波数成分だけを効率的に除去できる数値フィルタを平滑化に用いることで、現象の本質に影響を与えずに局所的な砕波による数値的不安定だけを除去する平滑化技術を開発する必要がある。

平滑化には3点平滑、5点平滑などの荷重移動平均が簡便なことから好く用いられる。荷重移動平均の数値フィルタとしての特性は節点間隔が均等な場合には明確である。しかしC.1節で述べているように、節点間隔を自由表面の曲率などの関数として与えると、節点間隔が不均等になるため、荷重移動平均による平滑化では節点の粗密により除去される波数成分も変化して都合が悪い。FFT と逆FFT を組み合わせた数値フィルタも節点間隔が不均等な場合には使い辛い。そこで本論では節点間隔が不均等な場合にも数値フィルタとしての特性が場所によって変化せず、かつ自在に波数成分の上限値を設定できる Smoothing spline を用いた平滑化を行なった。

Smoothing spline は高次境界要素法に用いられる Cubic-B spline と同じ3次のスプライン関数である。高次要素として Smoothing spline を用いると平滑化作用を要素自体に持たせることができるため、荷重移動平均やFFT などの余分な手間をかけずに平滑化を行える。Smoothing spline については参考文献[88, 91, 90]に詳しく解説されているので、本論では Smoothing spline を平滑化に用いるのに必要な特性について述べるに留める。

任意の一価関数 $y = y(x)$ のサンプル点列 $y_i = y(x_i),\ (i = 1,2,\ldots,n)$ が与えられた時、その点列を Smoothing spline でフィッティングして $y(x)$ の近似関数 $f(x)$ を求める。x_i の間隔は均等である必要はない。Cubic-B spline では $y(x_i) = f(x_i)$ を満足することが要求されるが、Smoothig spline ではこの条件を緩和して、次の汎関数 K を最小にすることが要求される。

$$K = J(f) + k_c^4 E(f) \tag{C.3}$$

$$J(f) = \int_{x_1}^{x_n} [f''(x)]^2 dx \tag{C.4}$$

$$E(f) = \int_{x_1}^{x_n} [f(x) - y(x)]^2 dx \tag{C.5}$$

ここで、$J(f)$ は Smoothing spline の歪エネルギー、$E(f)$ はフィッティングの自乗誤差、k_c^4 は重みである。ここで重みを k_c^4 とした意味は後で明らかにする。

まず、$y(x), f(x)$ をフーリエ展開して

$$y(x) = \sum_{j=0}^{\infty} y_j = \sum_{j=0}^{\infty} c_j e^{ik_j x} \tag{C.6}$$

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j = \sum_{j=0}^{\infty} g_j c_j e^{ik_j x} \tag{C.7}$$

で表す。ここで c_j, k_j は j th 成分の振幅と波数であり、g_j は Smoothing spline を数値フィルタと見なした場合の j th 成分の入出力間の利得である。(C.6),(C.7) 式を (C.3) 式に代入すると、汎関数 K は

$$K = \int_{x_1}^{x_n} [\sum_{j=0}^{\infty} (-k_j^2) g_j c_j e^{ik_j x}]^2 dx + \int_{x_1}^{x_n} [\sum_{j=0}^{\infty} k_c^2 (g_j - 1) c_j e^{ik_j x}]^2 dx \tag{C.8}$$

となる。ここで積分区間 $[x_1 \leq x \leq x_n]$ は波長に比べて十分広いと仮定し、$e^{ik_j x}$ の直交性を利用して (C.8) 式を整理すると

$$K = \sum_{j=0}^{\infty} K_j = \sum_{j=0}^{\infty} \int_{x_1}^{x_n} c_j^2 \{k_j^4 g_j^2 + k_c^4 (g_j - 1)^2\} e^{2ik_j x} dx \tag{C.9}$$

が得られる。汎関数 K が最小値を取るための必要条件は

$$\frac{\partial K_j}{\partial g_j} = 0 \tag{C.10}$$

であるので、(C.9) 式より

$$k_j^4 g_j + k_c^4 (g_j - 1) = 0 \tag{C.11}$$

が得られ、よって平滑化による j th 成分の利得 g_j は

$$g_j = g(k_j) = \frac{1}{1 + (k_j/k_c)^4} \tag{C.12}$$

となる。Fig.C.3に (C.12) 式を両対数で示す。この図から波数 k_j が k_c より小さい波成分では $g_j \approx 1$ であり、平滑化の影響をほとんど受けないが、波数 k_j が k_c より大きくなると g_j が急激に減少し、$k_j/k_c = 10$ では g_j は約 10,000 分の 1 になる。このようにパラメータ k_c は Smoothing spline の Cut Off Frequency である。Smoothing spline で波数 k の Sin 波形をフィッティングした例を Fig.C.4に示す。(C.12) 式が示すとおり、$k_c = k$ で Smoothing spline の振幅が元の Sin 波形のちょうど 1/2 となっていることが分かる。

次に、Smoothing spline を自由表面の平滑化に用いる場合の k_c の与え方および要素分割数について、若干の考察を追加する。境界要素法で単位波長 $\lambda = 1$ 、波数 $k = 2\pi$ の非線形波の計算を行う場合、1 波長を n 要素で分割すると、要素長は $\Delta\ell = \lambda/n$ となり、この要素長で表現可能な波長の下限は $\lambda_{min} = 2\Delta\ell$ 、波数の上限では $k_{max} = \pi/\Delta\ell$ となる。この短波長成分は Sawtooth instability の原因となるので、その振幅を平滑化により 10%にまで減衰させたいとする。これには波数 k_{max} の利得を $g(k_{max}) = 0.1$ となるように k_c を定めればよい。1 波長あたり要素数 ($n = 10, 20, \ldots, 80$) で分割する場合、$g(k_{max}) = 0.1$ となる k_c を計算すると Table C.1 に示す値となる。

波数 k の波に対する Smoothing spline の影響を見ると、1 波長 10 要素の粗い分割では利得 $g(k)$ が約 0.986 であるため、1.4%の振幅減衰がある。しかし 1 波長 20 要素では $g(k) \approx 0.999$ で振幅減衰は 0.1%未満である。さらに高次成分波への平滑化の影響も検討しておく必要がある。波数 $2k$ および波数 $3k$ の波に対する振幅減衰が 0.1%未満となる分割数はそれぞれ 40 分割、60 分割である。そこで Smoothing spline を用いて非線形波を 3 次のオーダまで計算し、平滑化による誤差を 0.1%未満に抑えるには $n \geq 60$ 程度の分解能が必要なことが Table から分かる。

最後に、Smoothing spline を用いた波の計算例を Fig.C.5に示す。これは非線形波の極端な例として巻波を計算したもので、自由表面形状と自由表面の速度ポテンシャルの値を自由表面に沿った曲線長 s を用いて $x = x(s), y = y(s), \phi = \phi(s)$ とパラメータ表示し、それぞれに Smoothing spline を適用している。この際、k_c の値が小さ過ぎると、すなわち Smoothing 効果が強過ぎると巻波先端が太った形状となる。この計算結果を得るには、小さめの k_c 値を用いた計算から始め、徐々に k_c 値を大きくした計算を繰り返した。収束した巻波形状を与

える k_c の値は水深 h を用いた無次元値で $10^3/h$ 程度で、これ以上大きな k_c を用いても巻波形状に変化はない。図中には節点配置も示している。これは付録C.1で述べたMesh Functionを用いて自動生成された配置であり、Mesh FunctionとSmoothing splineを組み合わせて用いることで、安定した数値計算を行なうことができる。

D　反射率の計算法

線形波の反射率の計算法として知られている合田の方法[86]の概要を示す。合田の方法は造波水路内の隣接する2点における同時波形記録から入射波と反射波の波高を分離推定する方法で、その原理は以下のようなものである。

まず、入射波と反射波をそれぞれ

$$\eta_I = a_I \cos(kx - \omega t + \theta_I) \tag{D.1}$$

$$\eta_R = a_R \cos(kx + \omega t + \theta_I) \tag{D.2}$$

とする。ここで、a_I, a_R と θ_I, θ_R は入・反射波の振幅と位相、k, ω は波数および角周波数である。Fig.D.1に示す Δl だけ離れた二つの観測点 $x_1, x_2 = x_1 + \Delta l$ で同時計測した波高は、線形波を仮定すると次のように表示することができる。

$$\eta_1 = (\eta_I + \eta_R)_{x=x_1} = A_1 \cos\omega t + B_1 \sin\omega t \tag{D.3}$$

$$\eta_2 = (\eta_I + \eta_R)_{x=x_2} = A_2 \cos\omega t + B_2 \sin\omega t \tag{D.4}$$

ここで、

$$\left.\begin{array}{rcl} A_1 &=& a_I \cos\phi_I + a_R \cos\phi_R \\ B_1 &=& a_I \sin\phi_I - a_R \sin\phi_R \\ A_2 &=& a_I \cos(k\Delta l + \phi_I) + a_R \cos(k\Delta l + \phi_R) \\ B_2 &=& a_I \sin(k\Delta l + \phi_I) - a_R \sin(k\Delta l + \phi_R) \end{array}\right\} \tag{D.5}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} \phi_I &=& kx_1 + \theta_I \\ \phi_R &=& kx_1 + \theta_R \end{array}\right\} \tag{D.6}$$

である。(D.5) 式は四つの未知数 a_I, a_R, ϕ_I, ϕ_R に対する四つの方程式群であり、これを解いて

$$a_I = \frac{1}{2|\sin k\Delta l|}[(A_2 - A_1\cos k\Delta l - B_1 \sin k\Delta l)^2 + (B_2 + A_1 \sin k\Delta l - B_1 \cos k\Delta l)^2]^{\frac{1}{2}} \tag{D.7}$$

$$a_R = \frac{1}{2|\sin k\Delta l|}[(A_2 - A_1\cos k\Delta l + B_1 \sin k\Delta l)^2 + (B_2 - A_1 \sin k\Delta l - B_1 \cos k\Delta l)^2]^{\frac{1}{2}} \tag{D.8}$$

$$\phi_I = \tan^{-1}\left[\frac{-A_2 + A_1\cos k\Delta l + B_1 \sin k\Delta l}{B_2 + A_1 \sin k\Delta l - B_1 \cos k\Delta l}\right] \tag{D.9}$$

$$\phi_R = \tan^{-1}\left[\frac{-A_2 + A_1\cos k\Delta l - B_1 \sin k\Delta l}{-B_2 + A_1 \sin k\Delta l + B_1 \cos k\Delta l}\right] \tag{D.10}$$

$$\tag{D.11}$$

を得る。A_1, A_2, B_1, B_2 は計測波形 η_1, η_2 をフーリエ解析して得られる。よって反射率は a_R/a_I で与えられる。

参考文献

1) Weinblum,G. and St.Denis,M. : On the motions of ships at sea, *Trans. SNAME*, Vol.58, pp184-231, (1950)
2) St.Denis,M. and Pierson,W.J. : On the motions of ships in confused seas, *Trans. SNAME*, Vol.61, pp280-333, (1953)
3) 花岡達郎 : 縦波中の船の運動に関する理論的研究, 学位論文, 九州大学, (1957)
4) Tick,L.J. : Differential equations with frequency-dependent coefficients, *Journal of Ship Research*, Vol.3, No.2, pp45-46, (1959)
5) Cummins,W.E. : The impulse response function and ship motions, *Shiffstechnik*, Bd.9, pp-101-109, (1962)
6) Ogilvie,T.F. : Recent progress toward the understanding and prediction of ship motions, *Proc. of 5th ONR*, Bergen, (1964)
7) 大松重雄 : 浮体の動揺理論における初期値問題の研究, 学位論文, 九州大学, (1980)
8) Adachi,H. and Ohmatsu,S. : On the time dependent potential and its application to wave problem, *Proc. of the 18th Symp. on Naval Hydro., Tokyo, Japan*, III3-1 16, (1980)
9) Ogilvie,T.F. and Tuck,E.O. : A rational strip theory of ship motions, *Rep. No.013, Dept. of Nav. Arch. and Marine Eng.,Univ. of Michigan*, (1969)
10) Maruo,H. : An improvement of the slender body theory for oscillating ships with zero forward speed, *Bulletin of Faculty Eng., Yokohama National Univ.*, Vol.19, pp45-56, (1970)
11) Newman,J.N. : The theory of ship motions, *Advances in Applied Mechanics, Vol.18, Academic Press*, pp221-283, (1978)
12) 小林正典 : 前進速度を有する任意形状の 3 次元物体に働く流体力について, 日本造船学会論文集, 第 150 号, pp175-189, (1981)
13) 岩下英嗣, 大楠丹 : 特異点法による波浪中を航走する船に作用する流体力の研究, 日本造船学会論文集, 第 166 号, pp187-206, (1989)
14) 柏木正 他 : 3 次元理論による計算法, 運動性能研究委員会第 *11* 回シンポジウムテキスト, pp219-292, (1994)
15) Nakos,D.E. : Ship wave patterns and motions by a three dimensional rankine panel method, *Ph.D thesis*, MIT, pp1-172, (1990)
16) 高木健 : Rankine Source 法による波浪変動圧力の計算, 関西造船協会誌, 第219 号, pp47-56, (1993)
17) Longuet-Higgins,M.S. and Cokelet,E. : The deformation of steep surface waves on water, *Proc. Roy. Soc.*, ser.A350, pp1-26, (1976)
18) Vinje,T. and Brevig,P. : Nonlinear Ship Motions, *Proc. of the 3rd. Int. Conf. on Num. Ship Hydro.*, ppIV-3-1 IV-3-10, (1981)
19) Tomita,H. and Tanizawa,K. : Numerical investigation into nonlinear water waves by means of the boundary element method, *Papers of Ship Research Institute*, No.69, pp1-12, (1983)
20) Yeung,R.W. and Wu,C. : Nonlinear wave-body motion in a closed domain, *Computer & Fluids*, Vol.17, pp351-370, (1989)
21) Yang,C. and Lin,Y.Z. : Time-domain calculation of the nonlinear hydrodynamics of wave-body

interaction, *Proc. 5th Int. Conf. Num. Ship Hydro.*, part1, pp341-350, (1989)

22) Sen,D., Pawlowski,J.S., Lever,J. and Hinchey,M.J. : Two-dimensional numerical modeling of large motions of floating bodies in waves, *Proc. 5th Int. Conf. Num. Ship Hydro.*, part1, pp257-277, (1989)

23) 谷澤克治：境界要素法による波浪中２次元浮体の非線形シミュレーション法について, 日本造船学会論文集, 第 168 号, pp221-226, (1990)

24) Lin,W.M. and Yue,D. : Numerical solutions for large-amplitude ship motions in the time domain, *Proc. 18th Symp. on Naval Hydro.*, pp41-66, (1991)

25) Van Daalen,E.F.G. : Numerical and Theoretical Studies of Water Waves and Floating Bodies, *Ph.D. thesis, University of Twente, The Netherlands*, pp1-285, (1993)

26) Sen,D. : Numerical simulation of motions of two-dimensional floating bodies, *Journal of Ship Research*, Vol.37, pp307-330, (1993)

27) Beck,R.F.,Cao,Y. and Lee,T.H. : Fully nonlinear water wave computations using the desingularized method, *Proc. of 6th Int. Conf. on Ship Hydro.*, pp3-20, (1993)

28) Cao,Y.,Beck,R. and Schultz,W.W. : Nonlinear motions of floating bodies in incident waves, *Proc. of 9th Workshop on Water Waves and Floating Bodies, Kuju,Oita*, pp33-37, (1994)

29) Tanizawa,K. : A Nonlinear Simulation Method of 3-D body Motions in Waves, *Proc. of 10th Workshop on Water Waves and Floating Bodies, Oxford*, pp235-240, (1995)

30) Tanizawa,K. : A Nonlinear Simulation Method of 3-D body Motions in Waves, 日本造船学会論文集, 第 178 号, pp179-191, (1995)

31) 谷澤克治：水波の三次元数値計算のための自由表面節点密度制御と最適パネル分割について, 船研講演集, 第 66 回, pp33-38, (1995),

32) Tanizawa,K. : On the paneling technique for the nonlinear simulation of free-surface waves, *Proc. of Symp. on Nonlinear and Free-Surface Flow*, Vol.4, pp37-40, (1995)

33) Tanizawa,K. : A Nonlinear Simulation Method of 3-D body Motions in Waves, Extended formulation for multiple fluid domains, *Proc. of 11th Workshop on Water Waves and Floating Bodies, Hamburg*, (1996)

34) Wu,G.X. and Eatock Taylor,R. : Transient motion of floating body in steep water waves, *Proc. of 11th Workshop on Water Waves and Floating Bodies, Hamburg*, (1996)

35) Tanizawa,K. : Nonlinear simulation of floating body motions in waves, *Proc. of 6th ISOPE conference, Los Angeles, California*, Vol.3, pp414-420, (1996)

36) Saubester,V. : Numerical simulation of transient nonlinear free-surface flows with body interaction, *OMAE Vol.I-A, Offshore Technology ASME.*, pp281-290, (1991)

37) Cointe,R.,Geyer,P.,King,B.,Molin,B. and Tramoni,M. : Nonlinear and linear motions of a rectangular barge in perfect fluid, *Proc. of the 18th Symp. on Naval Hydro., AnnArbor, Michigan*, pp85-98, (1990)

38) Kang,C.G., and Gong,I.Y. : A numerical solution method for three-dimensional nonlinear free surface problems, *Proc. of the 18th Symp. on Naval Hydro., AnnArbor, Michigan.*, pp427-438, (1990)

39) Wang,X.M. and Spaulding,M.L. : A two-dimensional Potential flow model of the wave field generated by a semisubmerged body in heaving motion, *Journal of Ship Research*, Vol.32(2),

pp83-91, (1988)

40) Dommermuth,D.G. and Yue,D.K.P. : Numerical simulations of nonlinear axisymmetric flows with a free surface, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.178, pp195-219, (1987)

41) Dommermuth,D.G., and Yue,D.K.P. : A high-order spectral method for the study of nonlinear gravity waves, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.184, pp267-288, (1987)

42) Greenhow,M. : Wedge entry into initially calm water, *Applied Ocean Research*, Vol.9 (4), (1987)

43) Greenhow,M. and Lin,W.M. : Numerical simulation of nonlinear free surface flows generated by wedge entry and wavemaker motion, *Proc. of the 4th Int. Conf. on Numerical Ship Hydro., Washington, DC.*, Vol.2, pp94-106, (1985)

44) Telste,J.G. : Calculation of fluid motion resulting from large-amplitude forced heave motion of a two-dimensional cylinder in a free surface, *Proc. of the 4th Int. Conf. on Numerical Ship Hydro., Washington, DC.*, Vol.2, pp81-93, (1985)

45) Yim,B. : Numerical solution for two-dimensional wedge slamming with a nonlinear free-surface condition, *Proc. of the 4th Int. Conf. on Numerical Ship Hydro., Washington, DC.*, Vol.2, pp107-116, (1985)

46) Lin,W.M., Newman,J.N., and Yue,D.K.P. : Nonlinear forced motions of floating bodies, *Proc. of the 15th Symp. on Naval Hydro., Hamburg, Germany.*, (1984)

47) Fenton,J.D. and Rienecker,M.M. : A Fourier method for solving nonlinear water-wave problems; application to solitary-wave interactions, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.118, (1982)

48) Isaacson,M. de ST.Q. : Nonlinear-wave effects on fixed and floating bodies, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.120, pp267-281, (1982)

49) Vinje,T., Maogang,X. and Brevig,P. : A numerical approach to nonlinear ship motion, *Proc. of the 14th Symp. on Naval Hydro., AnnArbor, Michigan.*, (1982)

50) Vinje,T. and Brevig,P. : Breaking waves on finite water depths, A numerical study, *Norwegian Hydrodynamic Laboratories, Report R-111.81, Trondheim, Norway.*, (1981)

51) Vinje,T., and Brevig,P. : Nonlinear, two-dimensional ship motions, *Norwegian Hydrodynamic Laboratories, Report R- 112.81,Trondheim, Norway.*, pp1-97, (1981)

52) Haussling,H.J. and Coleman,R.M. : Nonlinear water waves generated by an accelerated circular cylinder, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.92(4), (1979)

53) Faltinsen,O.M. : Numerical solutions of transient nonlinear free surface motion outside or inside moving bodies, *Proc. of the 2nd Int. Conf. on Numerical Ship Hydro., Berkeley, California*, pp347-357, (1977)

54) 池野正明, 松山昌史：津波作用下における浮体構造物の 2 次元非線形挙動解析, 電力中央研究所報告, U95043, pp1-43, (1996)

55) Tanizawa,K. : Long time fully nonlinear simulation of floating body motions with artificial damping zone, 日本造船学会論文集, 第 180 号, pp311-319, (1996)

56) Kashiwagi,M. : Full-nonlinear simulations of hydrodynamic forces on a heaving two-dimensional body, 日本造船学会論文集, 第 180 号, pp373-381, (1996)

57) 野尻信弘, 村山敬一：規則波中の 2 次元浮体に働く漂流力に関する研究, 西部造船会々報, 第 51 号, pp131-152, (1975)

58) Wicheres,J.E.W. and Slujis,M.F.: The influence of wave on the low frequency hydrodynamic coefficients of moored vessels, *Proc. of Offshore Tech. Conf.*, No.3625, pp2313-2324, (1979)
59) Faltinsen,O.M. : Slow-drift damping and responses of moored ship in irregular waves, *5th OMAE Symp., Tokyo*, (1986)
60) Wicheres,J.E.W.: A simulation model for a single point moored tanker, *MARIN Publication*, No.797, (1988)
61) 斉藤公男, 高木又男, 大久保寛, 平島充雄 : 長周期動揺する係留浮体に働く減衰力について, 関西造船協会誌, 第 195 号, pp51-59, (1984)
62) 木下健, 高岩千人, 村上高宏, 増田光一 : 波漂流減衰力と長周期付加質量を考慮した浮遊式海洋構造物の波浪中長周期運動シミュレーションについて, 日本造船学会論文集, 第 166 号, pp151-162, (1989)
63) Hearn,G.E. and Tong,K.C. : A comparative study of experimentally measured and theoretically predicted wave drift damping coefficients, *Proc. Offshore Tech. Conf.*, No.6136, (1989)
64) Zhao,R. and Faltinsen,O.M. : Interaction between current, waves and marine structures, *Proc. 5th Int. Conf. on Num. Ship Hydro.*, Hiroshima, (1989)
65) Nossen,J., Grue,J and Palm,E. : Wave forces on three-dimensional floating bodies with small forward speed, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.227, (1991)
66) Kinoshita,T, Bao,W. and Sunahara,S. : Wave drift damping of multiple vertical cylinders : prediction and measurement *Subcommittee of performance committee of Ocean Eng. of SNAJ, 70th*, pp1-20, (1993)
67) Eatock Taylor,R. and Teng,B. : The effect of corners on diffraction/radiation forces and wave drift damping, *Proc. Offshore Tech. Conf.*, No.7187, (1993)
68) Clark,P.J., Malenica,S. and Molin,B. : An heulistic approach to wave drift damping, *Applied Ocean Research*, Vol.15, pp53-55, (1993)
69) Newman,J.N. : Wave-drift damping of floating bodies, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.249, (1993)
70) 砂原俊之 : 円柱列に働く波漂流減衰力に関する研究, 学位論文, 東京大学, pp1-158, (1994)
71) Tanizawa,K. and Naito,S. : A study on wave-drift damping by fully nonlinear simulation, *Proc. of 12th Workshop on Water Waves and Floating Bodies, Carry-le-Rouet, Marseille*, (1997)
72) Hsu,C.S. : On nonlinear parametric excitation problems, *Advances in Applied Mechanics*, Vol.17, pp245-298, (1977)
73) Skomedal,N.G. : Parametric excitation of roll motion and its influence on stability, *Proc. of 2nd Int. Conf. on Stability of Ships and Ocean Vehicles, Tokyo*, pp113-125, (1982)
74) 経塚雄策 : 規則波中の係留浮体の不安定左右揺に関する研究, 大阪大学修士論文, pp1-82, (1977)
75) Tanizawa,K. and Naito,S. : A study on parametric roll motions by fully nonlinear numerical wave tank, *Proc. of 7th ISOPE conference, Honolulu, Hawaii*, (1997)
76) 寺沢寛一 : 自然科学者のための数学概論応用編, 岩波書店, pp146-180, (1960)
77) 戸田盛和 : 振動論, 培風館, pp32-48, (1968)
78) Romate,J.E. : Absorbing boundary conditions for free surface waves, *J. of Comp. Physics*, Vol.99, pp135-145, (1992)

79) Liu,P.L-F. and Abbaspour,M. : An integral equation method for the diffraction on oblique waves by an infinite cylinder, *Int. J. of Numerical Methods in Eng.*, Vol.18, pp1497-1504, (1982)

80) Nestegard,A. and Sclavounos,P.D. : A numerical solution of two-dimensional deep water wave-body problems, *Journal of Ship Research*, Vol.28, pp48-54, (1984)

81) Takagi,K. and Naito,S. : An application of boundary element method to the fluid-body interaction problem, *Proc. of 8th Int. Conf. Offshore Mech. and Arctic Eng., Hague*, pp9-15, (1989)

82) Chan,R.K.C. : Two dimensional time-dependent calculations of large-amplitude surface gravity waves due to a surface disturbance, *Proc. of 1st Int. Conf. on Numerical Ship Hydro.*, pp315-331, (1975)

83) Chan,R.K.C. : Finite difference simulation of the planar motion of a ship, *Proc. of 2nd Int. Conf. on Numerical Ship Hydro.*, pp39-52, (1977)

84) Yen,S.M. and Hall,D.R. : Implementation of open boundary conditions for nonlinear free-surface wave problems. *Proc. of 3rd Int. Conf. on Numerical Ship Hydro.*, pp163-176, (1981)

85) Baker,G.R.,Merion,D.I. and Orszag,S.A. : Application of a generalized vortex method to nonlinear free-surface flows, *Proc. of 3rd Int. Conf. on Numerical Ship Hydro.*, pp179-191, (1981)

86) 合田良実, 鈴木康正, 岸良安治, 菊池治 : 不規則波実験にける入・反射波の分離測定法, 港湾技研資料, No.248, pp3-24, (1976)

87) Dean,R.G. and Dalrymple,R.A. : Water wave mechanics for engineers and scientists, *World Scientific*, pp170-186, (1991)

88) Lancaster,P. and Salkauskas,K. : Curve and surface fitting, *Academic Press*, pp87-111, (1986)

89) Hyman,J.M. and Naughton,M.J. : Static rezone methods for tensor-product grids, *Lectures in Applied Mathematics, AMS, Providence*, Vol.22, pp321-343, (1985)

90) Wahba,G. : Bayesian confidence intervals for cross validated smoothing spline, *Technical Report No.645, Department of statistics, University of Wisconsin*, pp1-60, (1981)

91) Craven,P. and Wahba,G. : Smoothing noisy data with spline functions, Estimating the correct degree of smoothing by the method of generalized cross-validation, *Technical Report No.445, Department of statistics, University of Wisconsin*, pp1-46, (1977)

表一覧

5.1 Valid measuring time of the experiment 72
5.2 Principal dimensions of the midship section body 72
5.3 Principal dimensions of the bow section body 72
5.4 Principal dimensions of the measuring equipment 73
C.1 Effect of smoothing spline to higher order waves 73

図一覧

2.1 Computational domain 74
2.2 Frame of reference 74
2.3 Local coordinate system 75
2.4 Fluid domains inside and outside of a ship 75
3.1 Intersection of the free surface and the body surface 76
3.2 Damping zone as a simple wave absorber 77
3.3 Damping zone as an absorbing wave maker 77
3.4 Computational flow of the present method 78
3.5 Computational flow of the conventional method 79
4.1 Coordinate system for 2-D simulation 80
4.2 Simulation of a 2-D floating body motions with a round bottom 80
4.3 Simulated free heave motion of the body 81
4.4 Conservation check of fluid volume 82
4.5 Conservation check of vertical momentum 83
4.6 Conservation check of fluid energy 84
4.7 Convergence plot of momentum and energy conservation error in relation to the number of time steps per heave cycle 85
4.8 Simulated body motions in a wave generated by the piston wave maker 86
4.9 Conservation check of momentum and energy 87
4.10 The target of the numerical simulation 88
4.11 Simulated fluid and body motions (Cal.1) 89
4.12 Simulated fluid and body motions (Cal.2) 90
4.13 Simulated fluid and body motions (Cal.3) 91
4.14 Floating body motions 92
4.15 Conservation check of momentum and energy (Cal.2) 93
4.16 Wave profiles inside and outside of the damping zone, $\alpha = 1, \beta = 1$ 94
4.17 Reflection coefficient of the damping zone estimated by Goda's method 95
4.18 Reflection coefficient vs. α 96
4.19 Reflection coefficient vs. β 96
4.20 Reflection coefficient vs. h_w/λ 97
4.21 Wave profiles inside and outside of the wave making damping zone $\alpha = 1, \beta = 1$. 98
4.22 Wave amplitude at $X = 3$ 99
4.23 Wave profiles inside and outside of the wave making damping zone $\alpha = 1, \beta = 1$. 100

5.1 Test basin used for the experiment . . . 101
5.2 Two dimensional portable wave channel installed in the test basin . . . 101
5.3 Body shape of the midship section model . . . 102
5.4 Body shape of the bow section model . . . 102
5.5 Measuring equipment . . . 103
5.6 Simulation with damping zones . . . 103
5.7 Comparison of body motions and hydrodynamic forces between simulation and experiment (Midship section body) . . . 104
5.8 Comparison of body motions and hydrodynamic forces between simulation and experiment (Midship section body) . . . 105
5.9 Comparison of body motions and hydrodynamic forces between simulation and experiment (Midship section body) . . . 106
5.10 Comparison of body motions and hydrodynamic forces between simulation and experiment (Midship section body) . . . 107
5.11 Comparison of body motions and hydrodynamic forces between simulation and experiment (Midship section body) . . . 108
5.12 Comparison of body motions and hydrodynamic forces between simulation and experiment (Midship section body) . . . 109
5.13 Comparison of pressure time history between simulation and experiment (Midship section body) . . . 110
5.14 Simulated step response of the moored midship section body in still water . . . 111
5.15 Simulated slow drift motion of the midship section body in a regular wave . . . 111
5.16 Simulated slow drift motion of the midship section body oscillated by an external force . . . 112
5.17 Simulated forced slow drift motion of the midship section body in still water . . . 113
5.18 Simulated motions of the midship section body in a regular wave with the mooring force give by eq.(5.4.11) . . . 114
5.19 Comparison of body motions between simulation and experiment (Bow section body) . . . 115
5.20 Comparison of body motions between simulation and experiment (Bow section body) . . . 116
5.21 Simulated parametric motions of the bow section body . . . 117
5.22 Contour plot of ϕ . . . 118
5.23 Contour plot of $\partial\phi/\partial t$ . . . 118
5.24 Comparison of pressure time history between simulation and experiment (Bow section body) . . . 119
5.25 Criteria of parametric and harmonic regions given by experiment . . . 120
5.26 Reference frame of the Mathieu type simultaneous equation of heave and roll motions 120
5.27 Variation of displacement and metacentric height v.s. draft (Bow section model) . 121
5.28 Stable and unstable regions of Mathieu equation . . . 121

5.29 Criteria of parametric and harmonic regions given by the Mathieu type model equation . . . 122
5.30 Criteria of parametric and harmonic regions given by the nonlinear simulation . . 122
5.31 Criteria of parametric and harmonic regions. Comparison among experiment, the nonlinear simulation and the Mathieu type model equation . . . 123
A.1 Local polar coordinate . . . 124
B.1 Euler angles . . . 124
C.1 Collocation points generated on the bow section body . . . 125
C.2 Mesh function and its integral . . . 125
C.3 Gain of the smoothing spline as a function of k_c . . . 126
C.4 Smoothing splines applied to a sinusoidal function . . . 126
C.5 Simulated profile of a plunging wave . . . 127
D.1 Incident wave and the reflected wave inside a wave basin . . . 127

Table 5.1: Valid measuring time of the experiment

Wave Length λ (m)	Wave Period T_w (sec)	Valid measuring time T_v (sec)	T_v/T_w
1.0	0.801	59.25	73.97
2.0	1.132	41.90	37.01
3.0	1.387	34.21	24.66
4.0	1.601	29.62	18.50
5.0	1.790	26.50	14.80
6.0	1.961	24.19	12.34
7.0	2.118	22.40	10.58
8.0	2.265	20.95	9.249
9.0	2.402	19.75	8.222

Table 5.2: Principal dimensions of the midship section body

Item		M-K-S system		Nondimensional value
Breadth	B	0.740	m	1.00
Depth	D	0.415	m	0.568
Length	L	0.997	m	1.347
Draft	d	0.250	m	0.338
Displacement	W	184.3	kg	0.337
Center of inertia	KG	0.220	m	0.297
Radius of inertia	R_I	0.266	m	0.359
Metacenter height	GM	0.083	m	0.112
Natural period of heave	T_h	1.41	sec	5.12
Natural period of roll	T_r	1.78	sec	6.46

Principal dimensions are nondimensionalized using breadth of body ($B = 0.74m$), density of water ($\rho = 1000kg/m^3$) and gravitational acceleration ($g = 9.8m/s^2$).

Table 5.3: Principal dimensions of the bow section body

Item		M-K-S system		Nondimensional value
Breadth	B	0.600	m	1.00
Breadth at W.L.	$B_{W.L.}$	0.304	m	0.507
Depth	D	0.532	m	0.883
Length	L	0.997	m	1.347
Draft	d	0.370	m	0.617
Displacement	W	48.55	kg	0.135
Center of inertia	KG	0.242	m	0.403
Radius of inertia	R_I	0.193	m	0.322
Metacenter height	GM	0.032	m	0.053
Natural period of heave	T_h	1.07	sec	4.32
Natural period of roll	T_r	2.66	sec	10.8

Principal dimensions are nondimensionalized using breadth of body ($B = 0.60m$), density of water ($\rho = 1000kg/m^3$) and gravitational acceleration ($g = 9.8m/s^2$).

Table 5.4: Principal dimensions of the measuring equipment

Swaying carriage	Weight	5875 g
	Measuring span	$\pm$40 cm
Heaving rod	Weight	453 g
	Measuring span	$\pm$20 cm
Gimbal	Weight	525 g
	Measuring angle	$\pm 30^\circ$
Load cell	Weight	137 g
	Capacity	$\pm$5 kgf
Mooring system	Balance weight	500 g
	Spring constant	51.07 N/m

Table C.1: Effect of smoothing spline to higher order waves

n	k_{max}	k_c	$g(k_{max})$	$g(k)$	$g(2k)$	$g(3k)$
10	31.42	18.14	0.10	0.98581061	0.81281116	0.46170525
20	62.83	36.28	0.10	0.99910121	0.98581061	0.93208133
30	94.25	54.42	0.10	0.99982233	0.99716487	0.98581061
40	125.66	72.56	0.10	0.99994378	0.99910121	0.99546641
50	157.08	90.70	0.10	0.99997697	0.99963166	0.99813806
60	188.50	108.84	0.10	0.99998889	0.99982233	0.99910121
70	219.91	126.98	0.10	0.99999401	0.99990409	0.99951465
80	251.33	145.12	0.10	0.99999649	0.99994378	0.99971544

($\lambda = 1,\ k = 2\pi$)

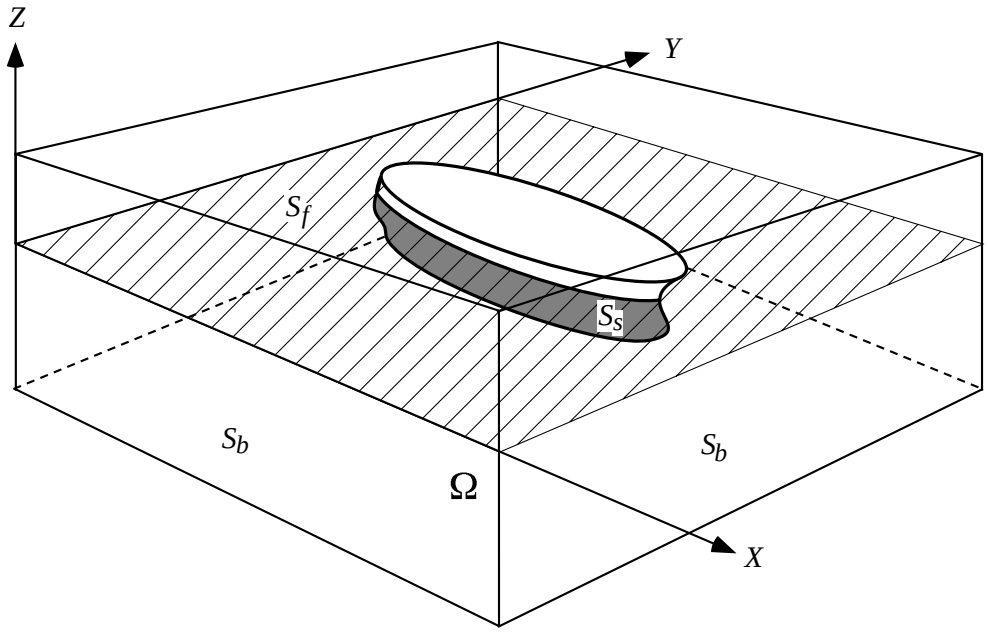


Fig.2.1: Computational domain

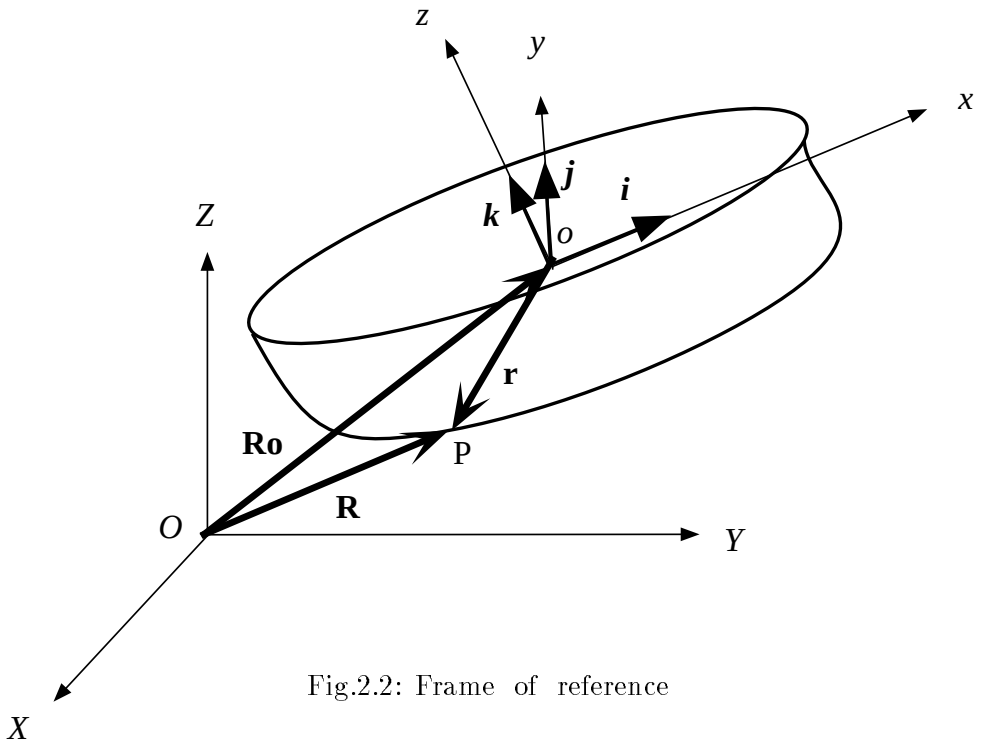


Fig.2.2: Frame of reference

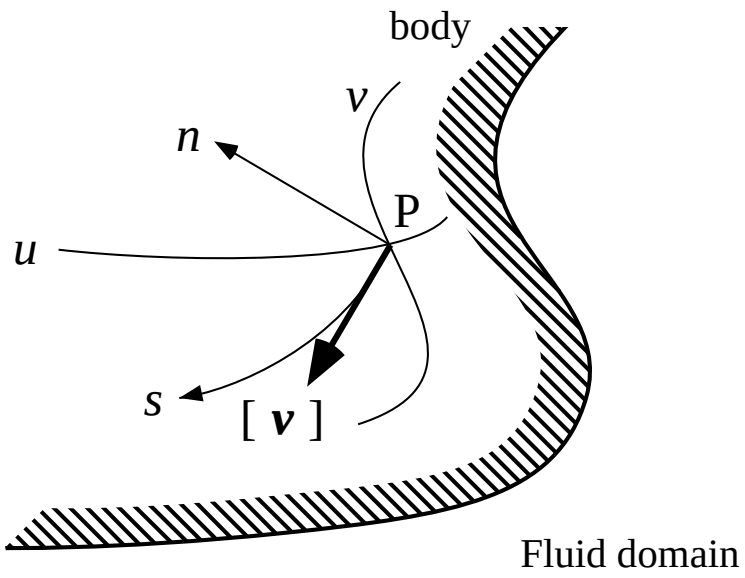


Fig.2.3: Local coordinate system

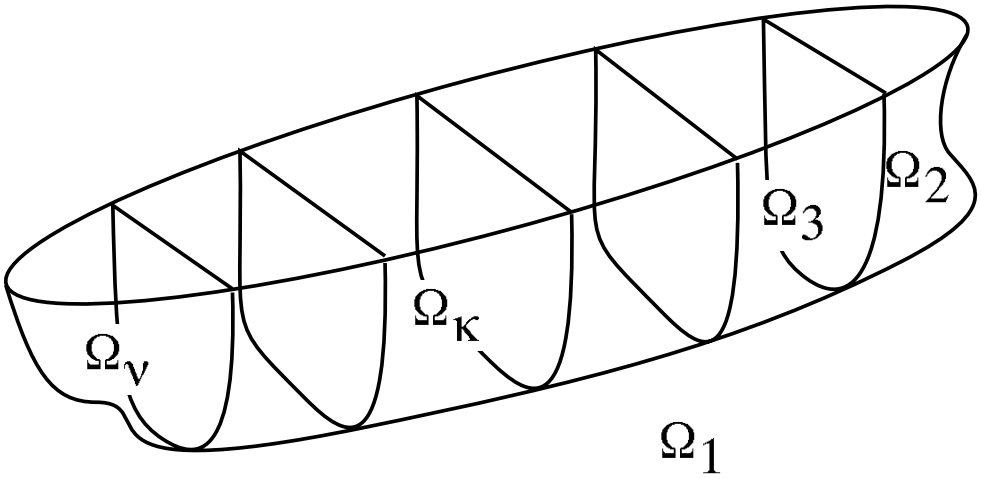


Fig.2.4: Fluid domains inside and outside of a ship

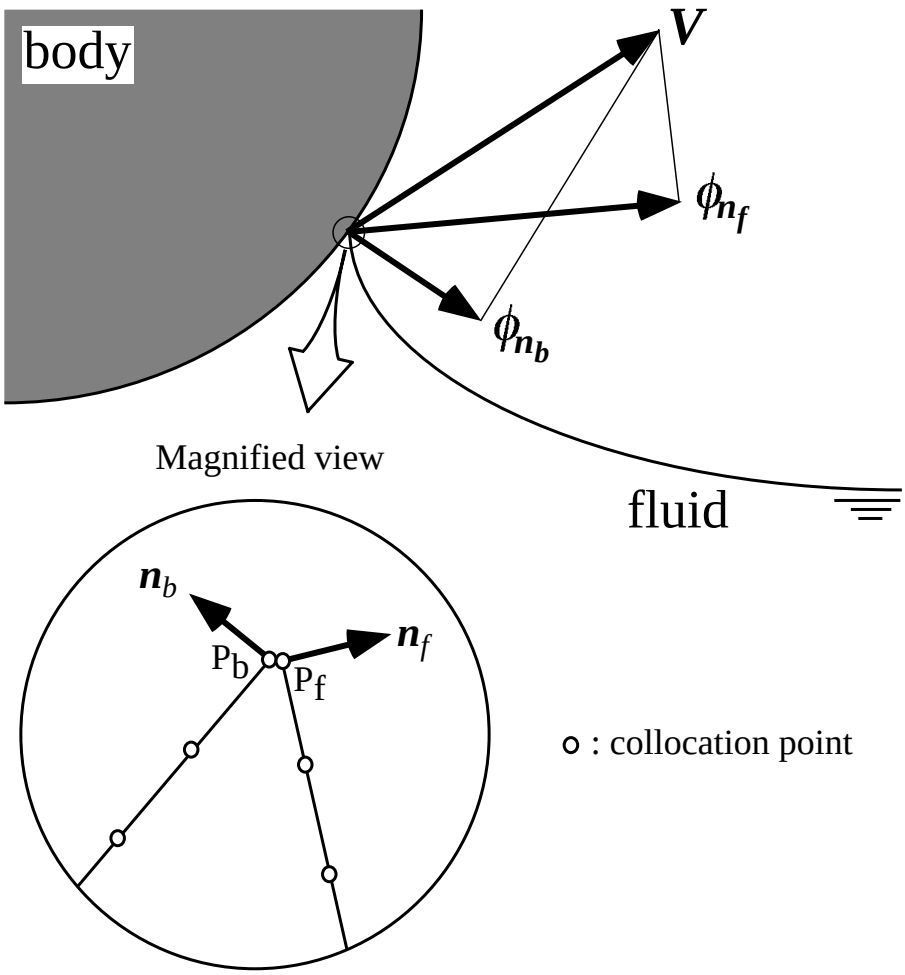


Fig.3.1: Intersection of the free surface and the body surface

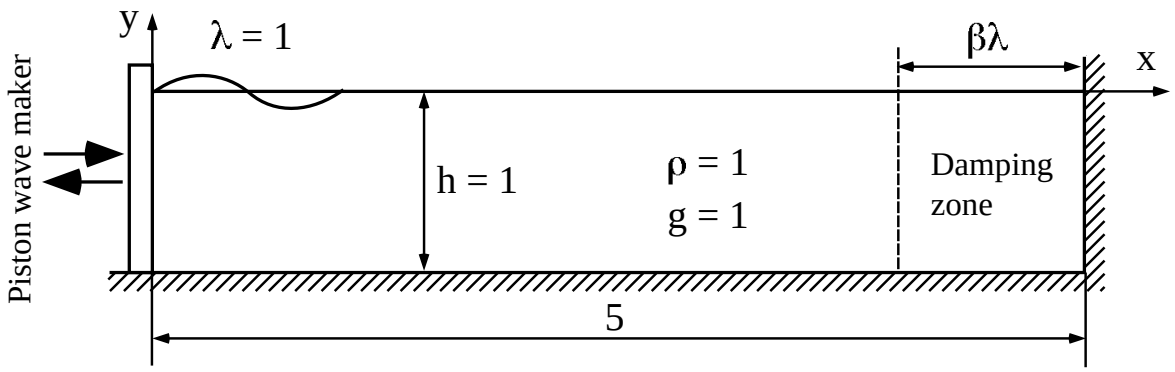


Fig.3.2: Damping zone as a simple wave absorber

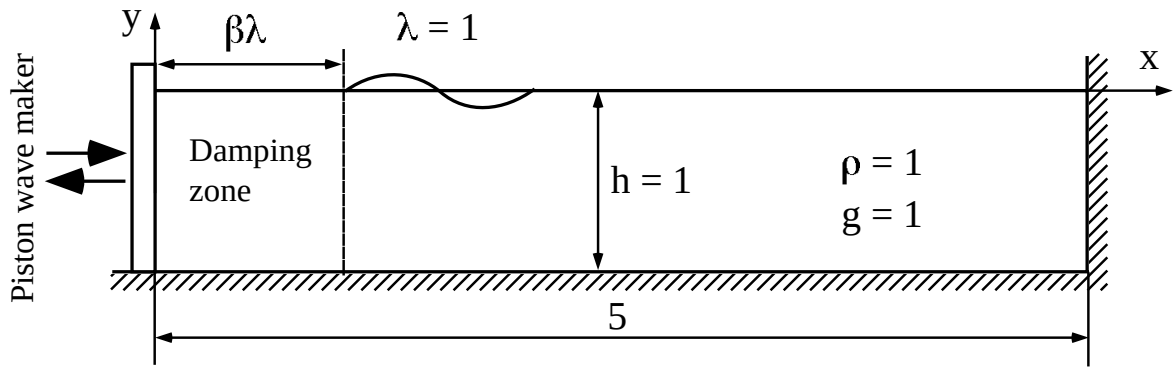


Fig.3.3: Damping zone as an absorbing wave maker

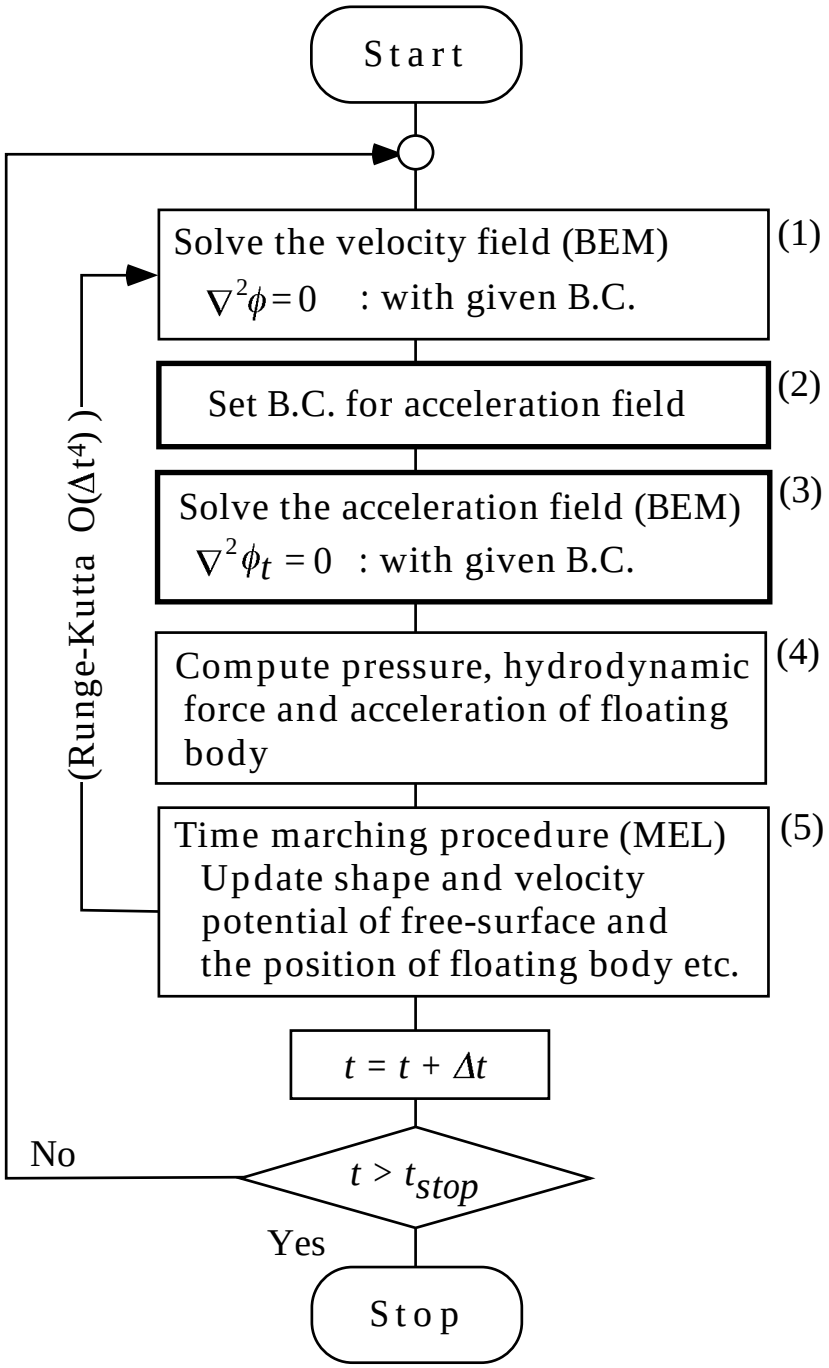


Fig.3.4: Computational flow of the present method

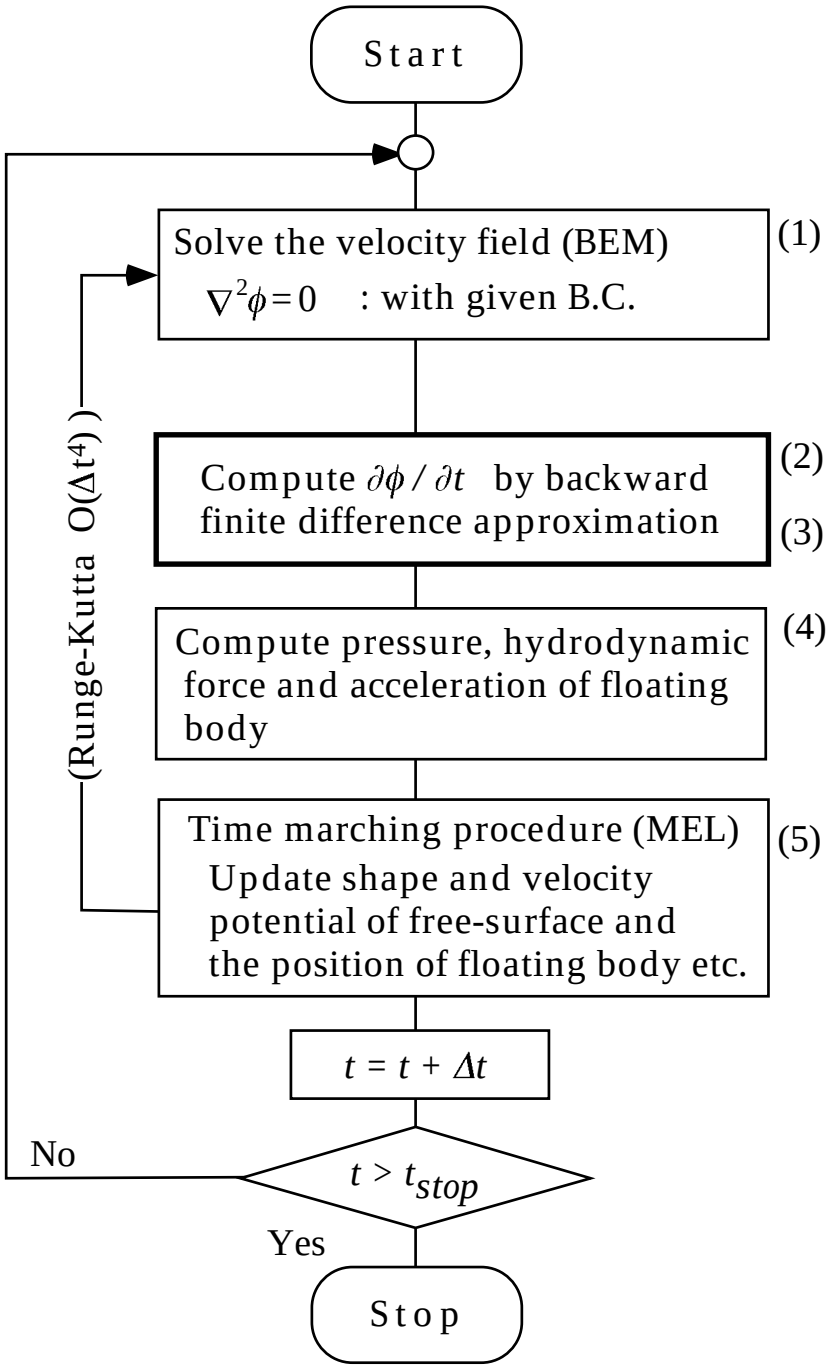


Fig.3.5: Computational flow of the conventional method

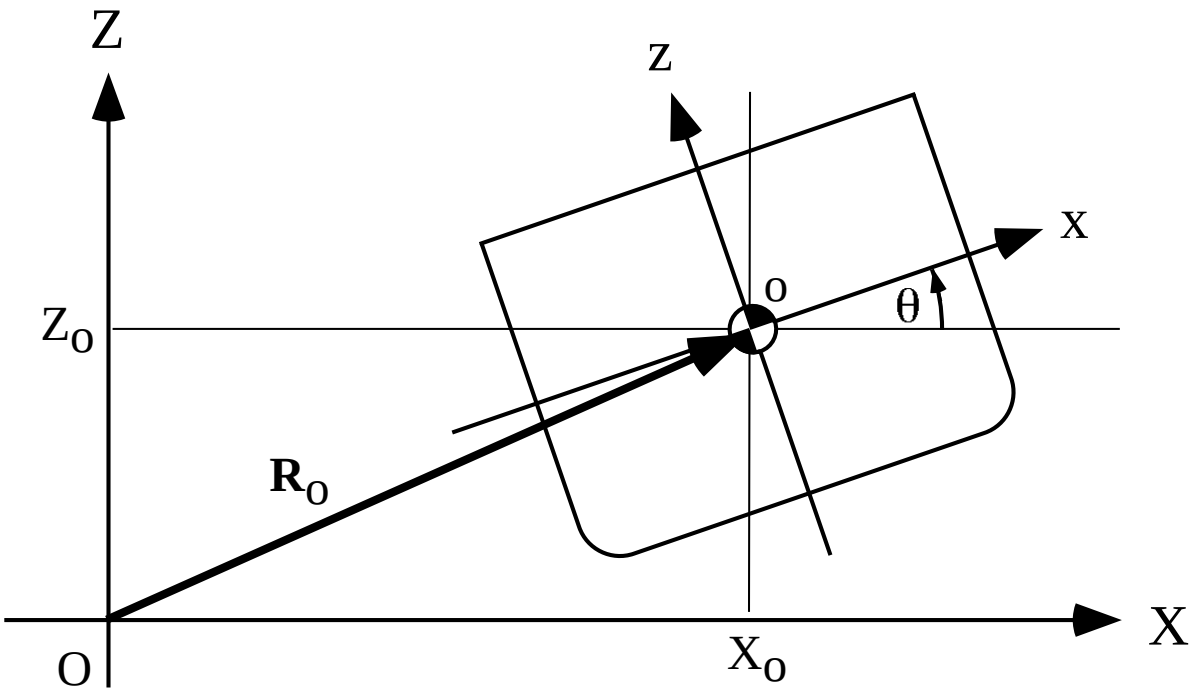
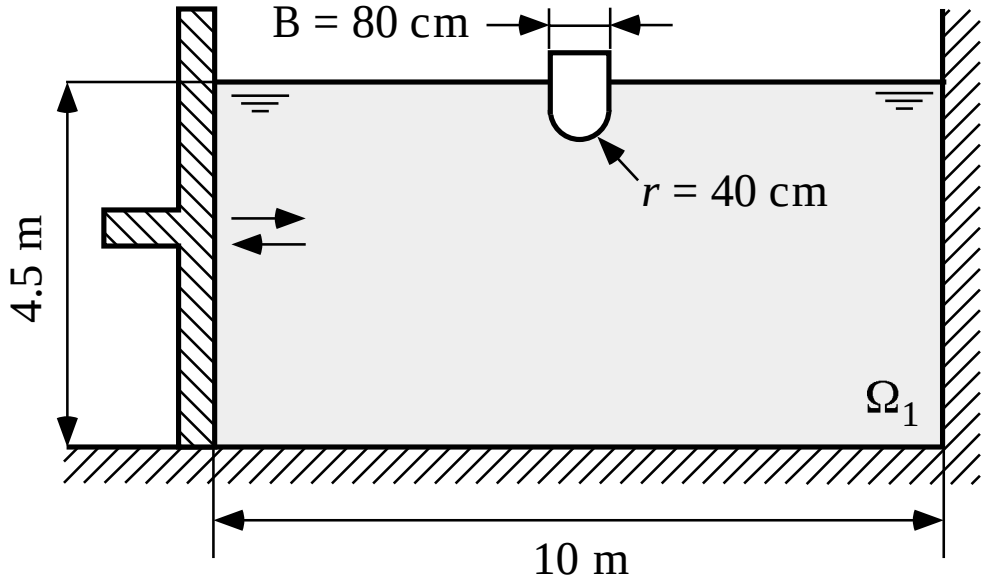


Fig.4.1: Coordinate system for 2-D simulation



Floating body	Fluid
$m \ / L$ = 500 kg / m	ρ_1 = 1000 kg / m^3
$i_{yy} \ / L$ = 20 kg-m^2 / m	Gravity
	g = 9.8 m / s^2

L : Length of the 2-D body

Fig.4.2: Simulation of a 2-D floating body motions with a round bottom

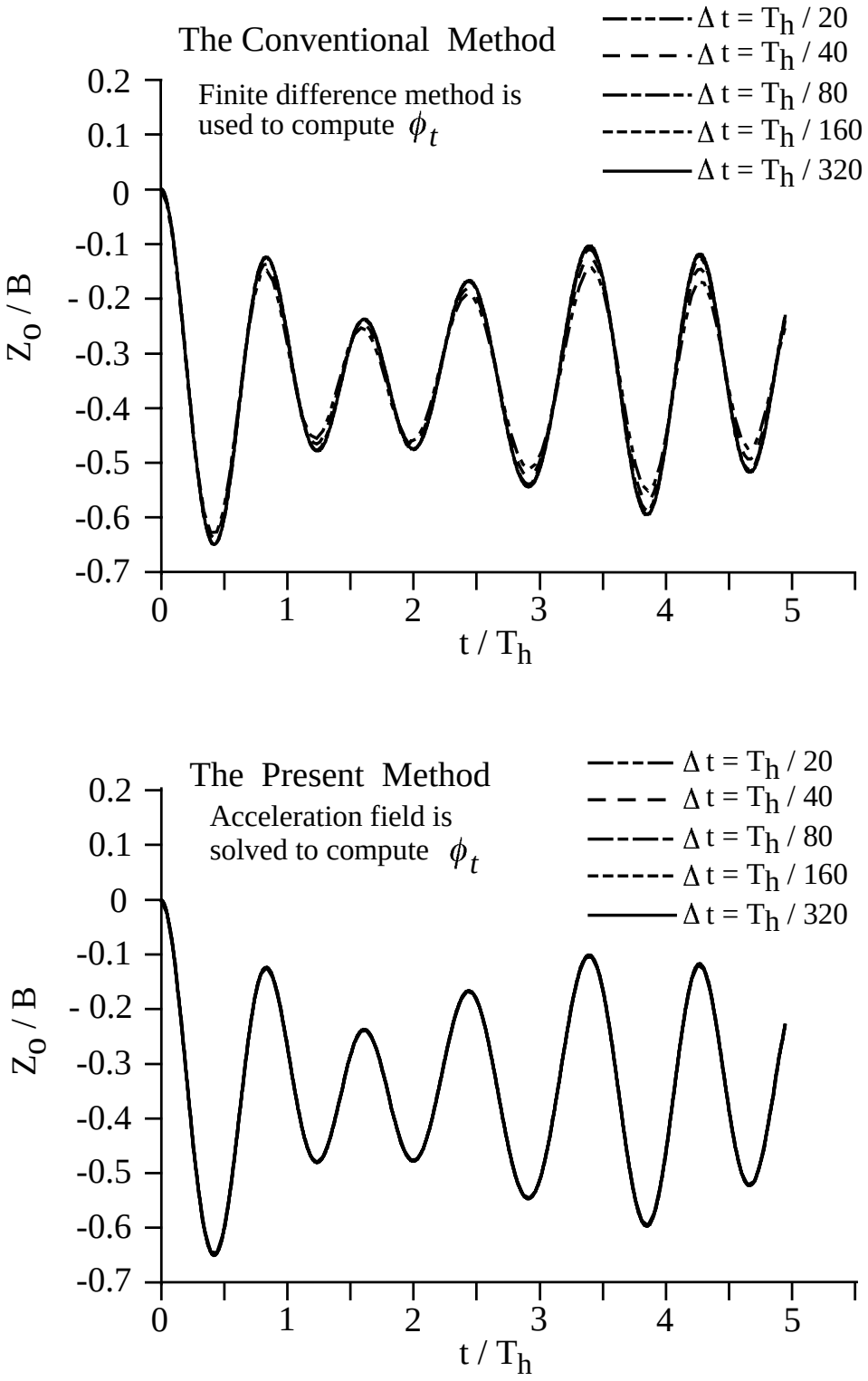


Fig.4.3: Simulated free heave motion of the body

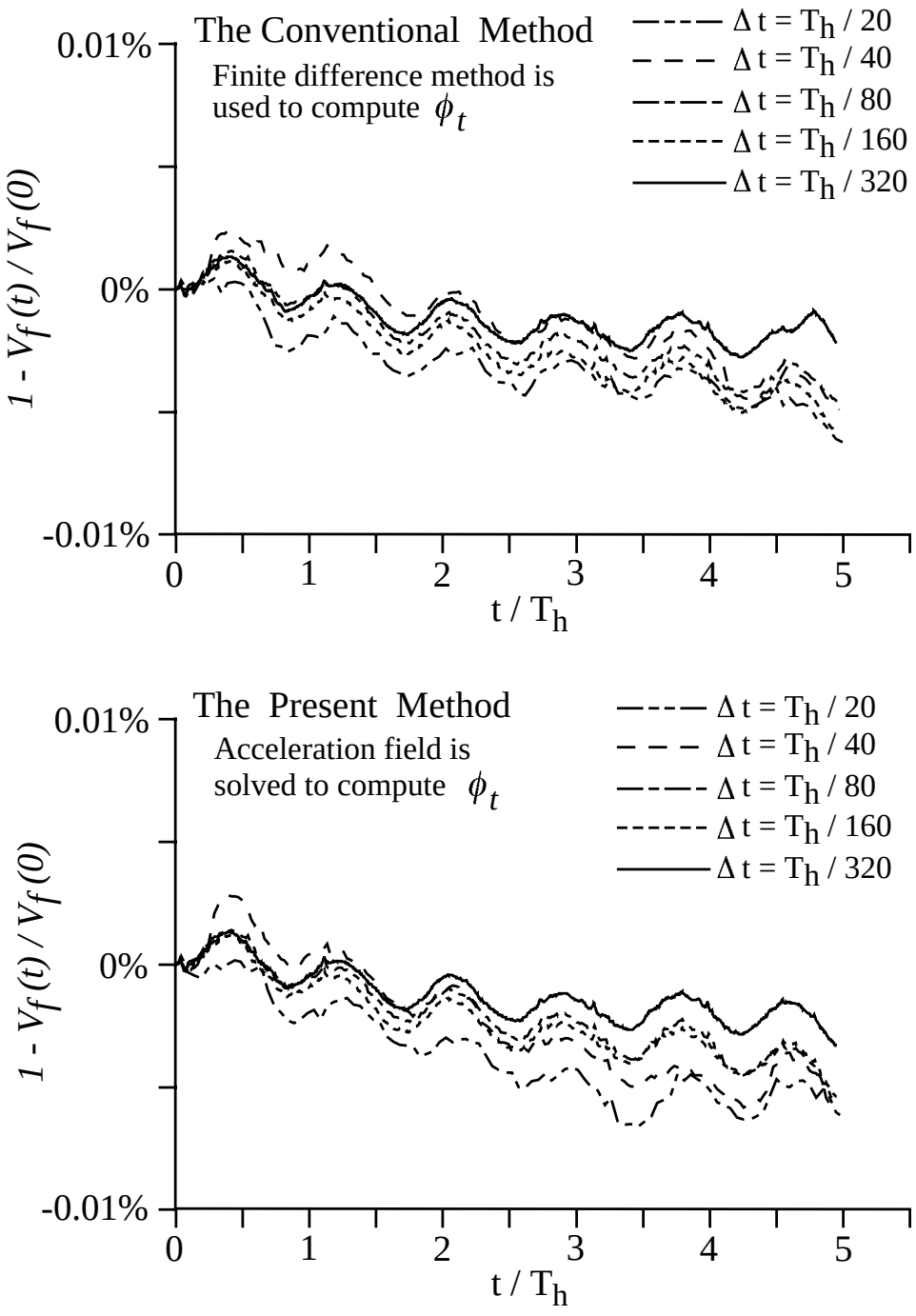


Fig.4.4: Conservation check of fluid volume

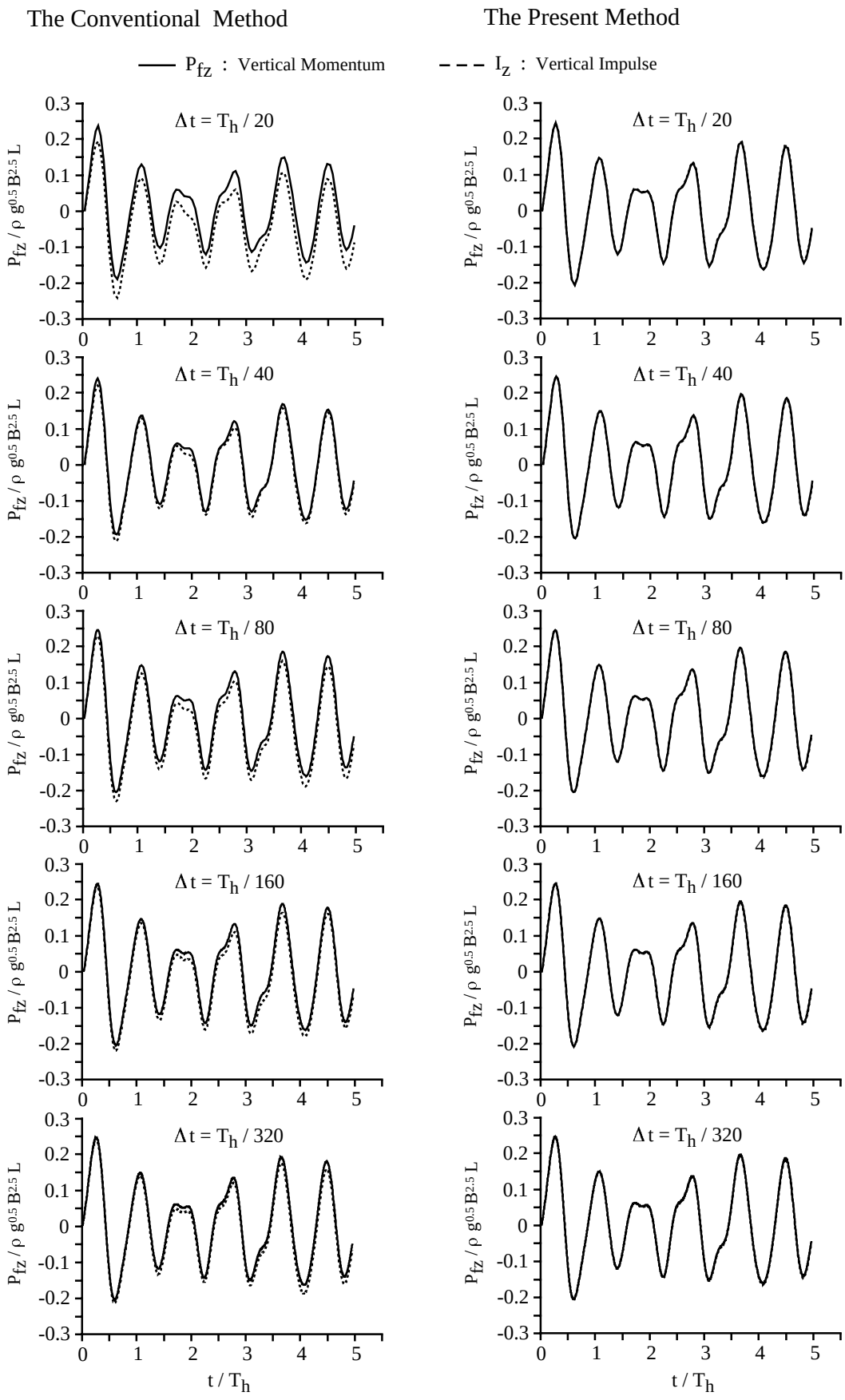


Fig.4.5: Conservation check of vertical momentum

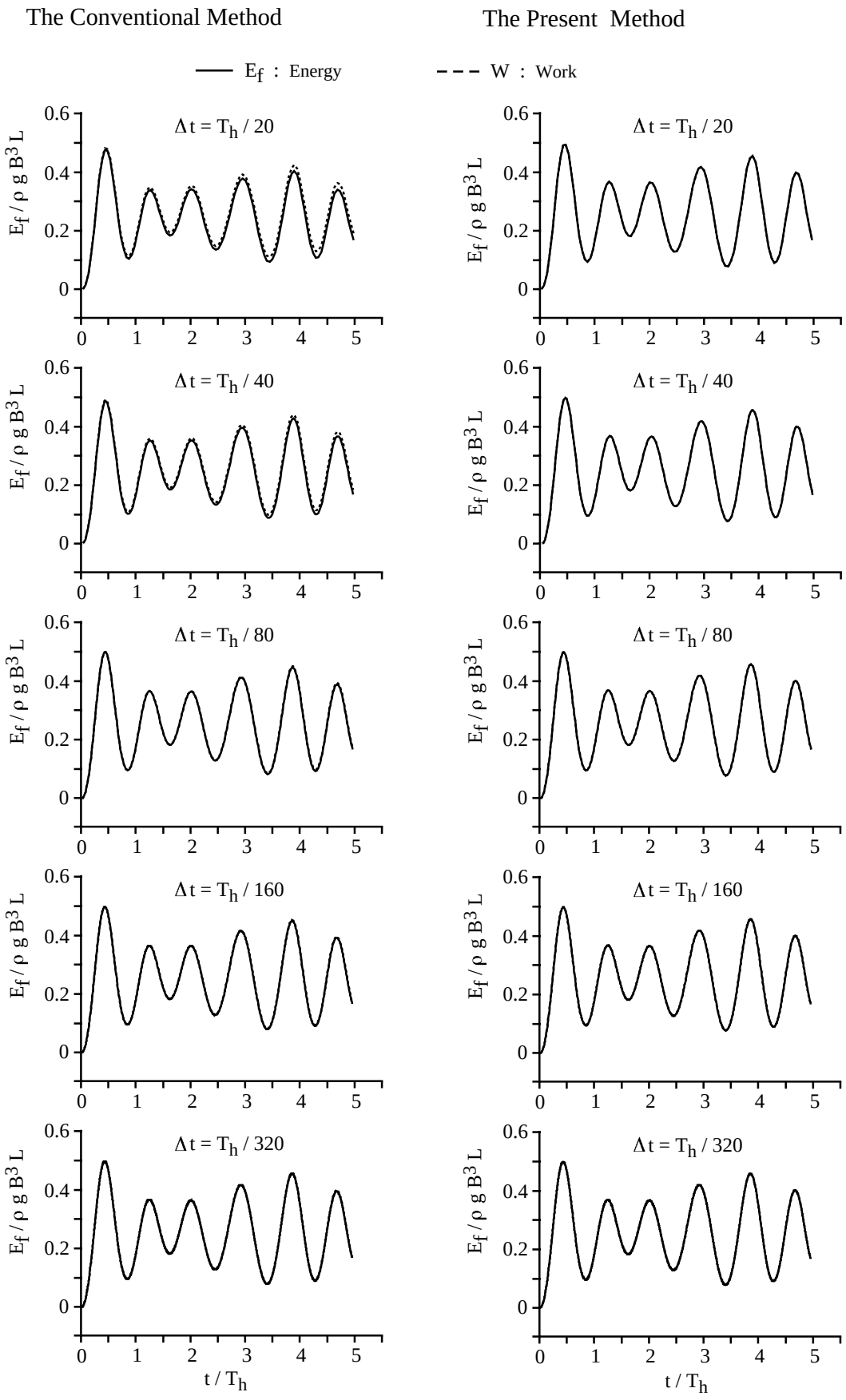


Fig.4.6: Conservation check of fluid energy

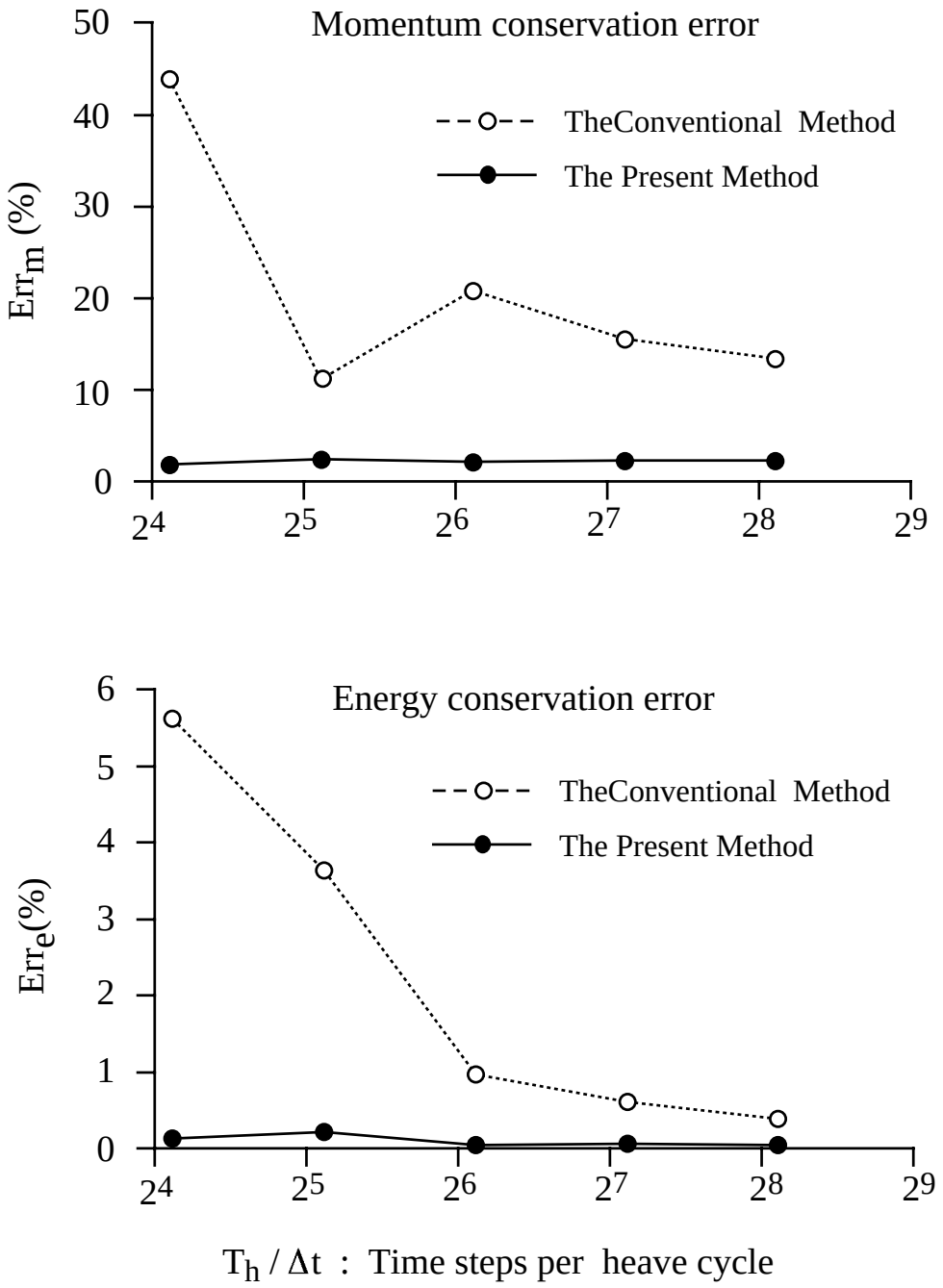


Fig.4.7: Convergence plot of momentum and energy conservation error in relation to the number of time steps per heave cycle

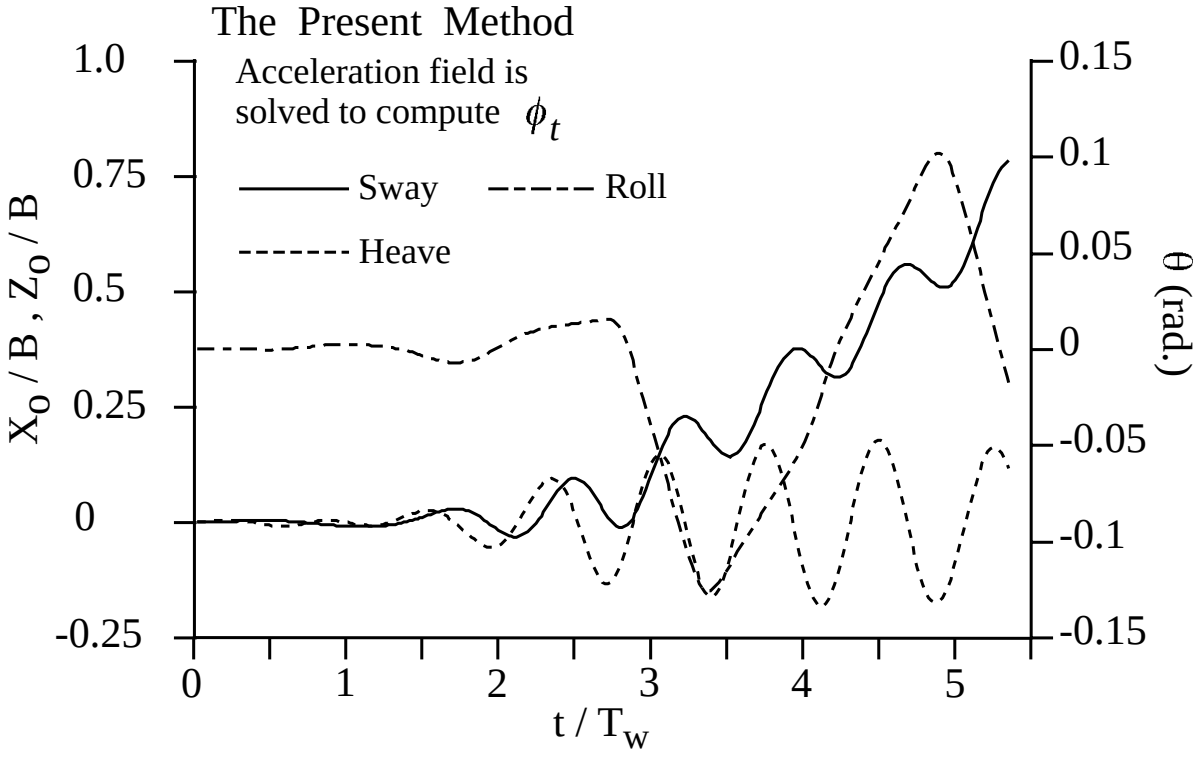


Fig.4.8: Simulated body motions in a wave generated by the piston wave maker

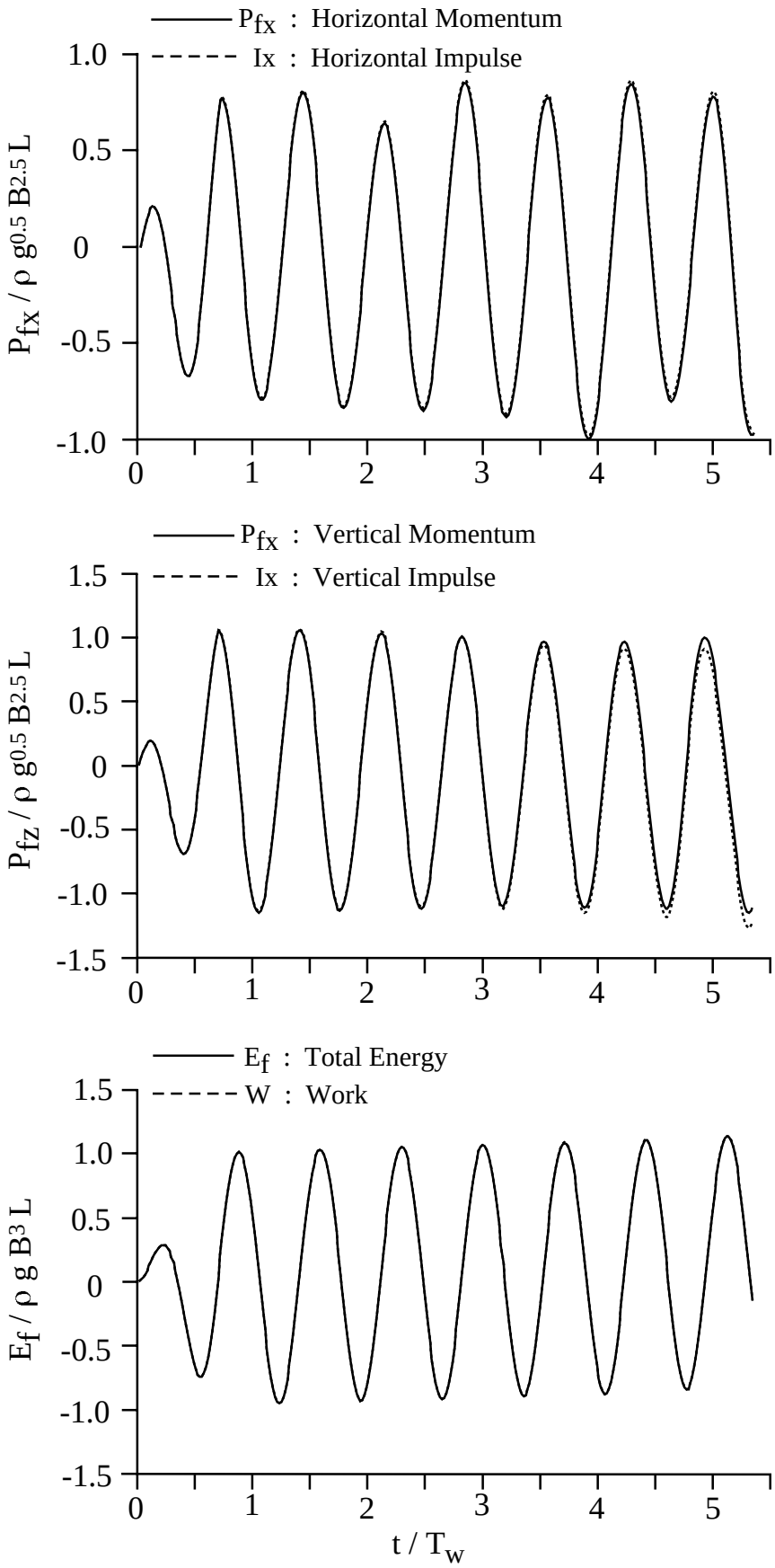
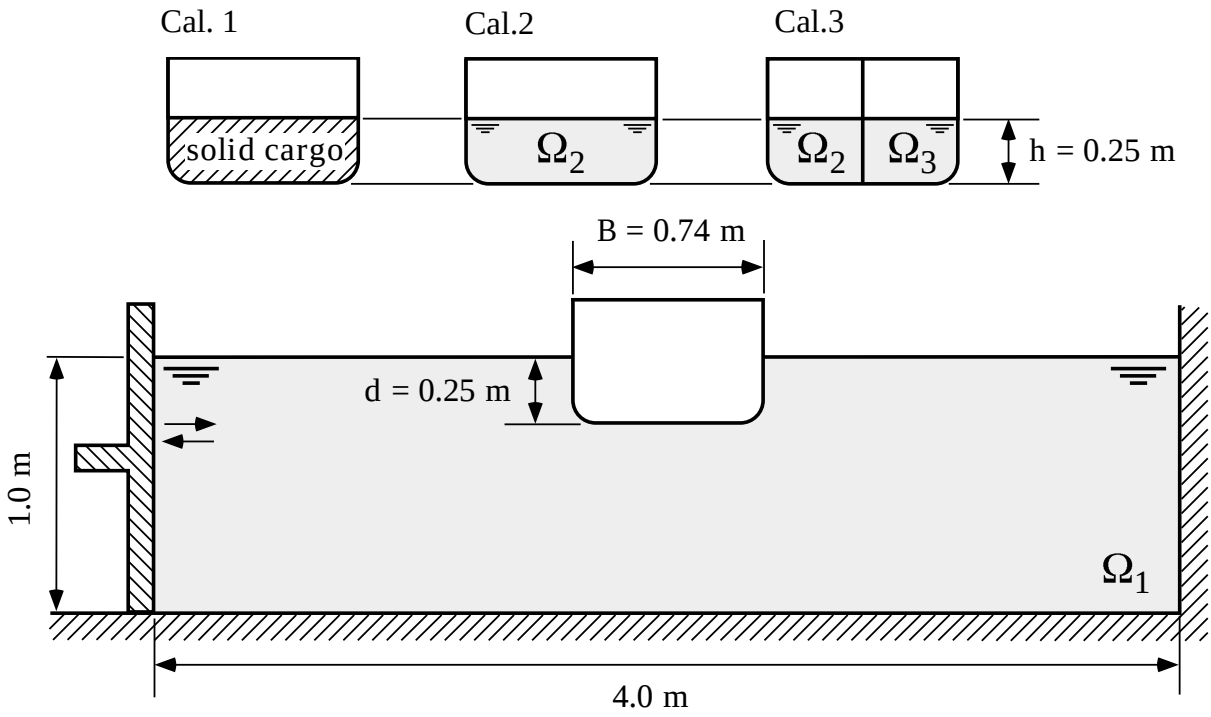


Fig.4.9: Conservation check of momentum and energy



Floating body	Fluid	Solid cargo
m / L = 36.0 kg / m	ρ_1 = 1000 kg / m^3	ρ = 800 kg / m^3
i_{yy} / L = 2.55 kg-m^2 / m	ρ_2 = 800 kg / m^3	Gravity
	ρ_3 = 800 kg / m^3	g = 9.8 m / s^2

L : Length of the 2-D body

Fig.4.10: The target of the numerical simulation

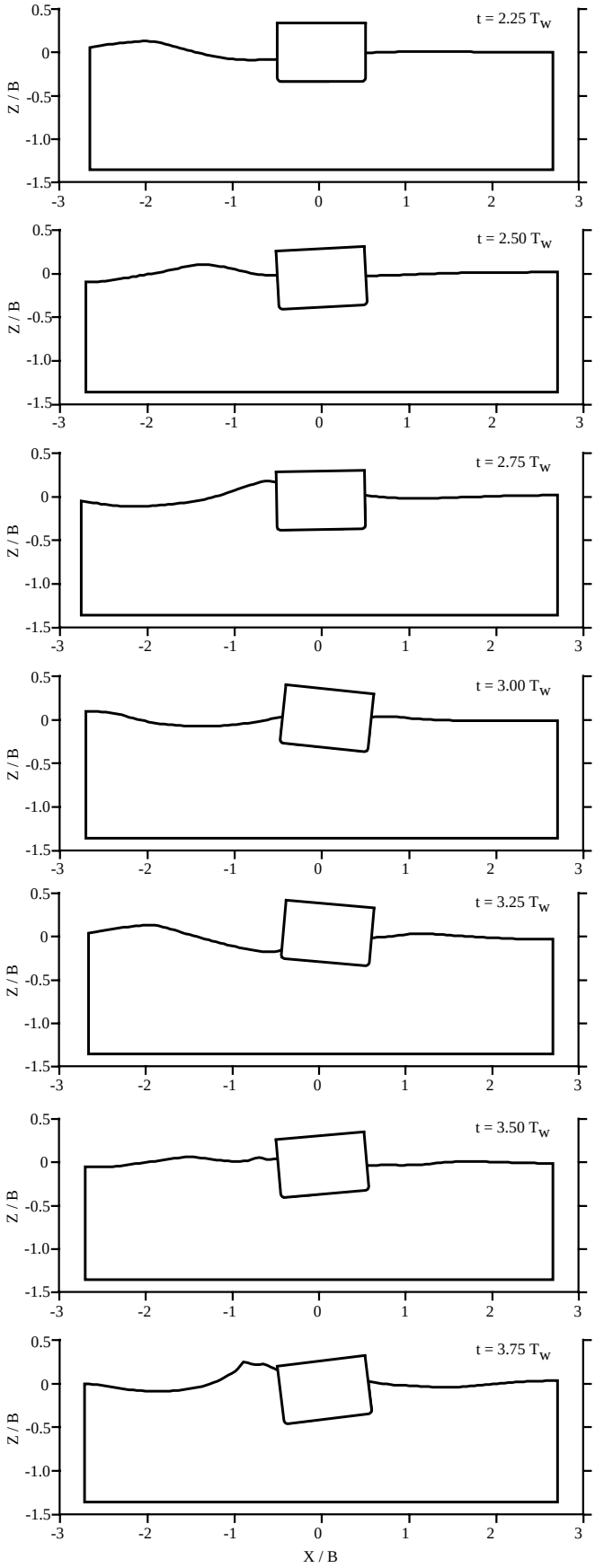


Fig.4.11: Simulated fluid and body motions (Cal.1)

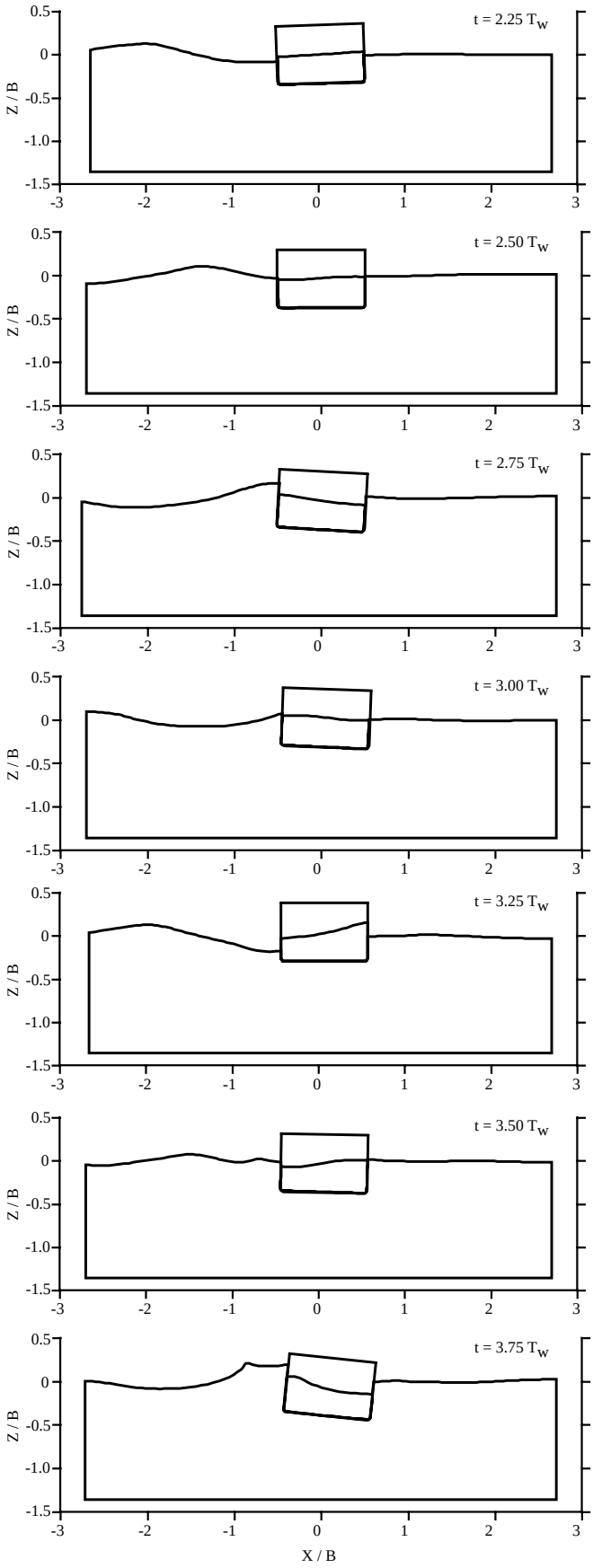


Fig.4.12: Simulated fluid and body motions (Cal.2)

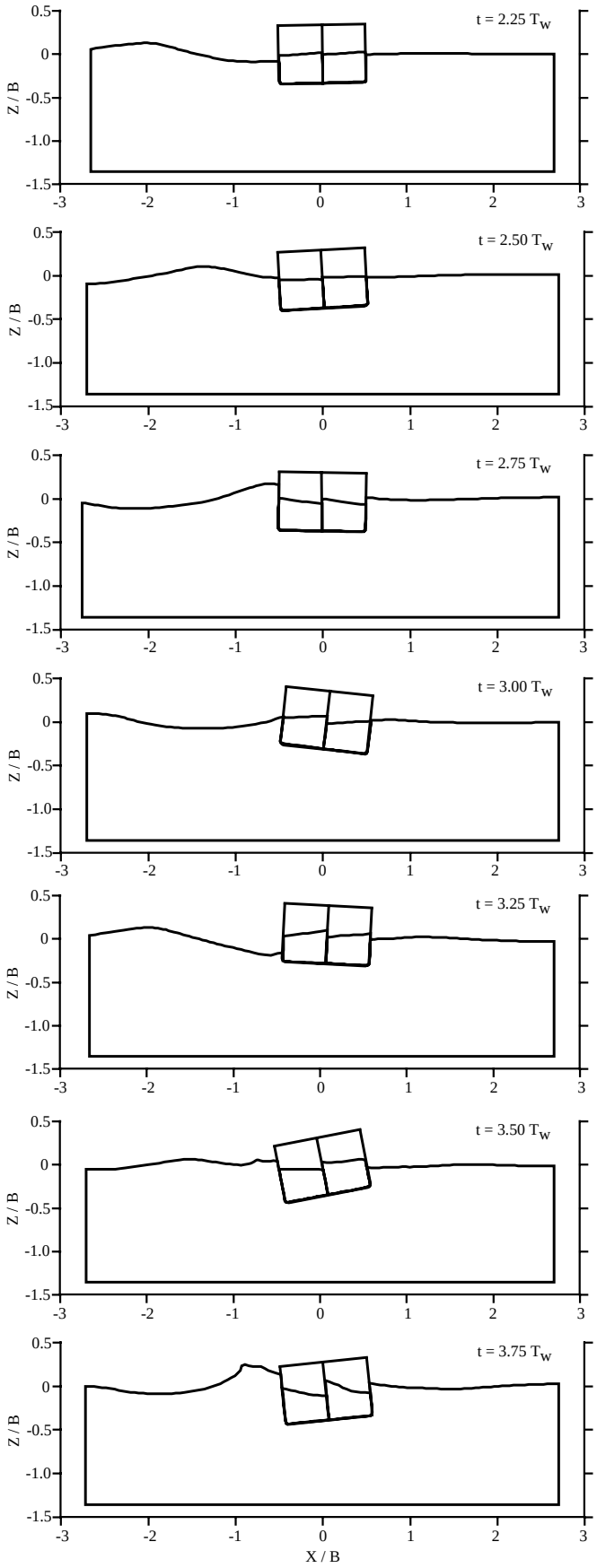


Fig.4.13: Simulated fluid and body motions (Cal.3)

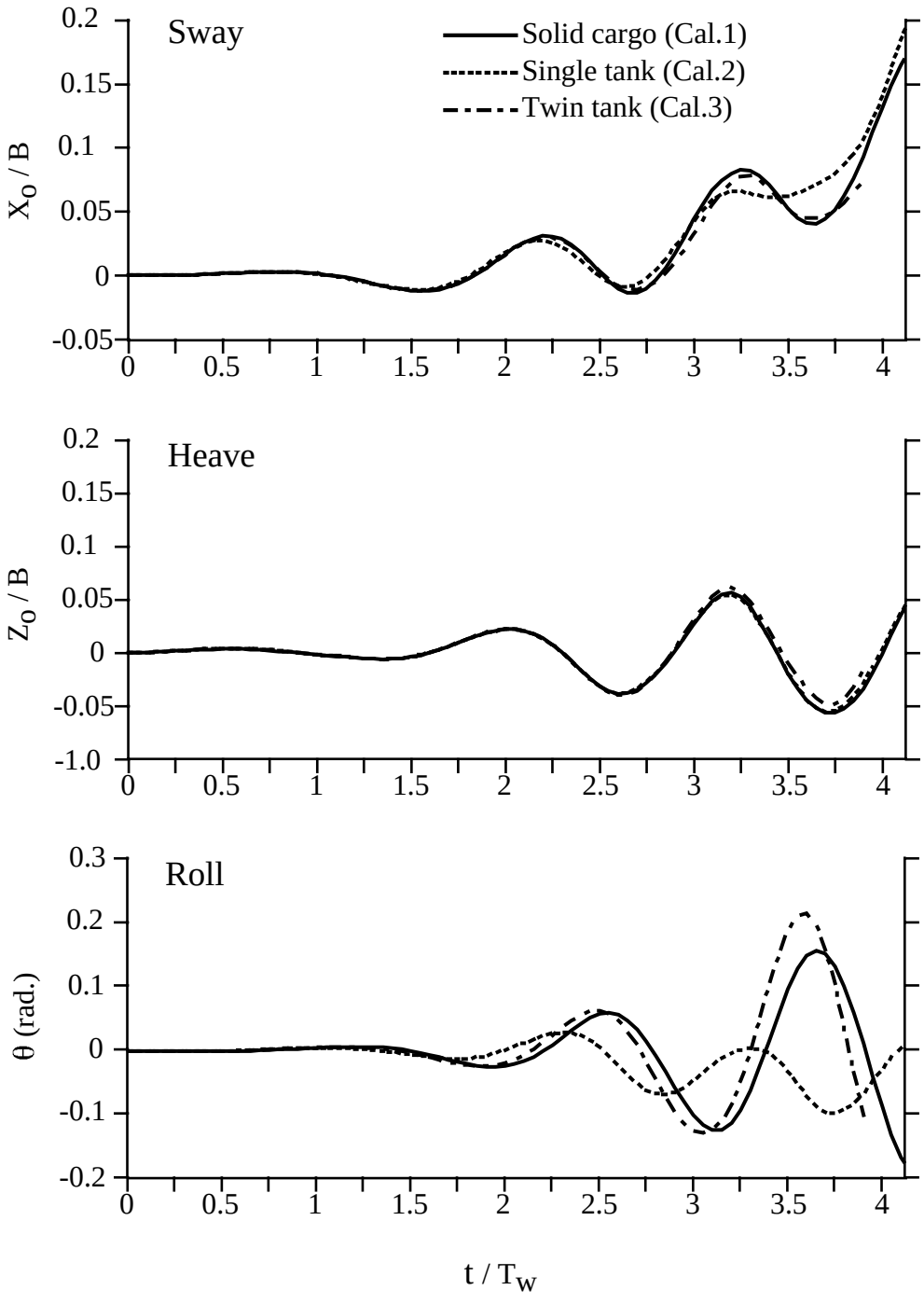


Fig.4.14: Floating body motions

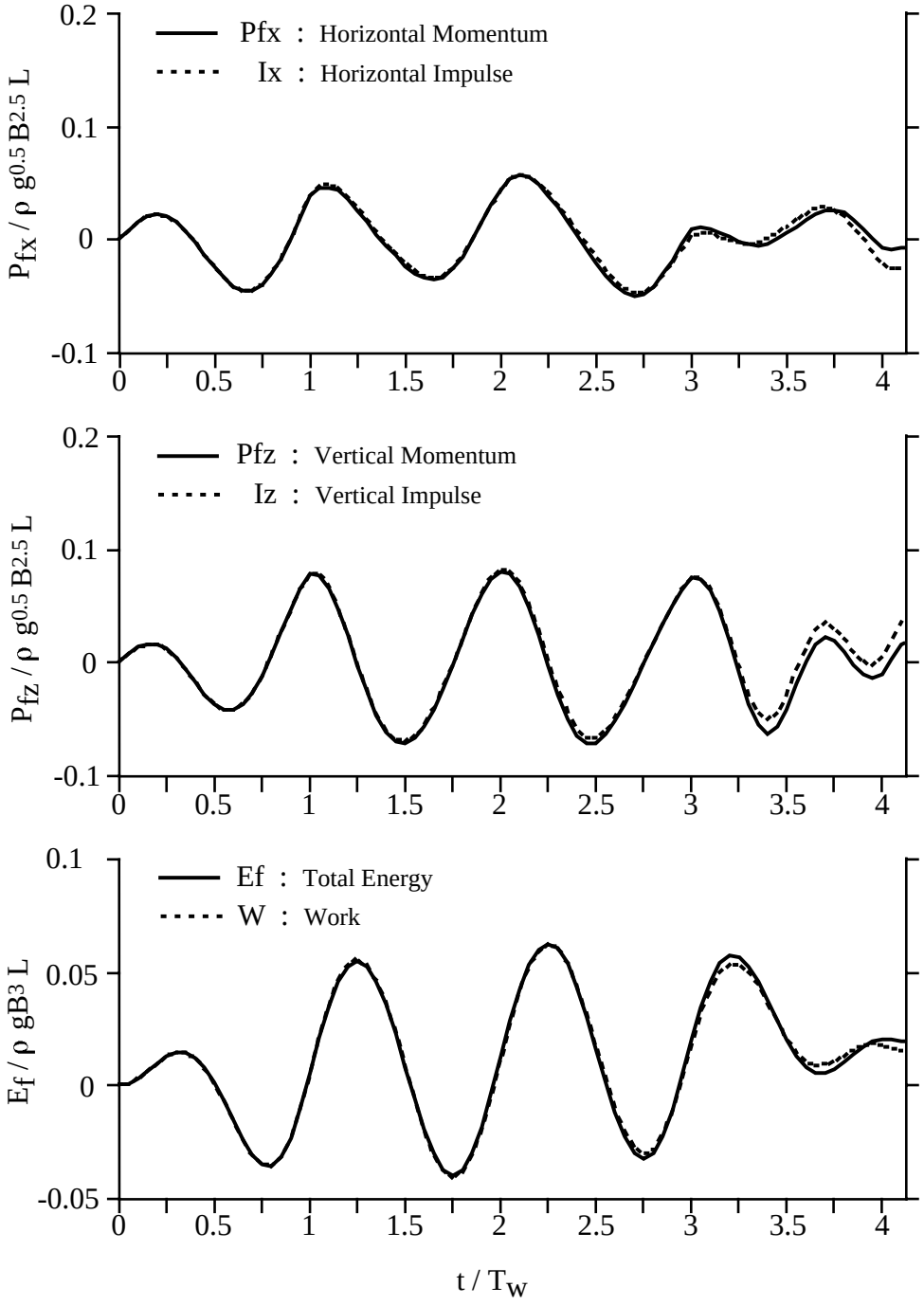


Fig.4.15: Conservation check of momentum and energy (Cal.2)

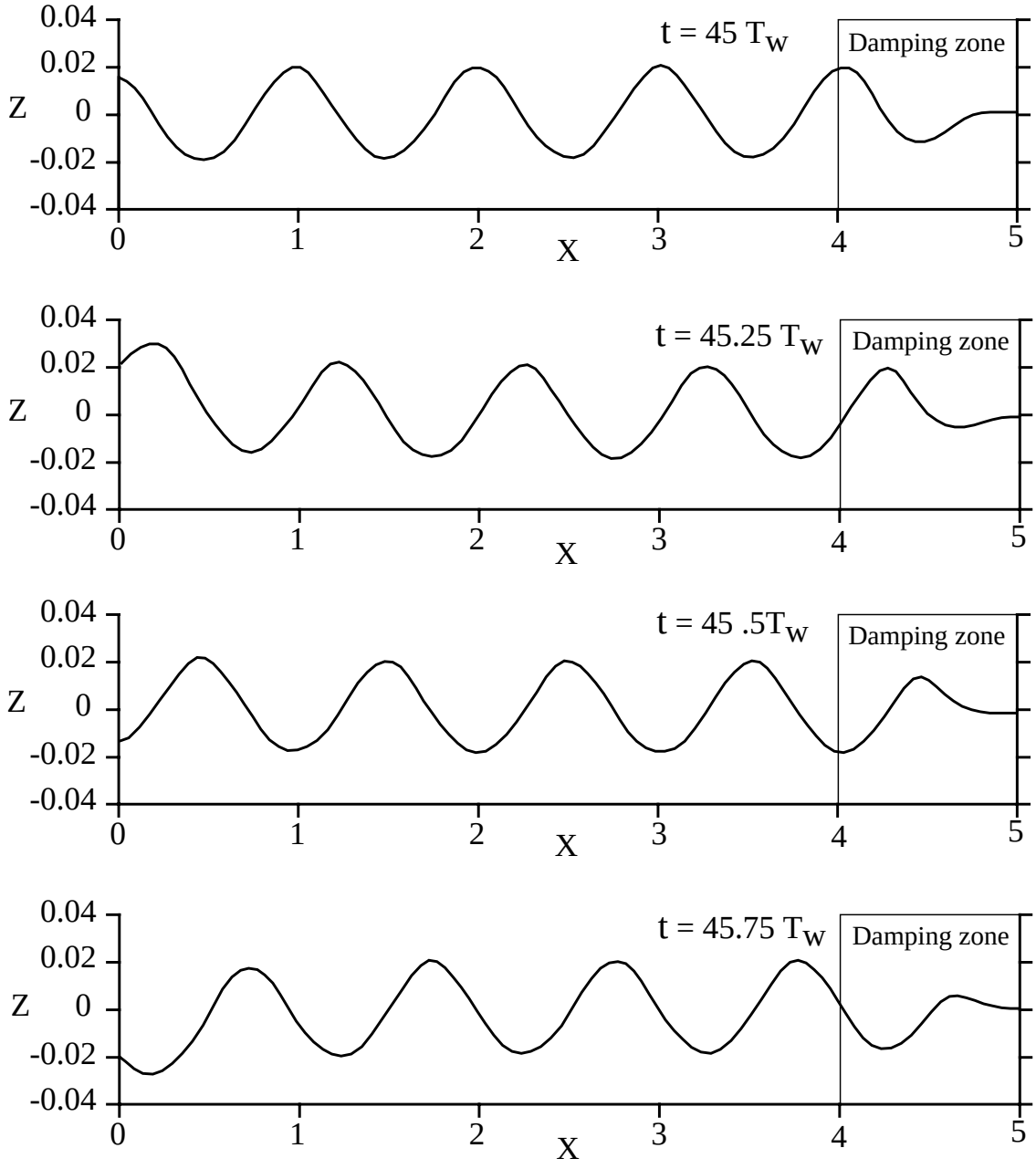


Fig.4.16: Wave profiles inside and outside of the damping zone, $\alpha = 1, \beta = 1$

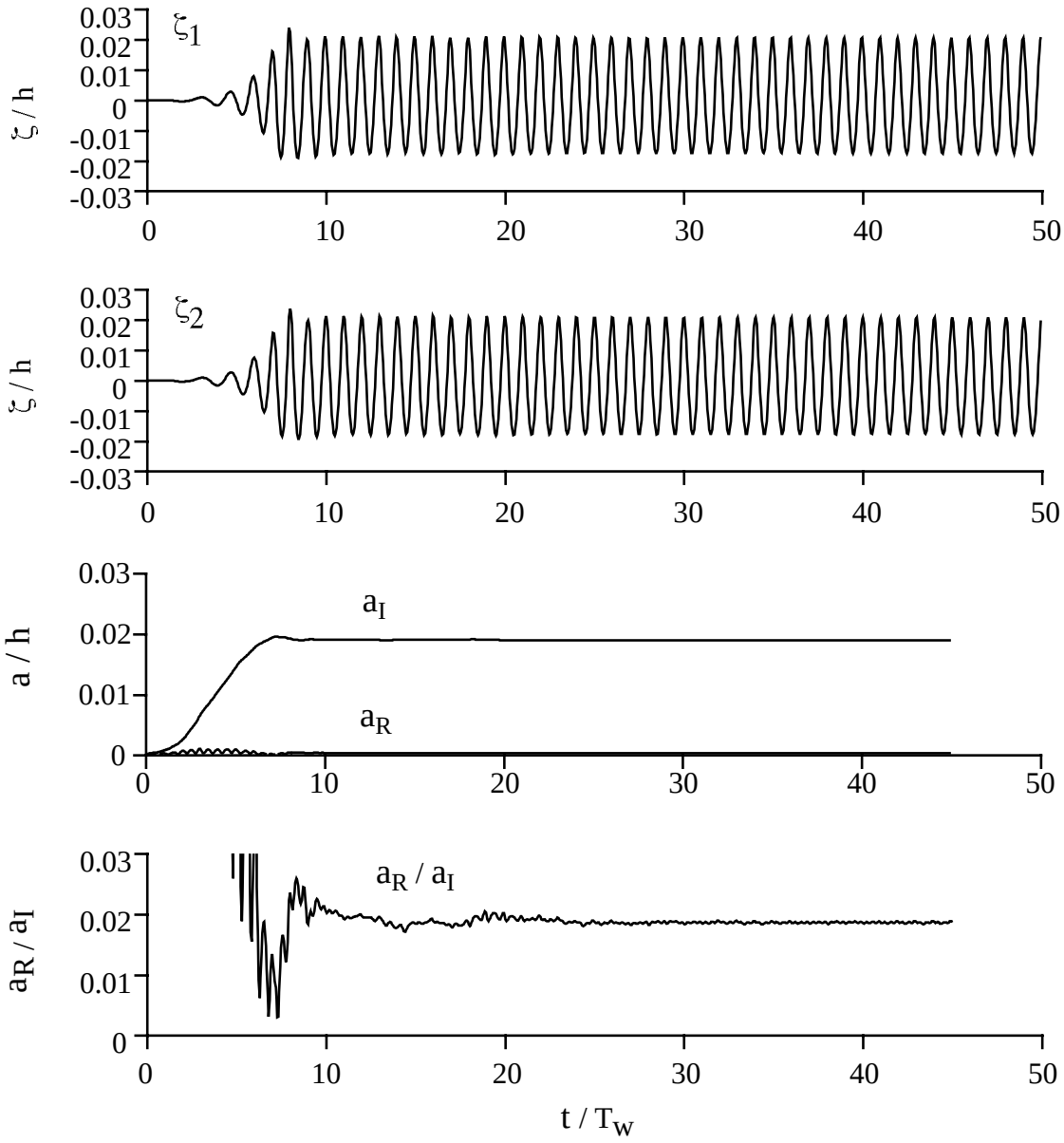


Fig.4.17: Reflection coefficient of the damping zone estimated by Goda's method

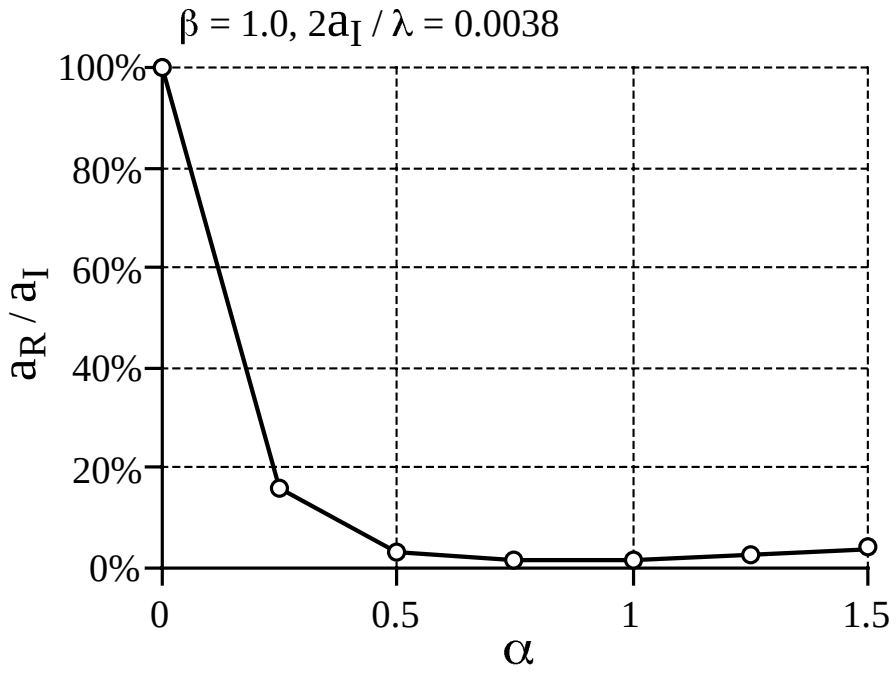


Fig.4.18: Reflection coefficient vs. α

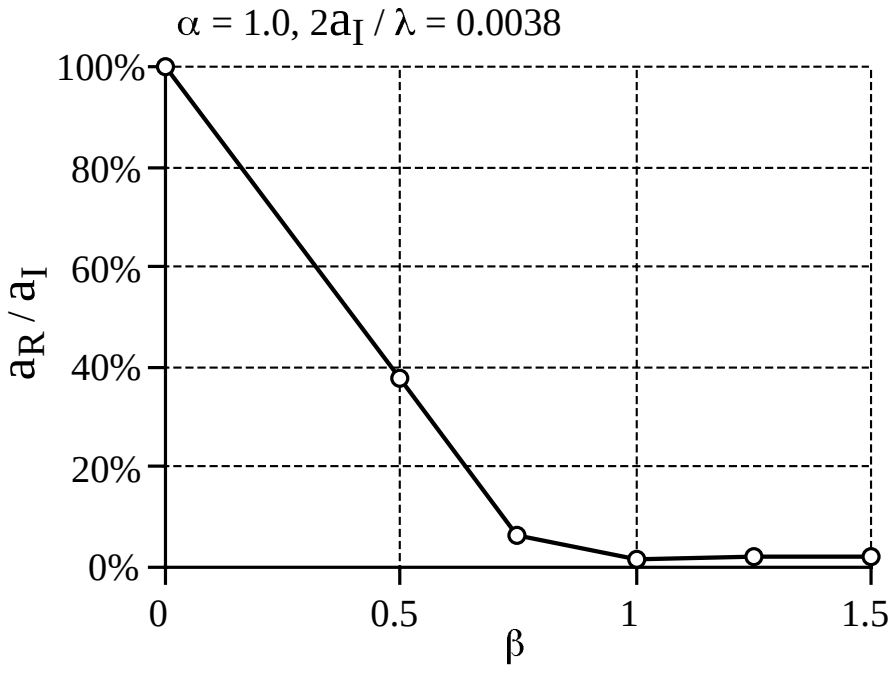


Fig.4.19: Reflection coefficient vs. β

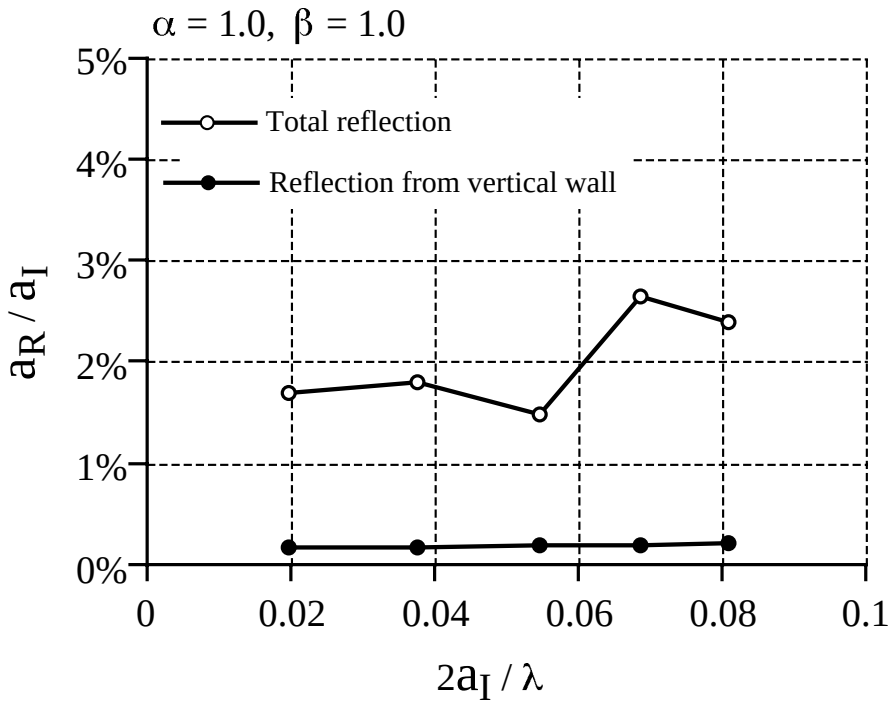


Fig.4.20: Reflection coefficient vs. h_w/λ

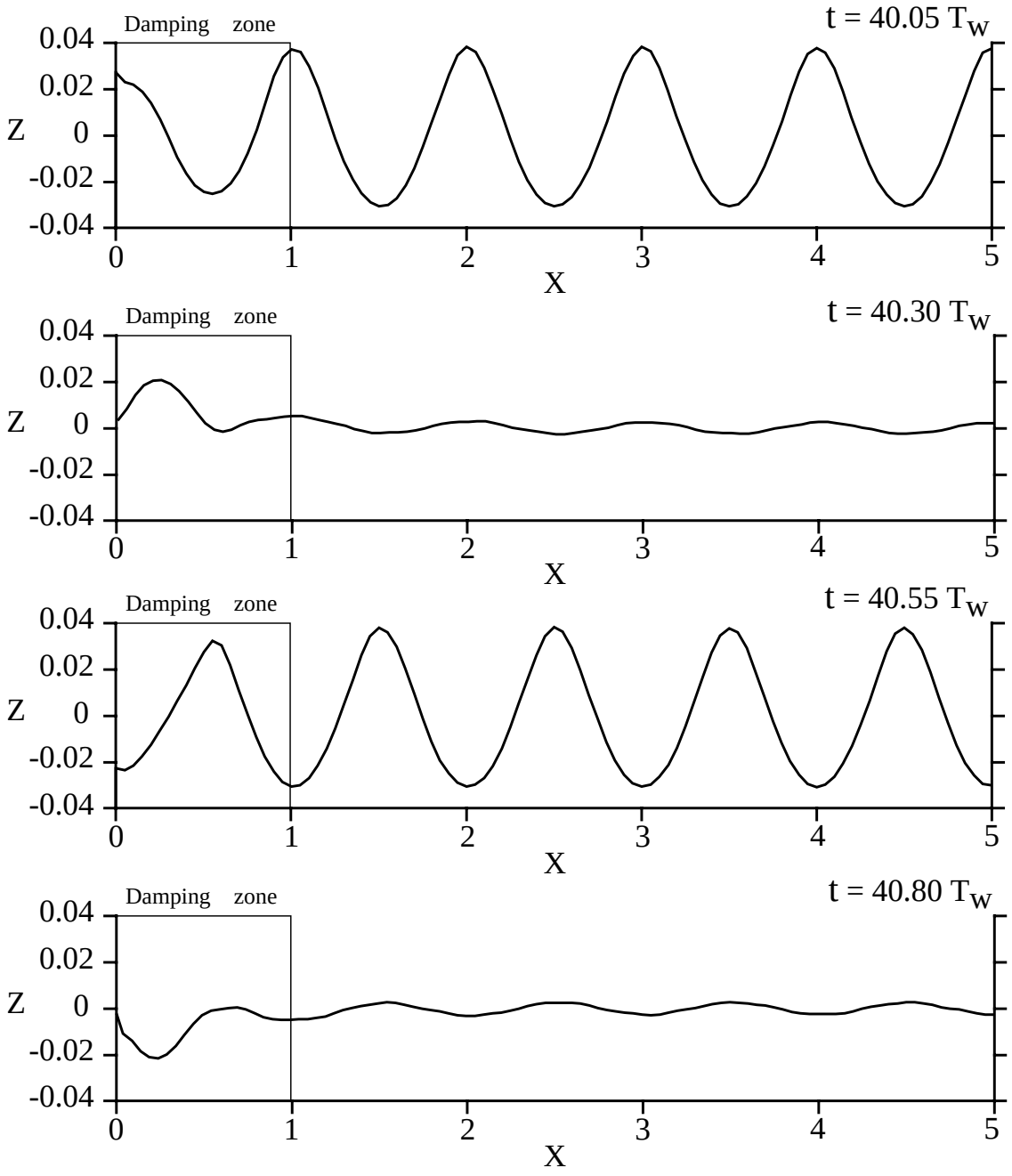


Fig.4.21: Wave profiles inside and outside of the wave making damping zone $\alpha = 1, \beta = 1$

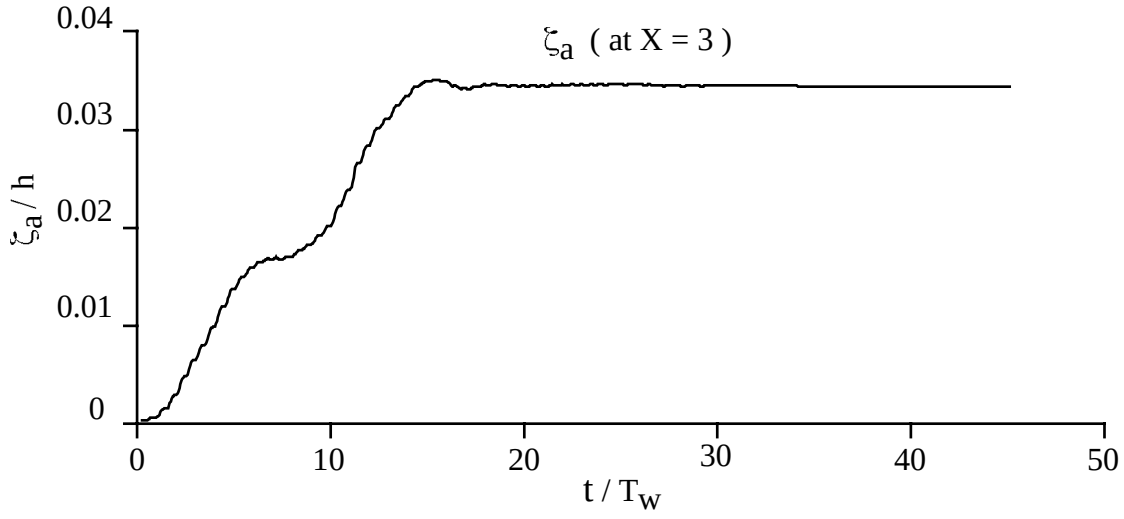


Fig.4.22: Wave amplitude at $X = 3$

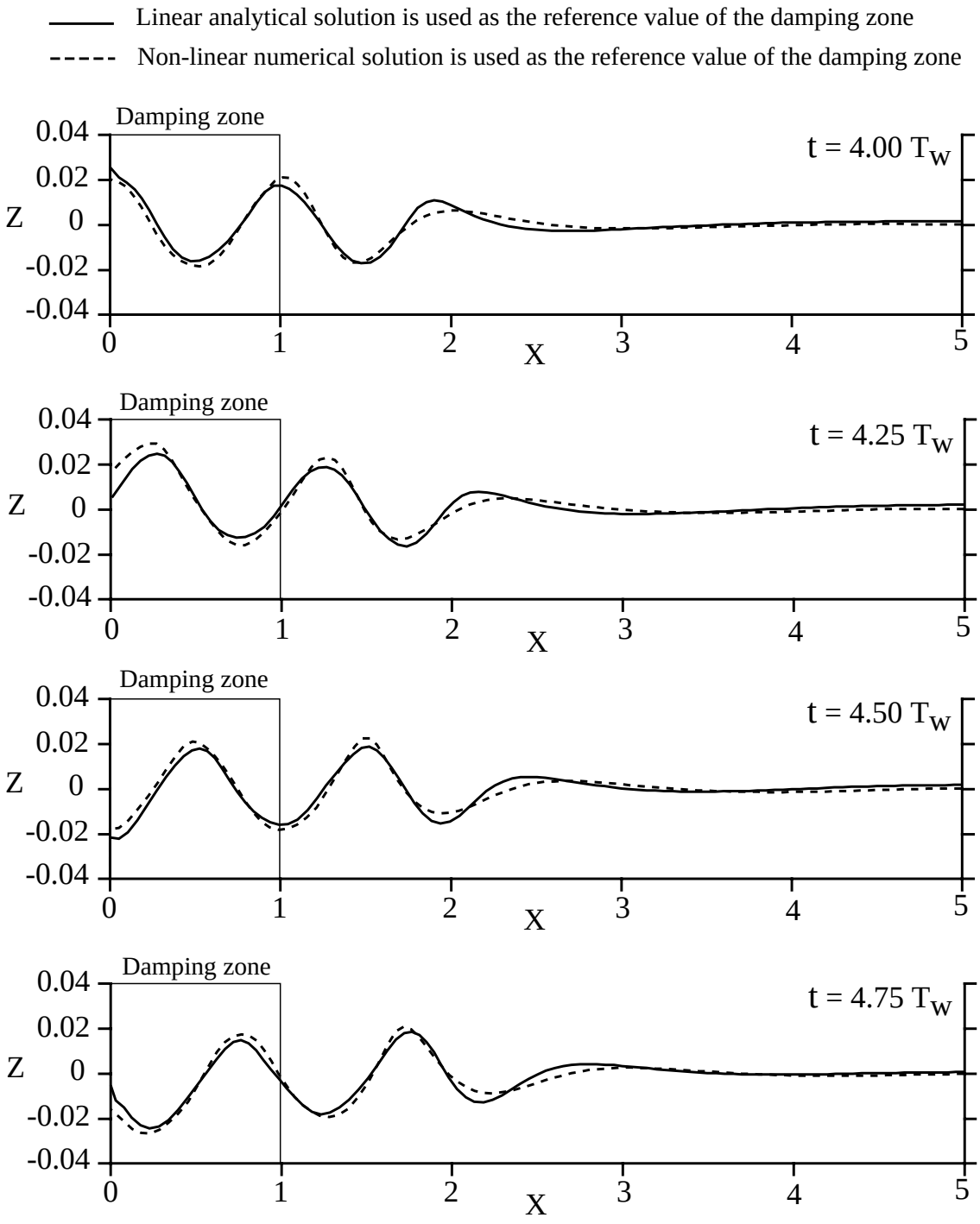


Fig.4.23: Wave profiles inside and outside of the wave making damping zone $\alpha = 1, \beta = 1$

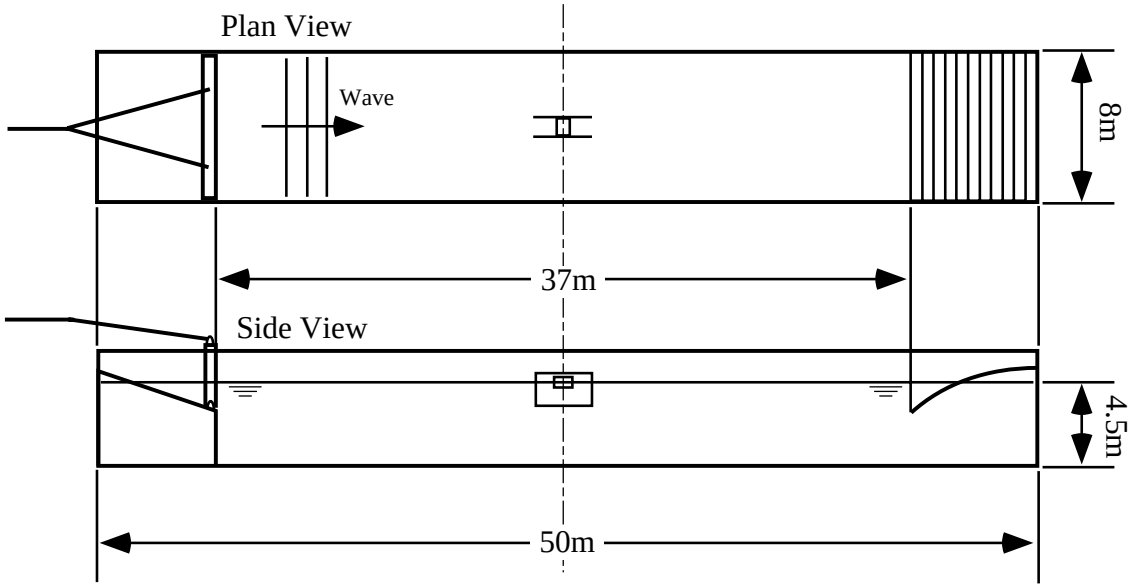


Fig.5.1: Test basin used for the experiment

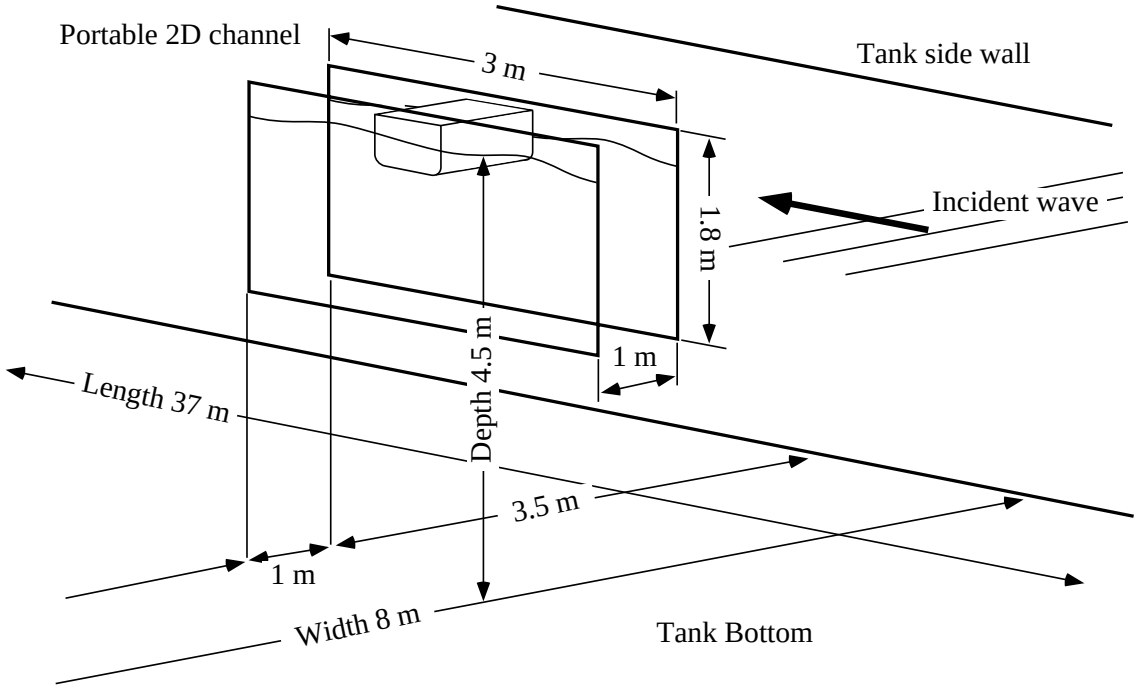


Fig.5.2: Two dimensional portable wave channel installed in the test basin

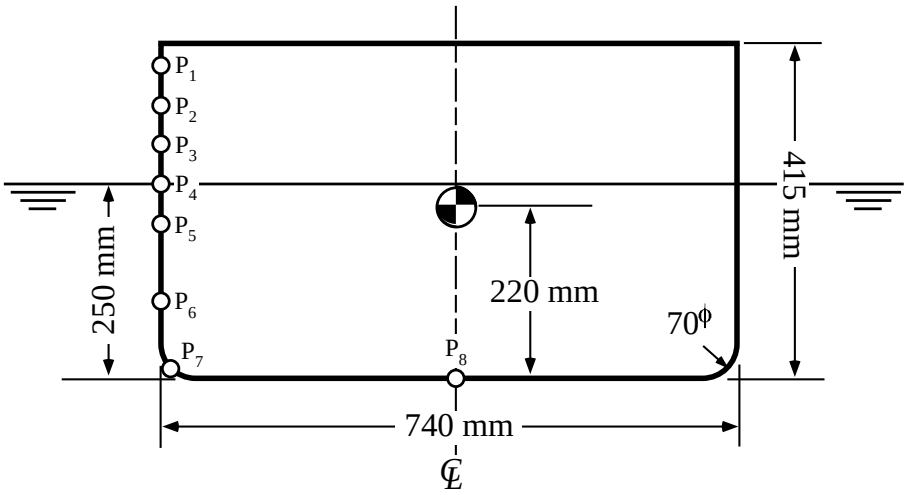


Fig.5.3: Body shape of the midship section model

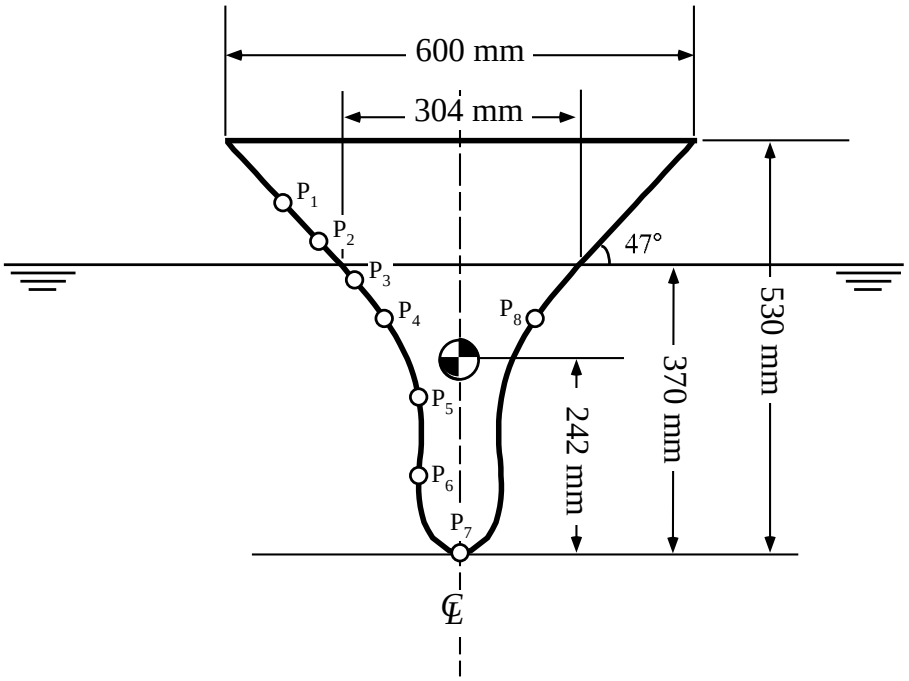


Fig.5.4: Body shape of the bow section model

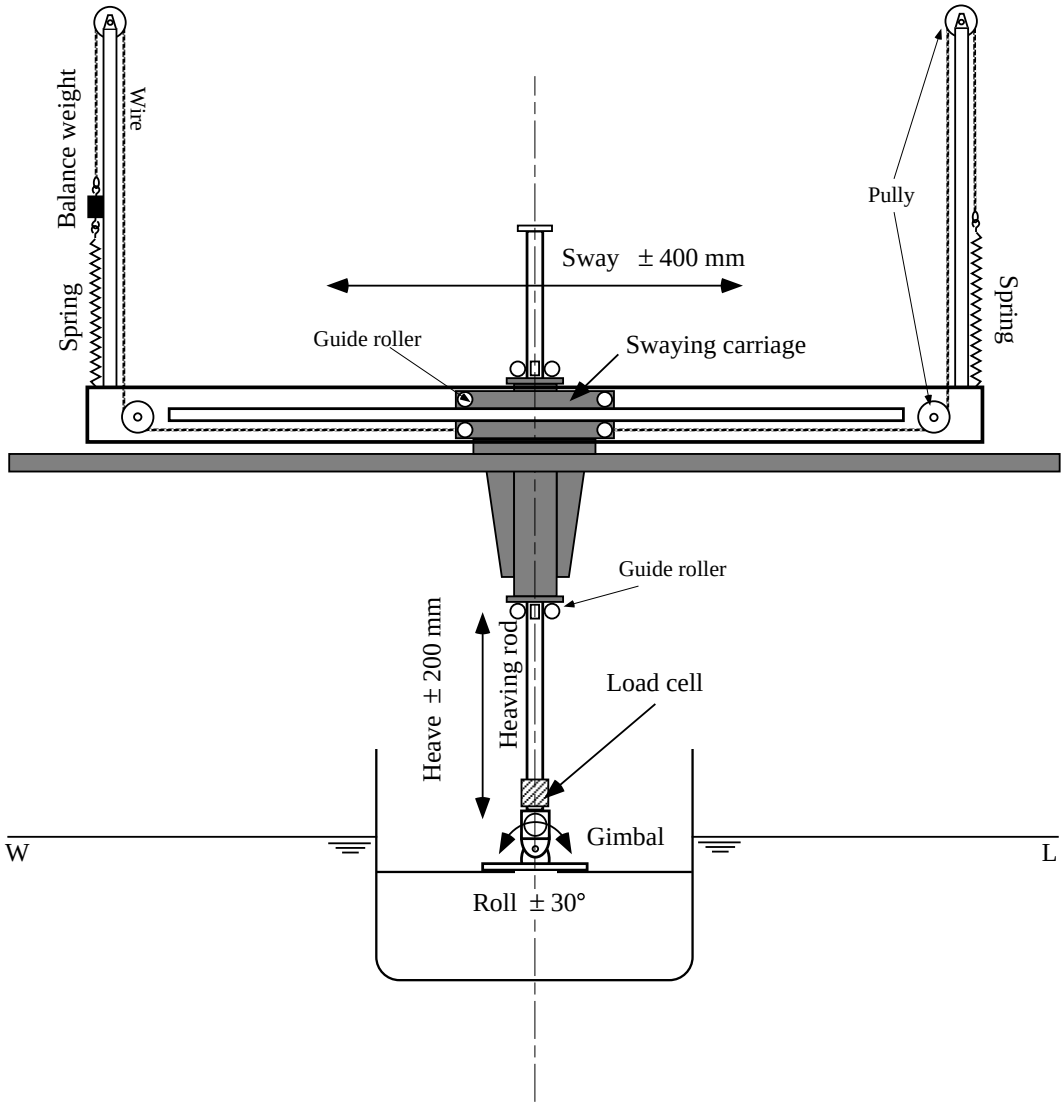


Fig.5.5: Measuring equipment

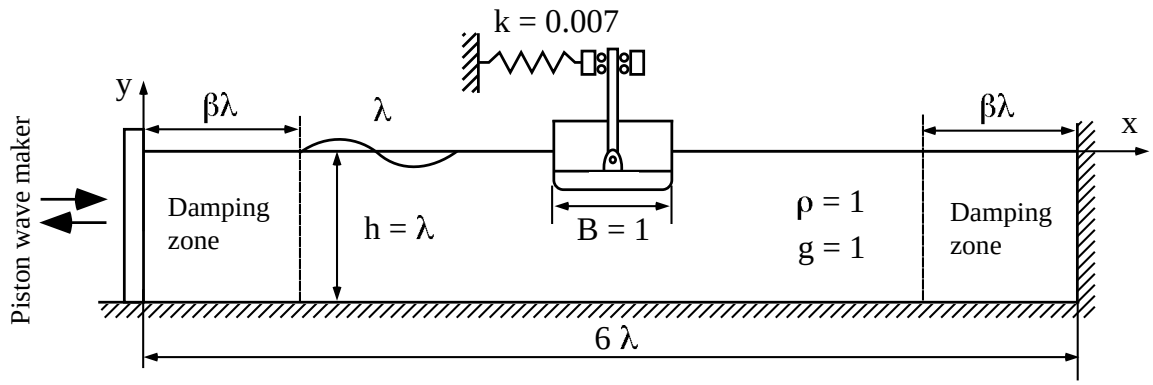


Fig.5.6: Simulation with damping zones

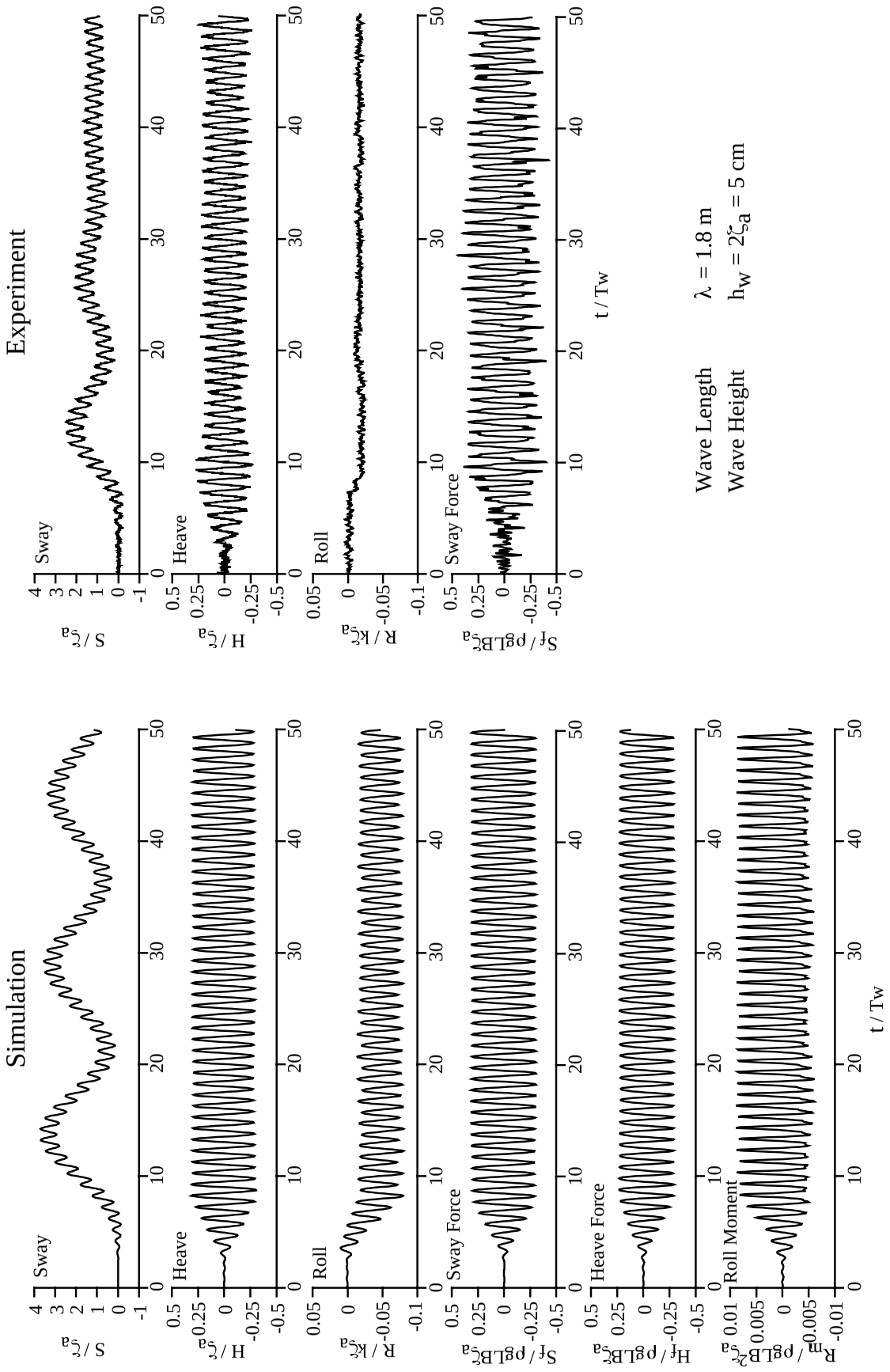


Fig.5.7: Comparison of body motions and hydrodynamic forces between simulation and experiment (Midship section body)

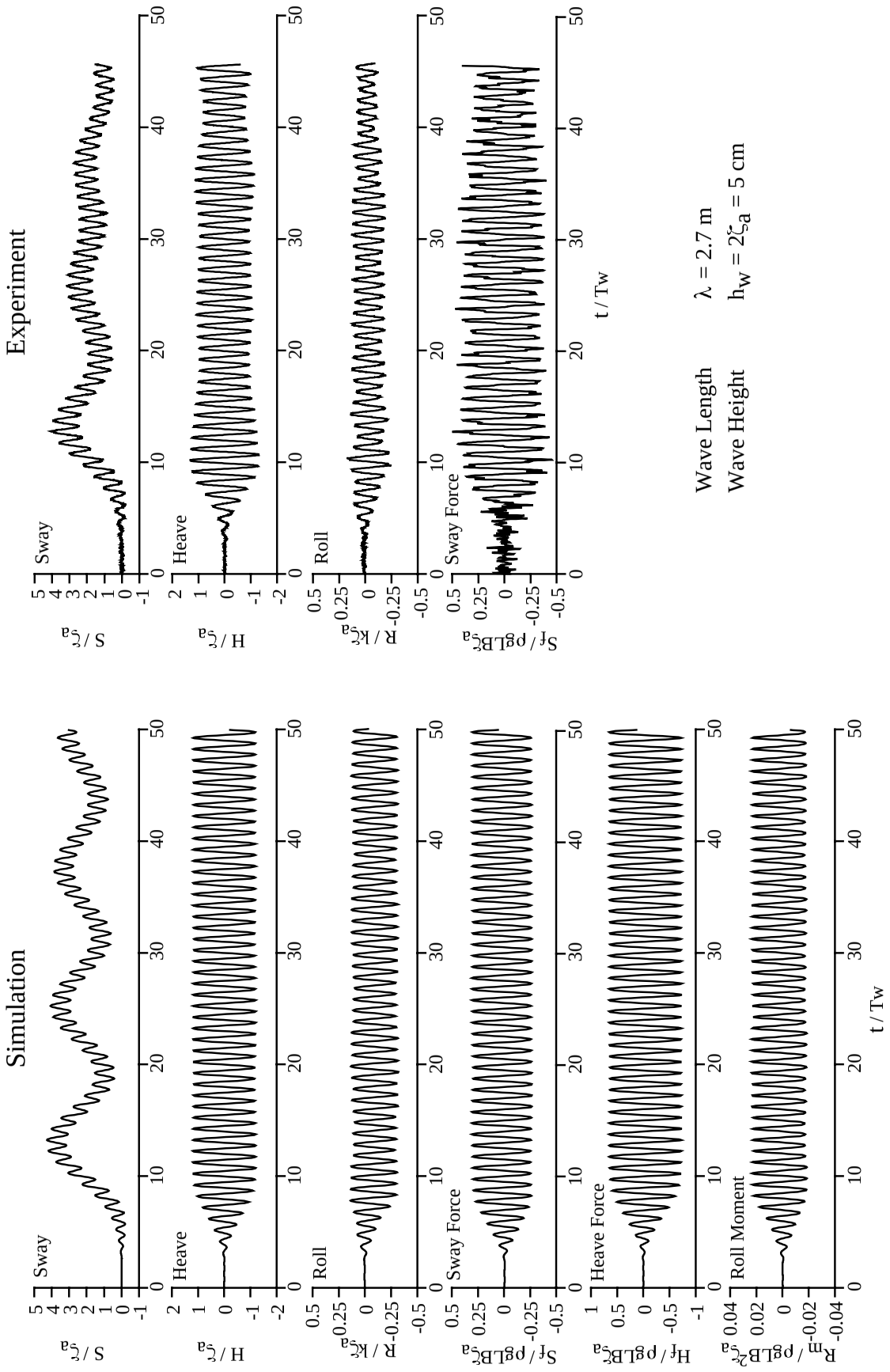


Fig.5.8: Comparison of body motions and hydrodynamic forces between simulation and experiment (Midship section body)

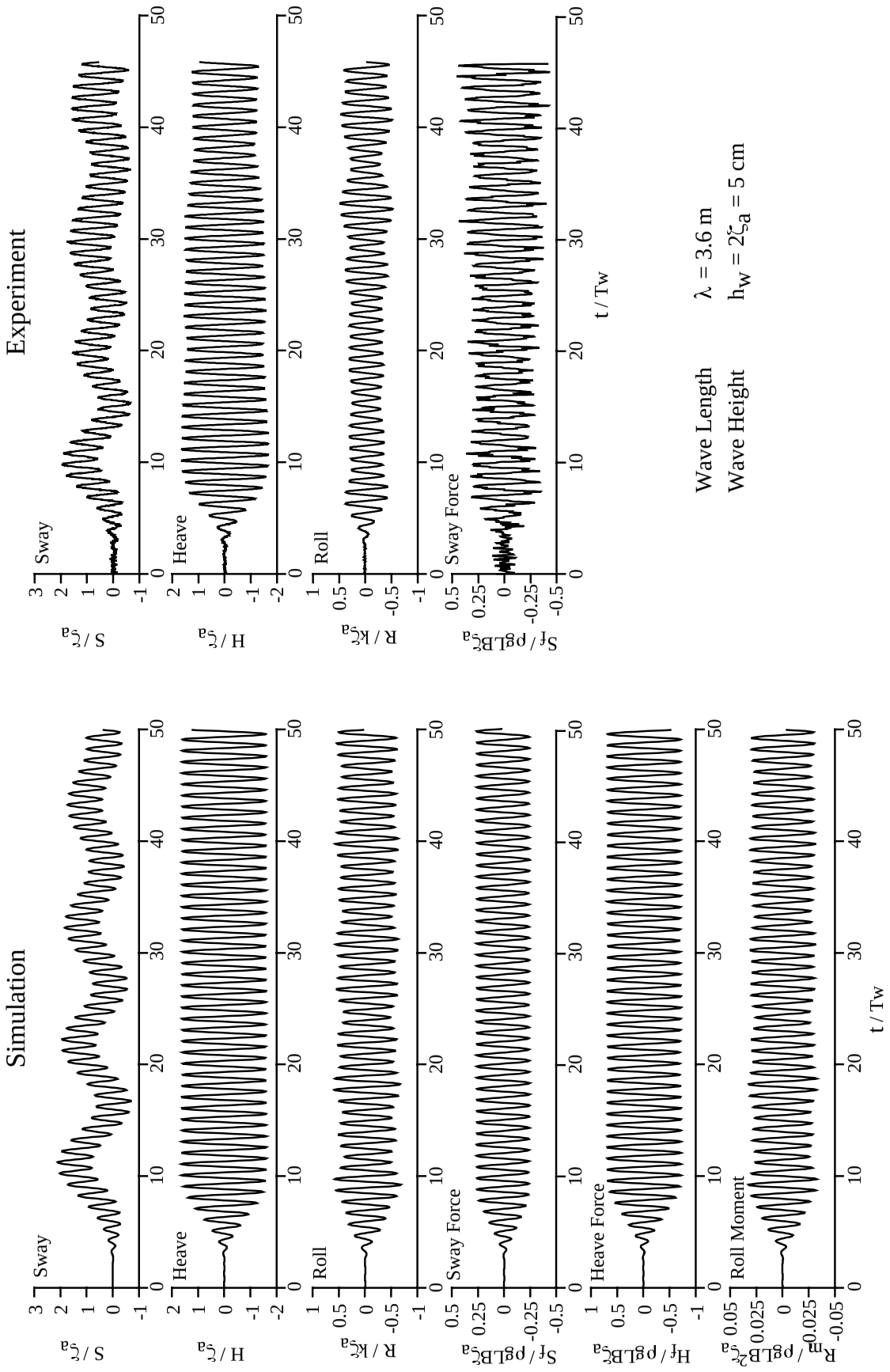


Fig.5.9: Comparison of body motions and hydrodynamic forces between simulation and experiment (Midship section body)

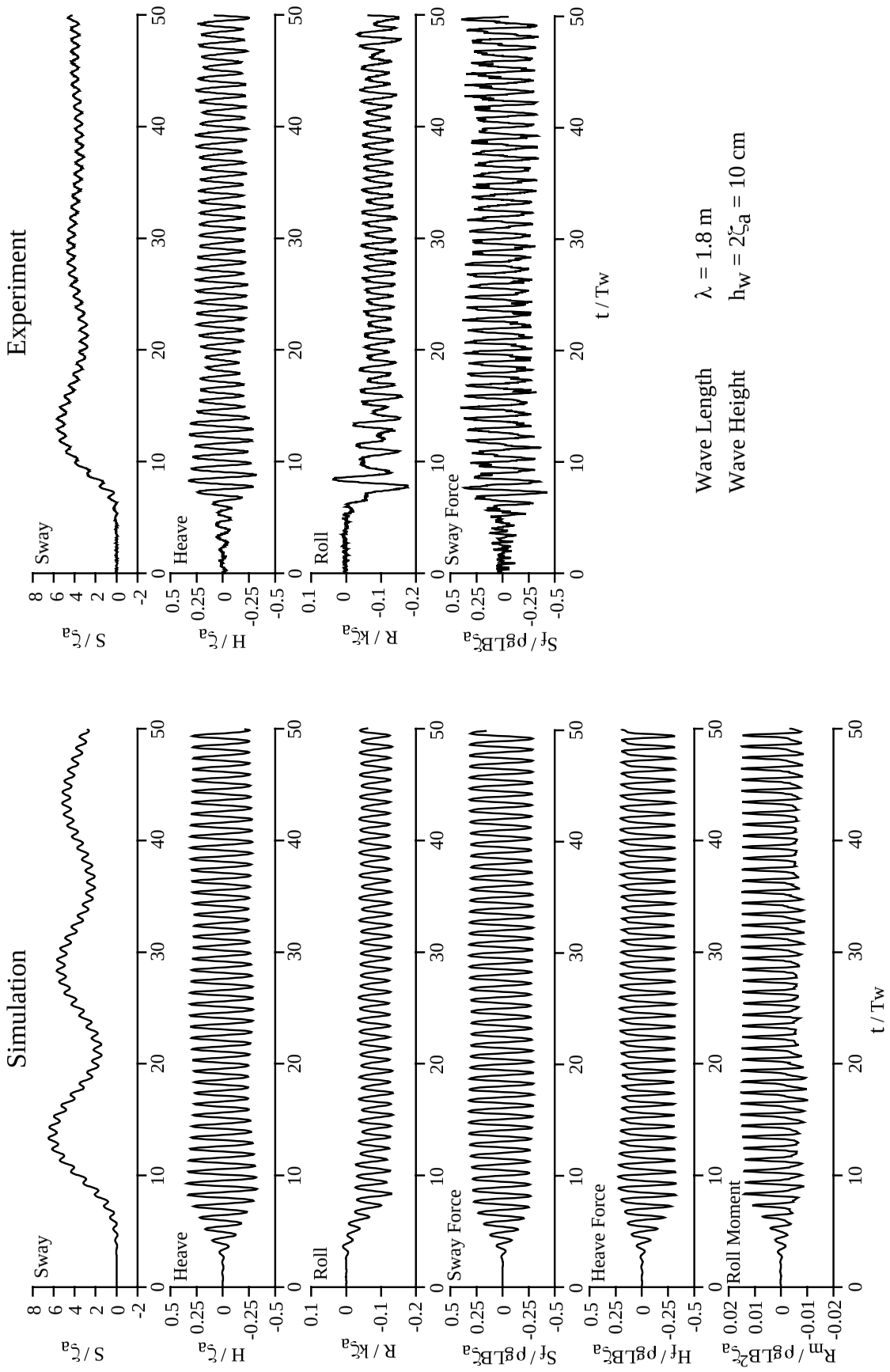


Fig.5.10: Comparison of body motions and hydrodynamic forces between simulation and experiment (Midship section body)

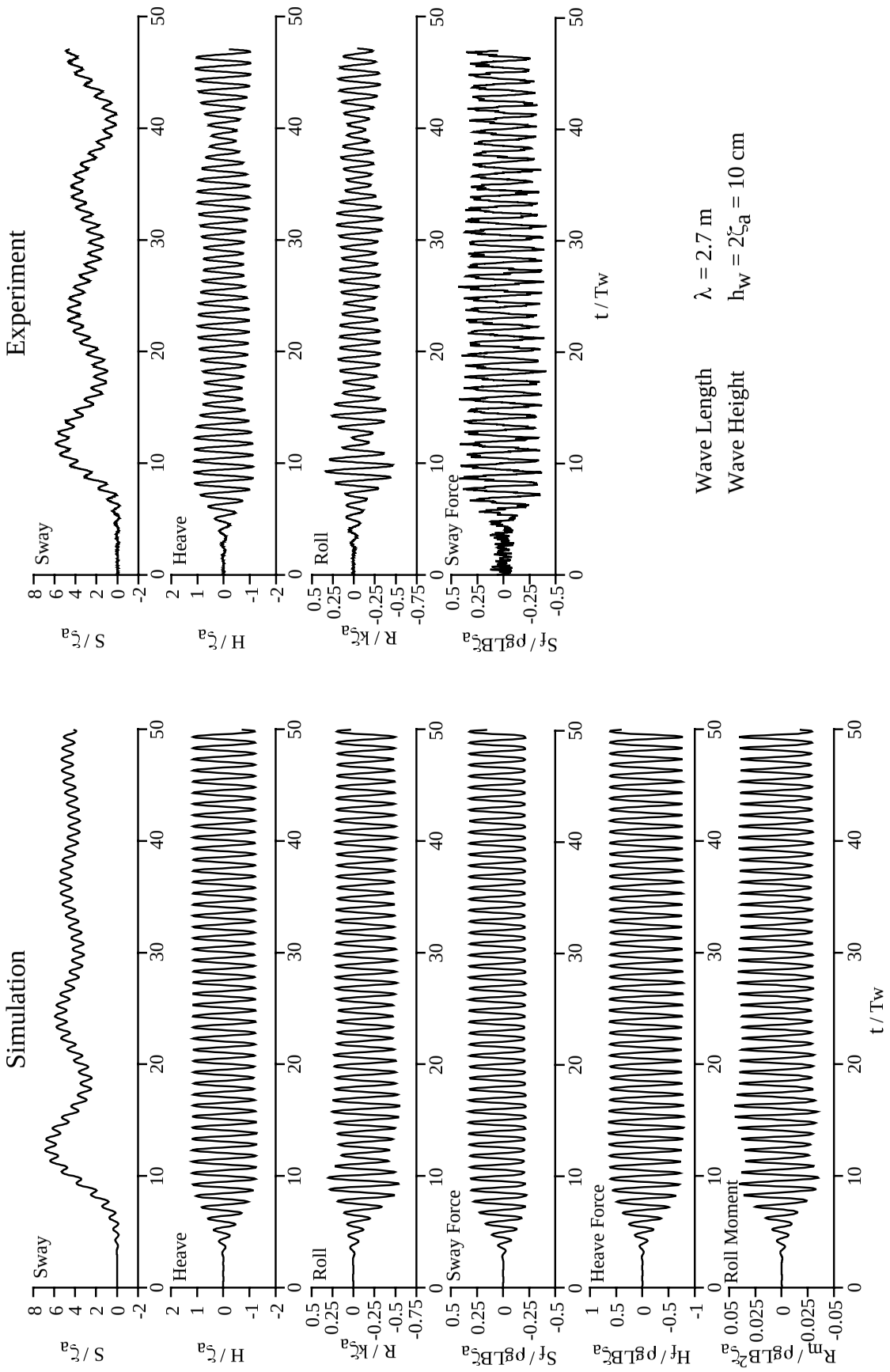


Fig.5.11: Comparison of body motions and hydrodynamic forces between simulation and experiment (Midship section body)

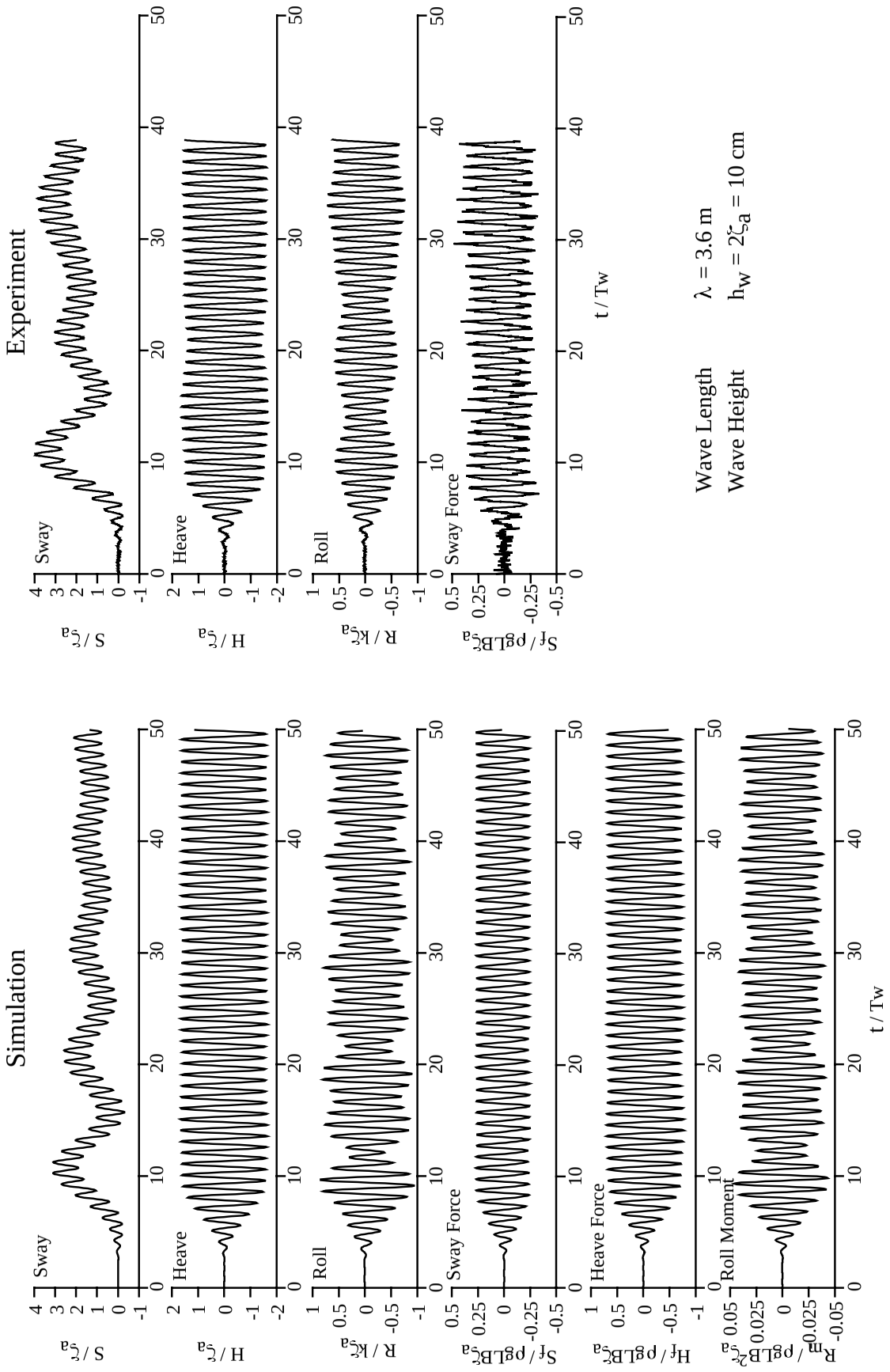


Fig.5.12: Comparison of body motions and hydrodynamic forces between simulation and experiment (Midship section body)

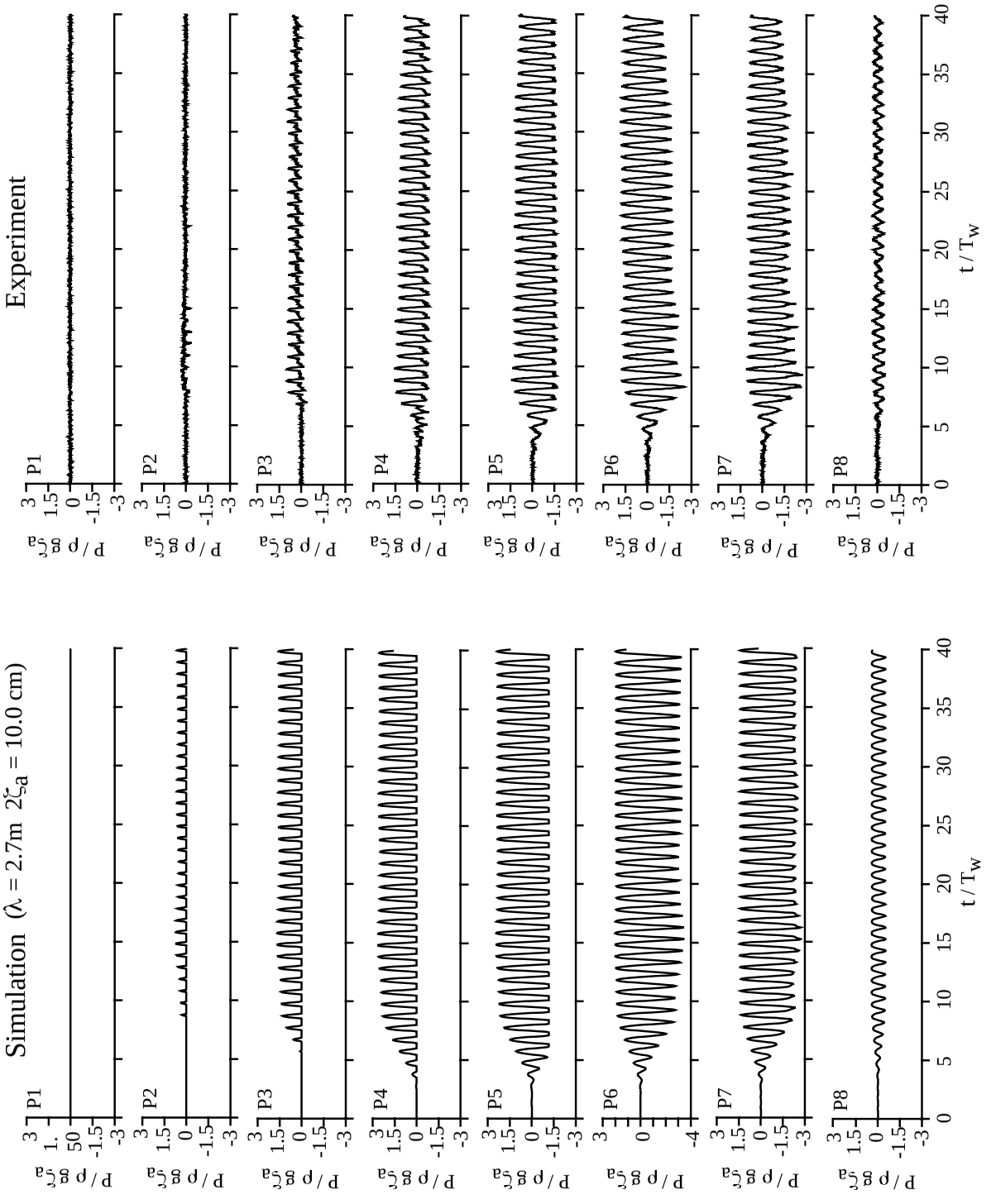


Fig.5.13: Comparison of pressure time history between simulation and experiment (Midship section body)

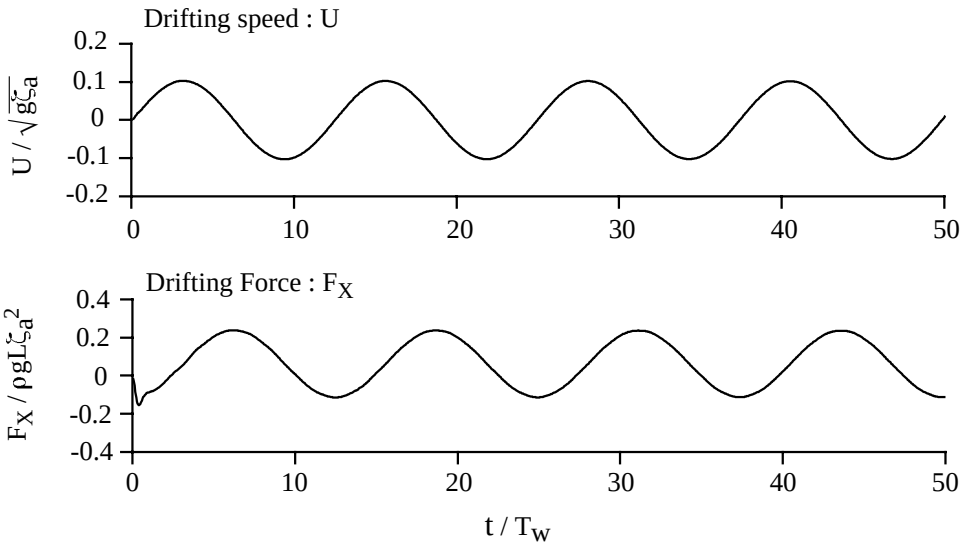


Fig.5.14: Simulated step response of the moored midship section body in still water

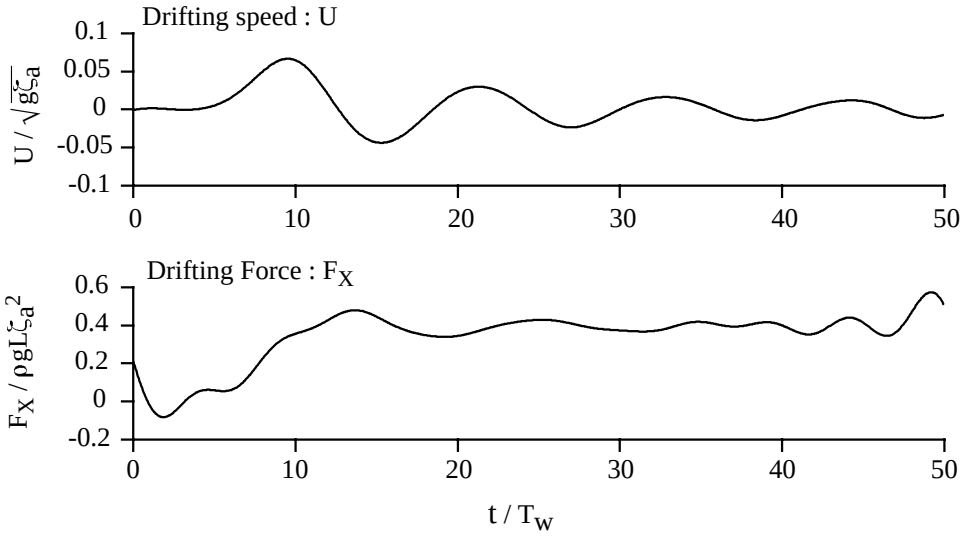


Fig.5.15: Simulated slow drift motion of the midship section body in a regular wave

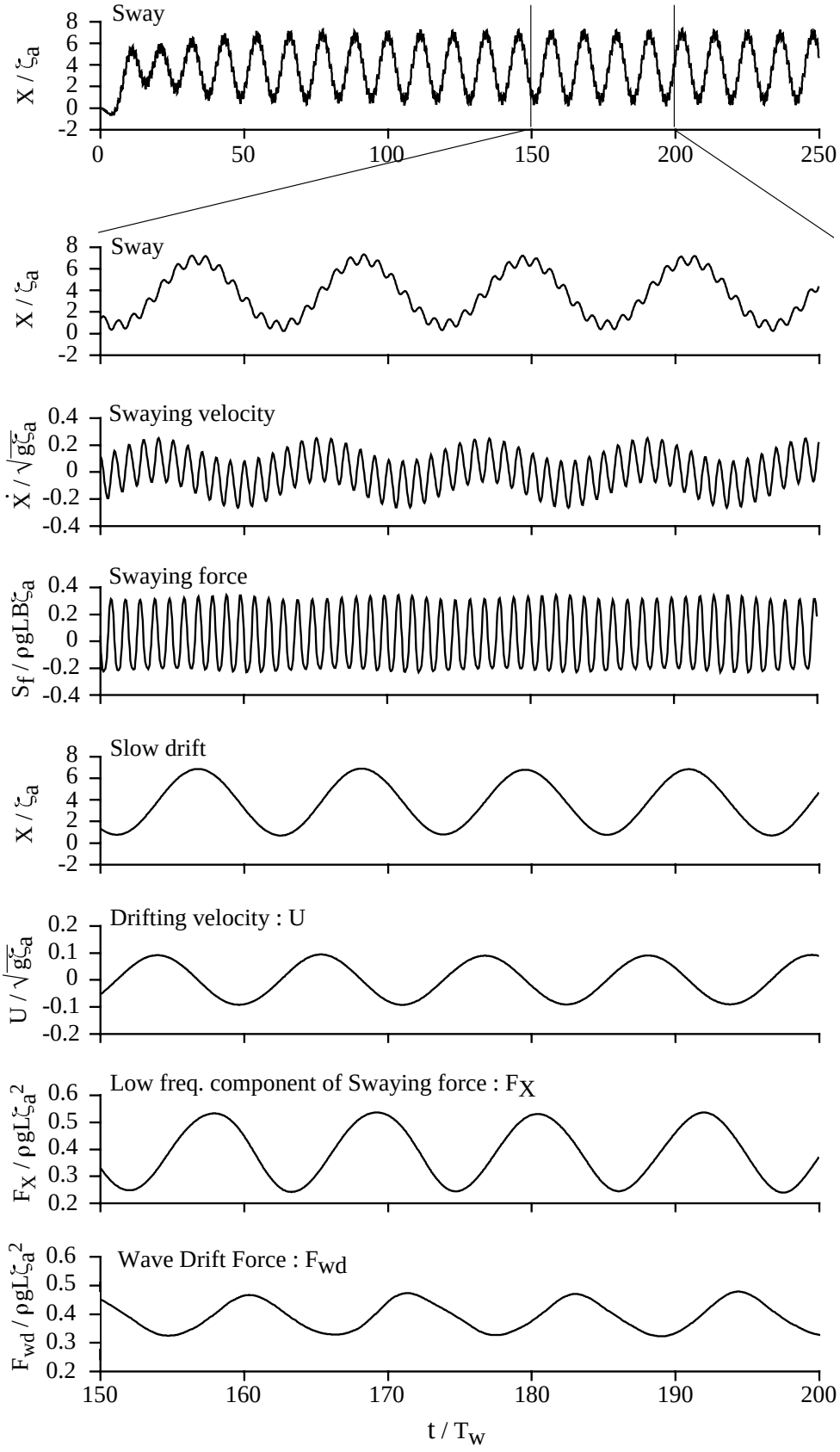


Fig.5.16: Simulated slow drift motion of the midship section body oscillated by an external force

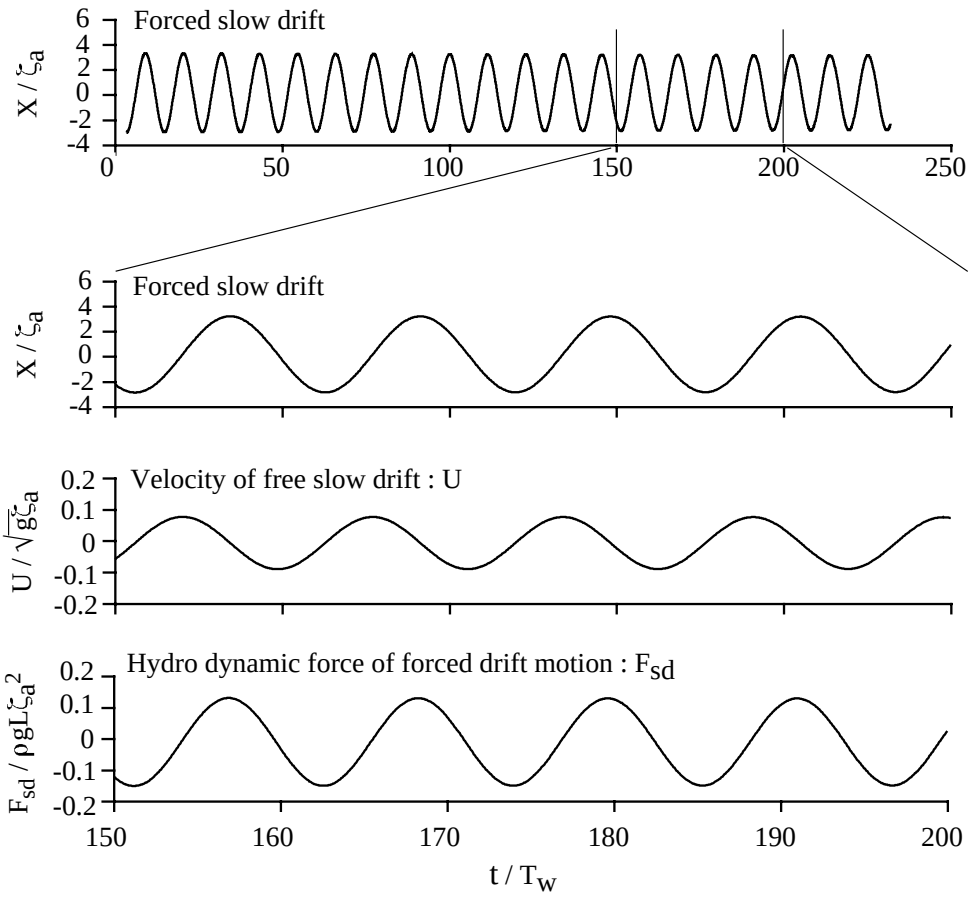


Fig.5.17: Simulated forced slow drift motion of the midship section body in still water

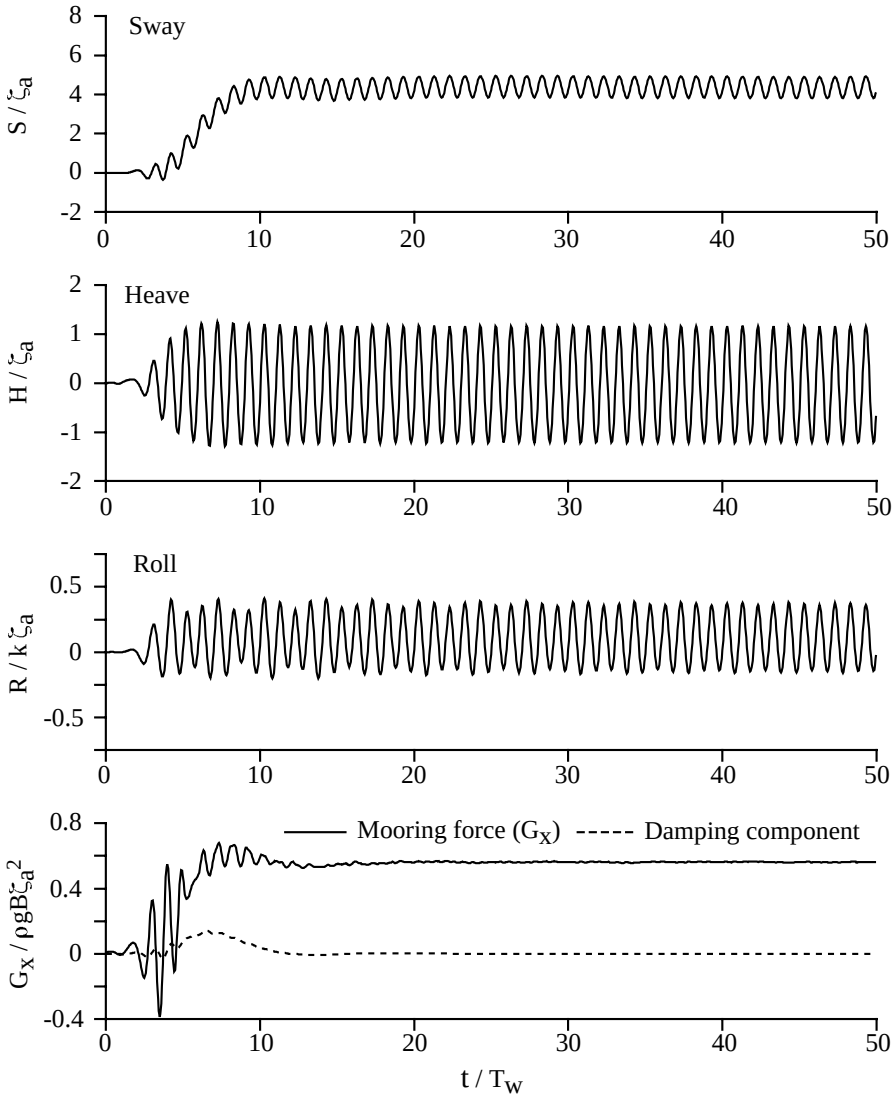


Fig.5.18: Simulated motions of the midship section body in a regular wave with the mooring force give by eq.(5.4.11)

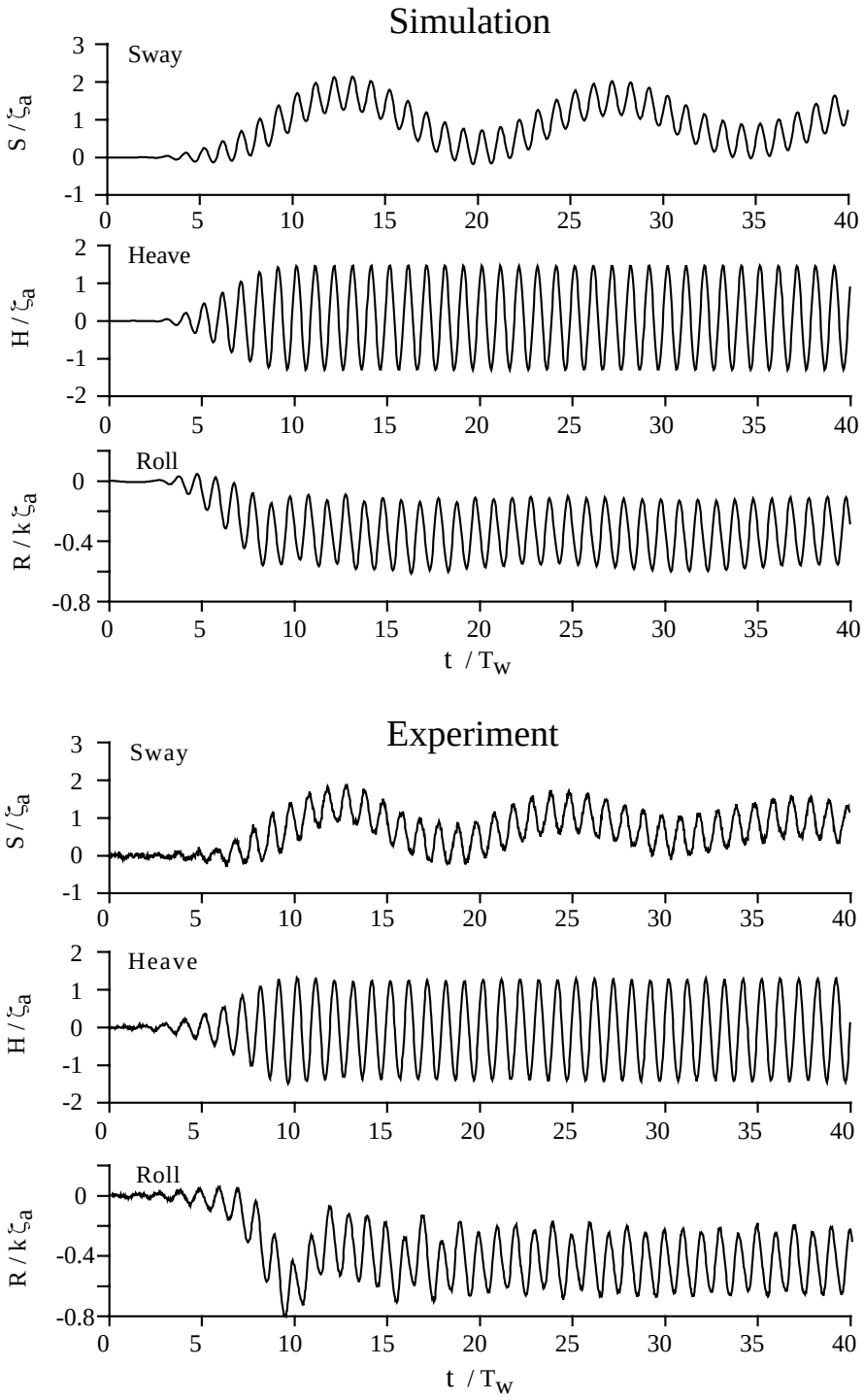


Fig.5.19: Comparison of body motions between simulation and experiment (Bow section body)

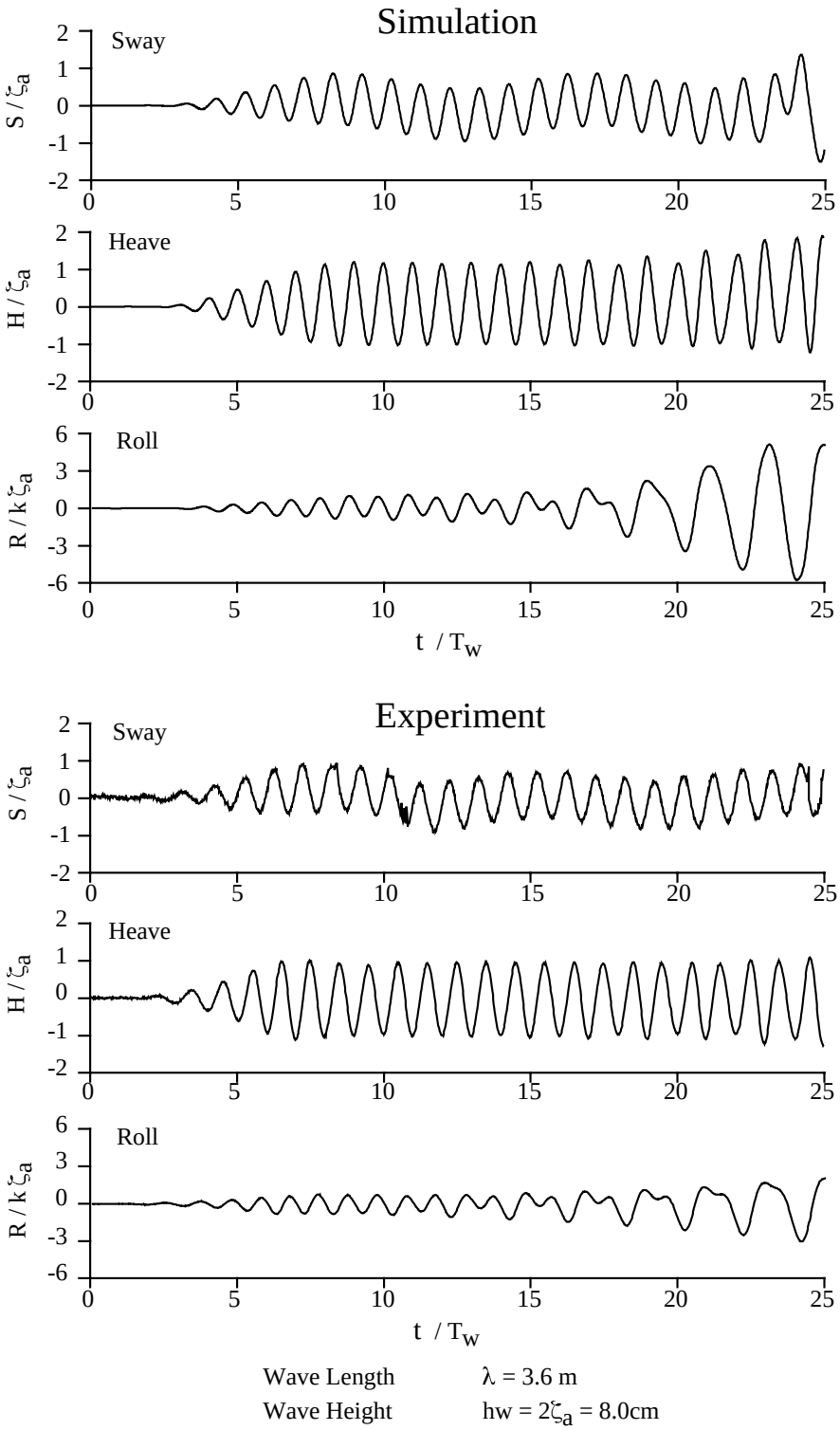


Fig.5.20: Comparison of body motions between simulation and experiment (Bow section body)

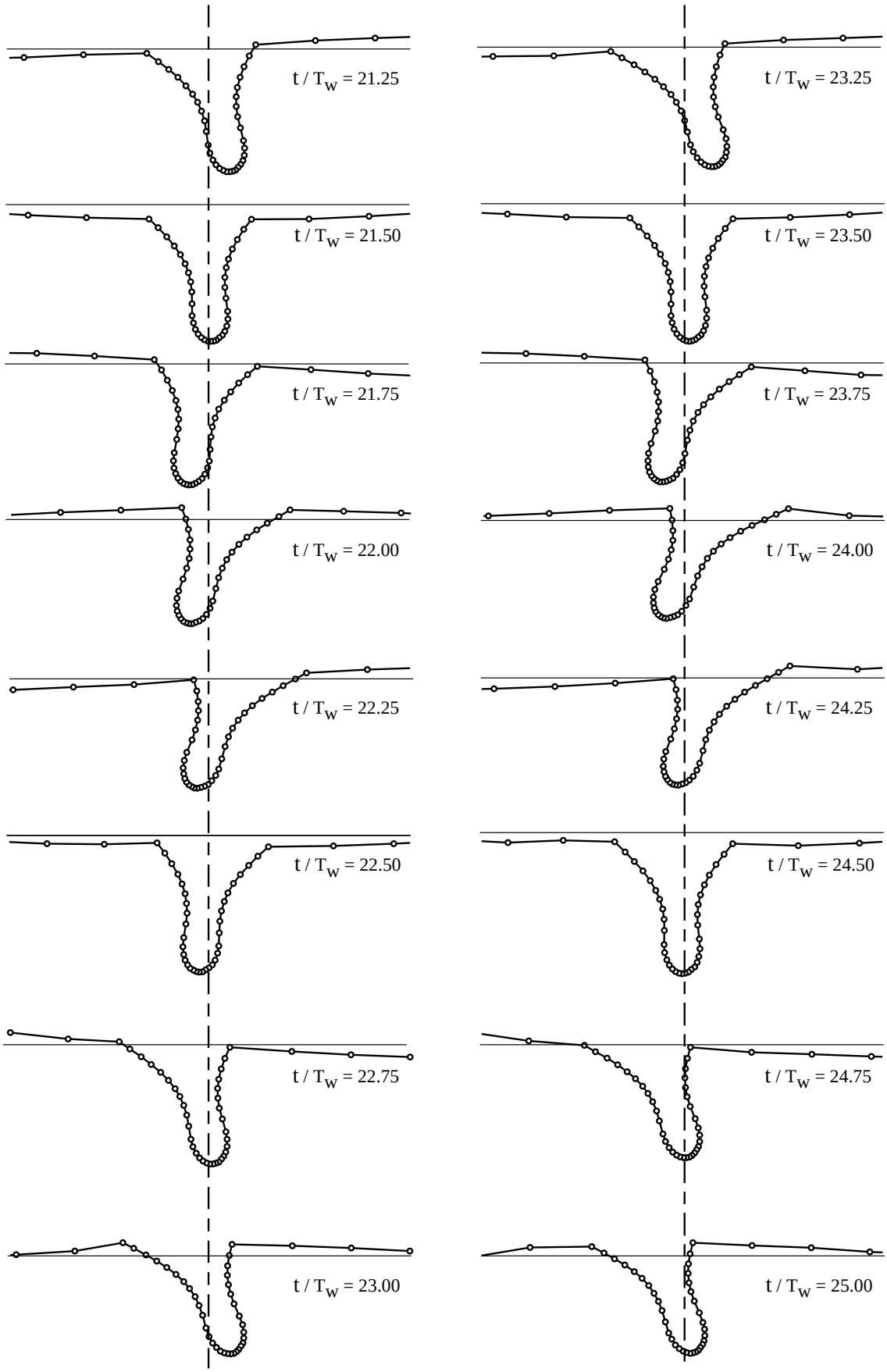


Fig.5.21: Simulated parametric motions of the bow section body

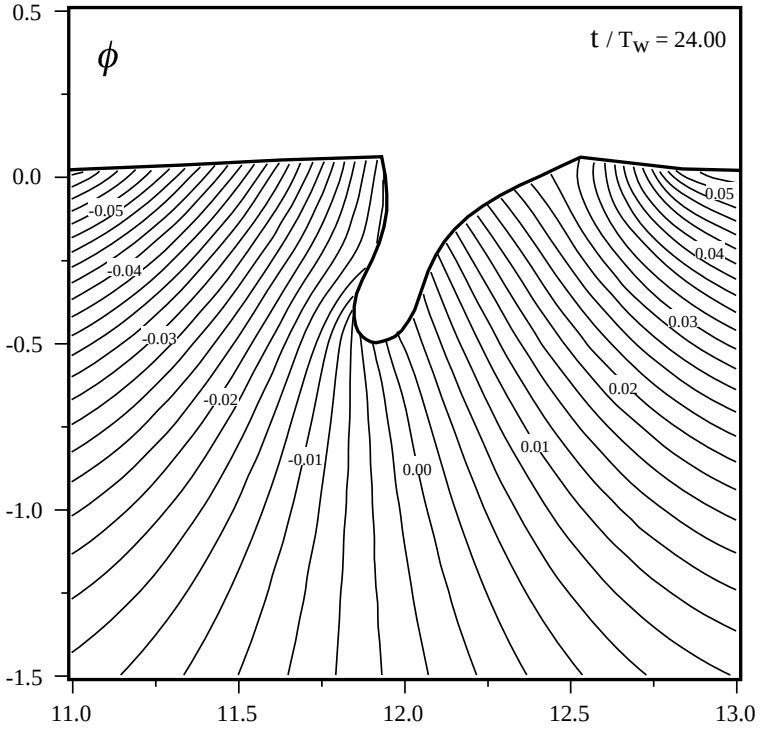


Fig.5.22: Contour plot of ϕ

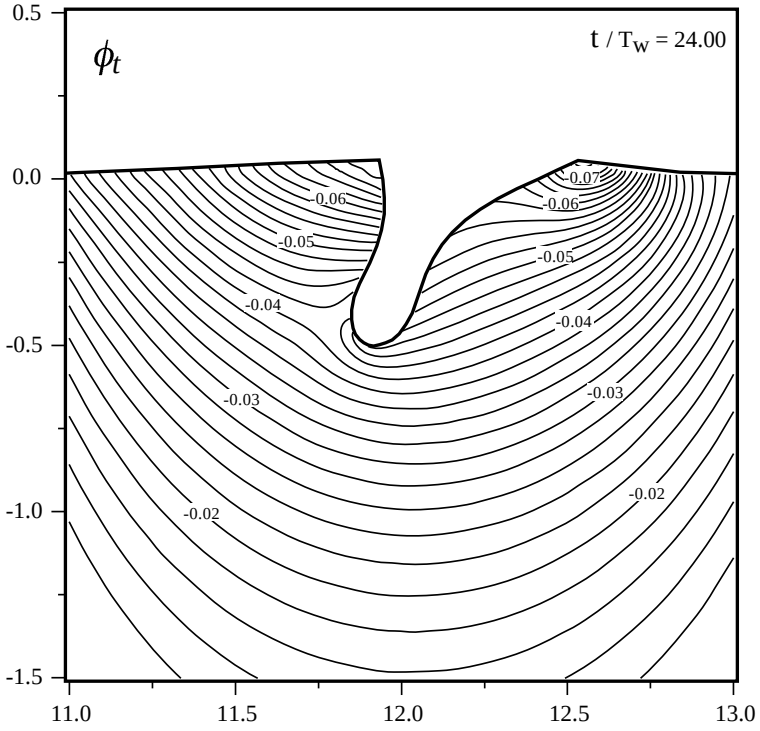


Fig.5.23: Contour plot of $\partial\phi/\partial t$

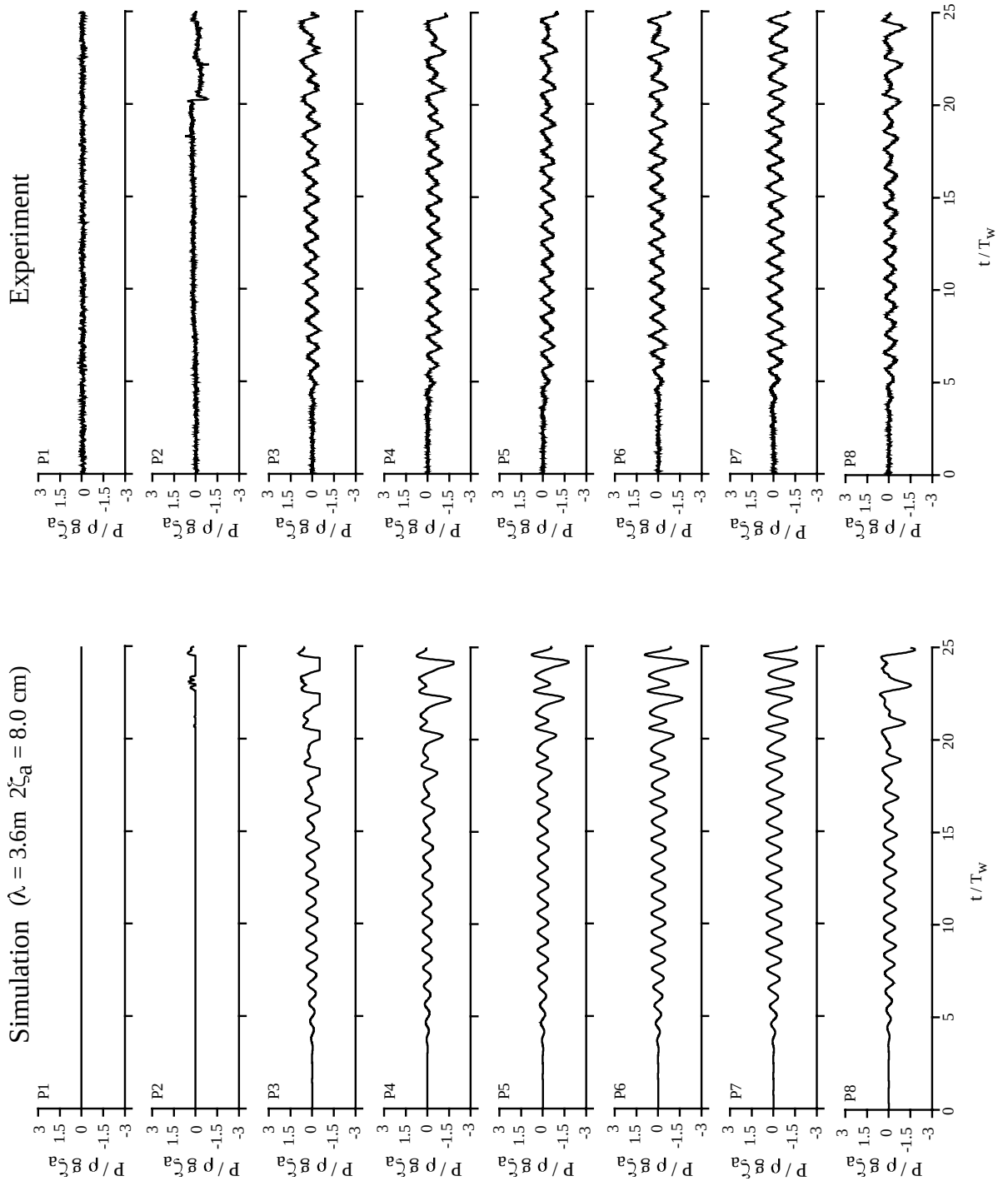


Fig.5.24: Comparison of pressure time history between simulation and experiment (Bow section body)

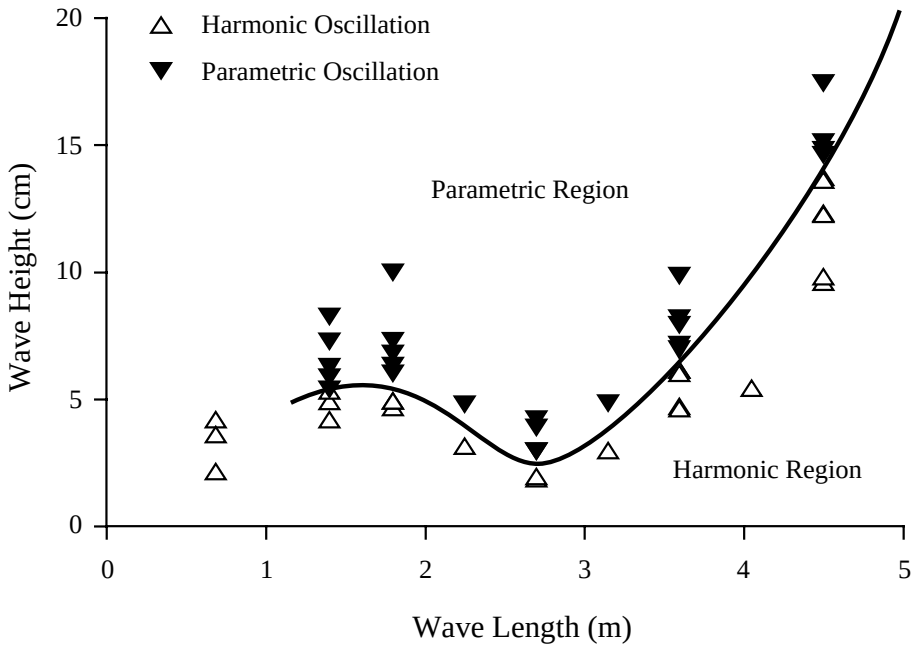


Fig.5.25: Criteria of parametric and harmonic regions given by experiment

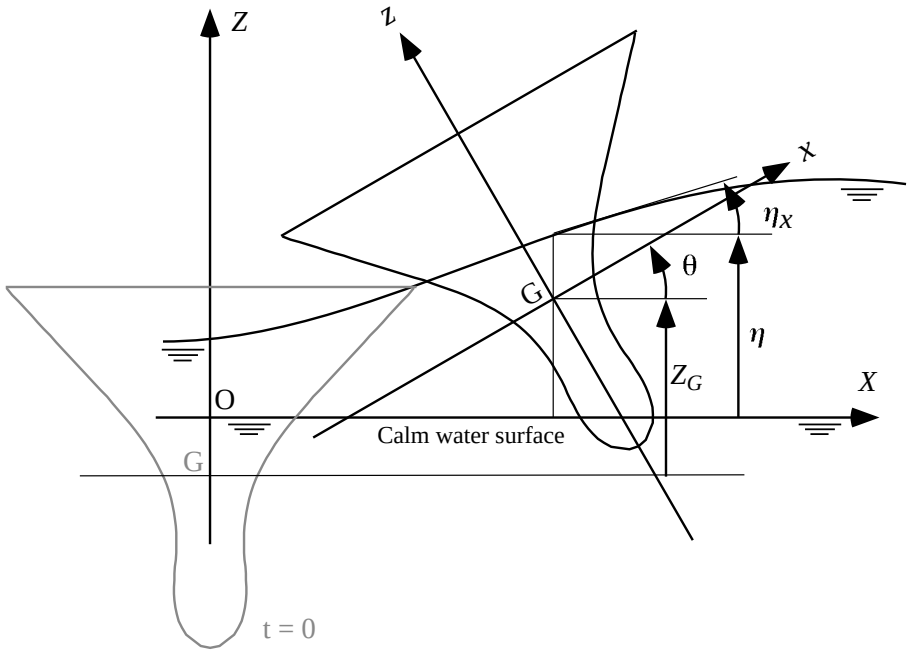


Fig.5.26: Reference frame of the Mathieu type simultaneous equation of heave and roll motions

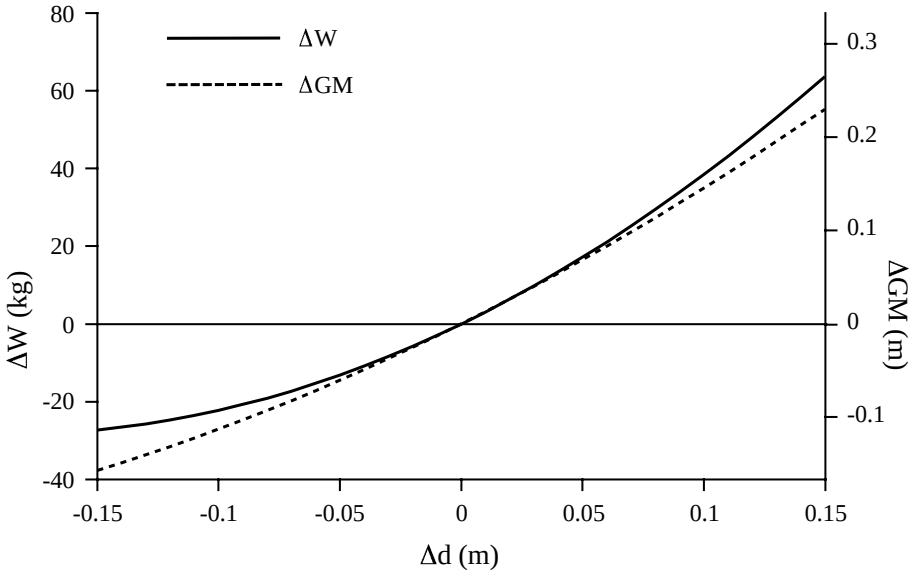


Fig.5.27: Variation of displacement and metacentric height v.s. draft (Bow section model)

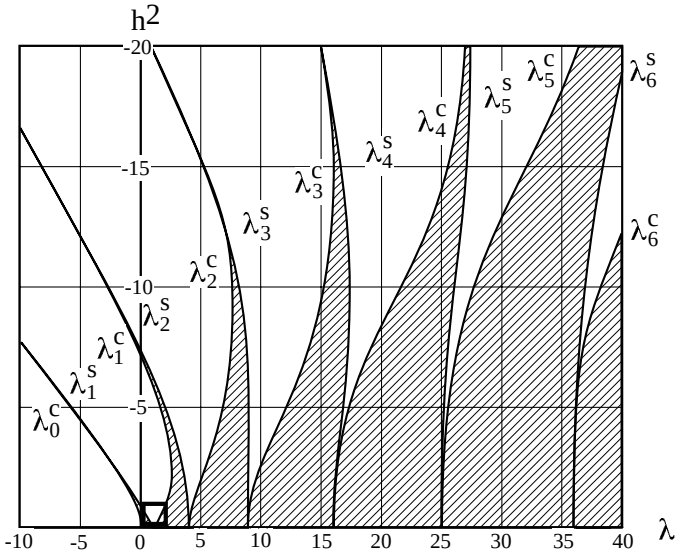


Fig.5.28: Stable and unstable regions of Mathieu equation

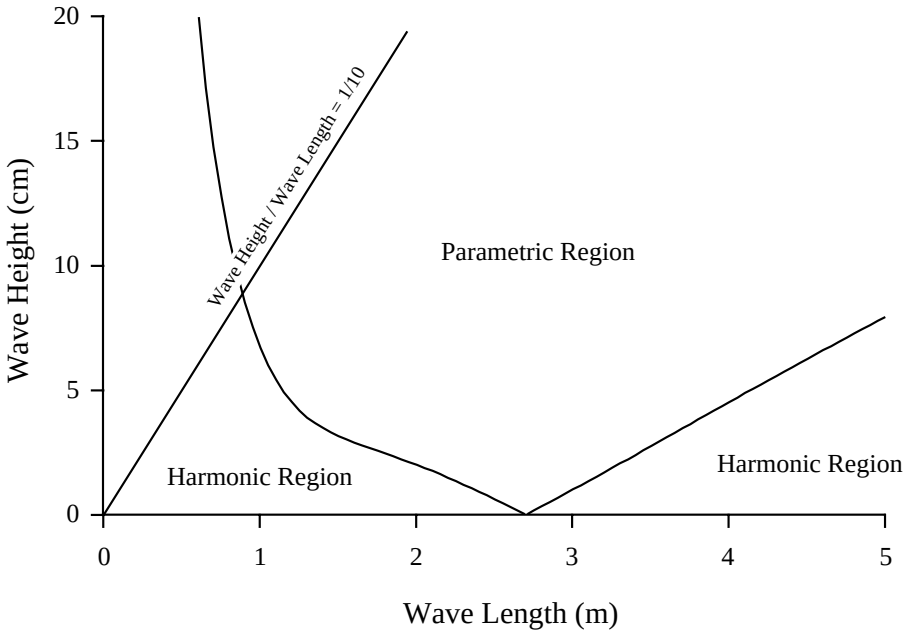


Fig.5.29: Criteria of parametric and harmonic regions given by the Mathieu type model equation

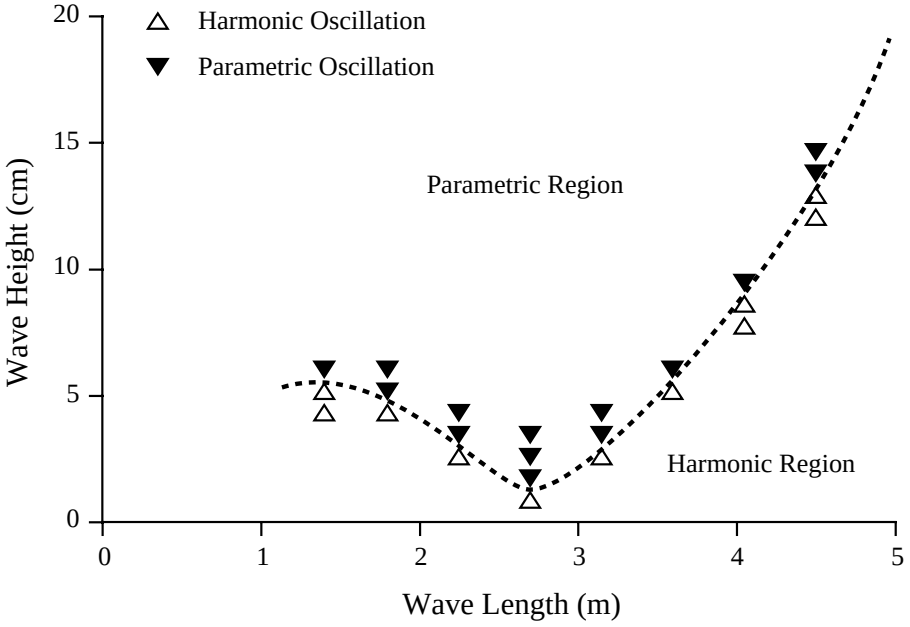


Fig.5.30: Criteria of parametric and harmonic regions given by the nonlinear simulation

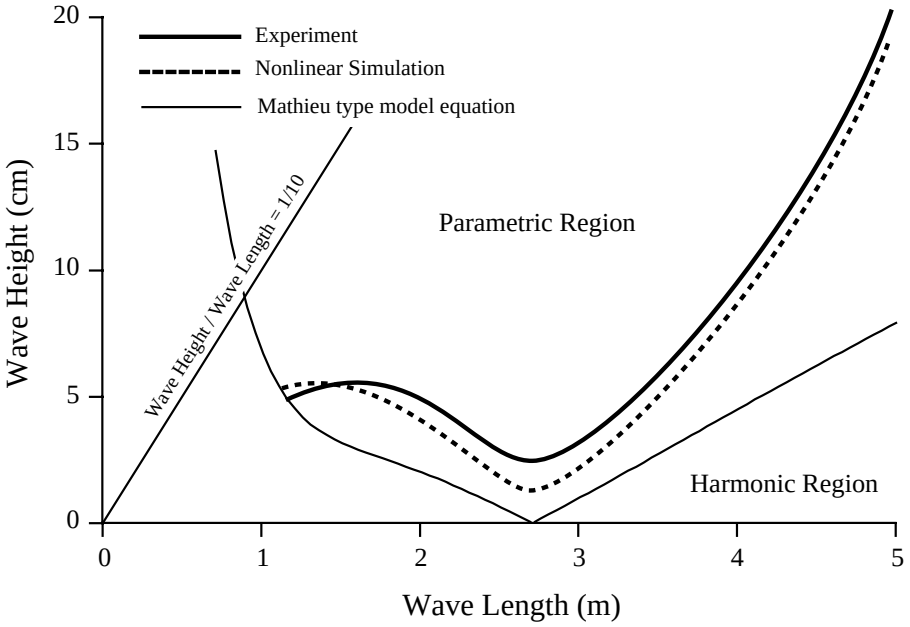


Fig.5.31: Criteria of parametric and harmonic regions. Comparison among experiment, the nonlinear simulation and the Mathieu type model equation

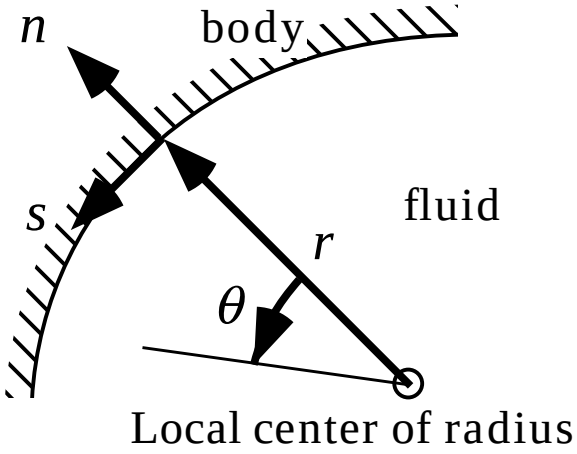


Fig.A.1: Local polar coordinate

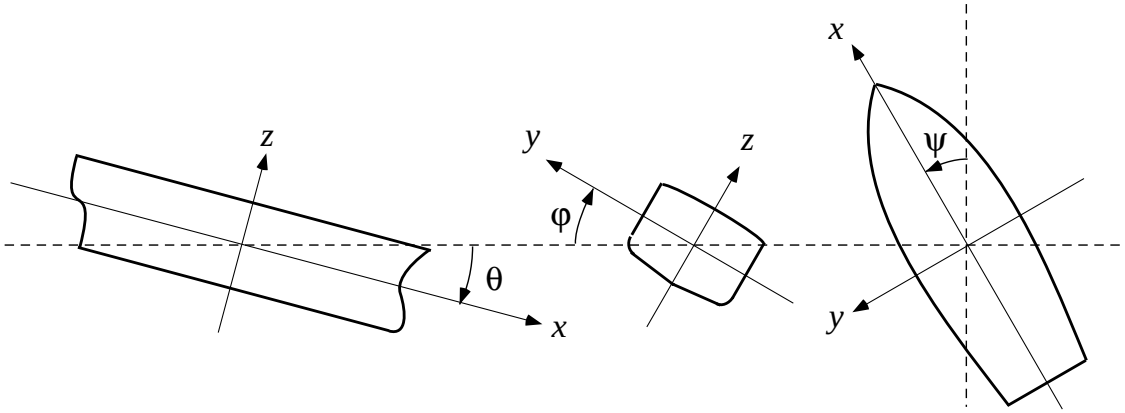


Fig.B.1: Euler angles

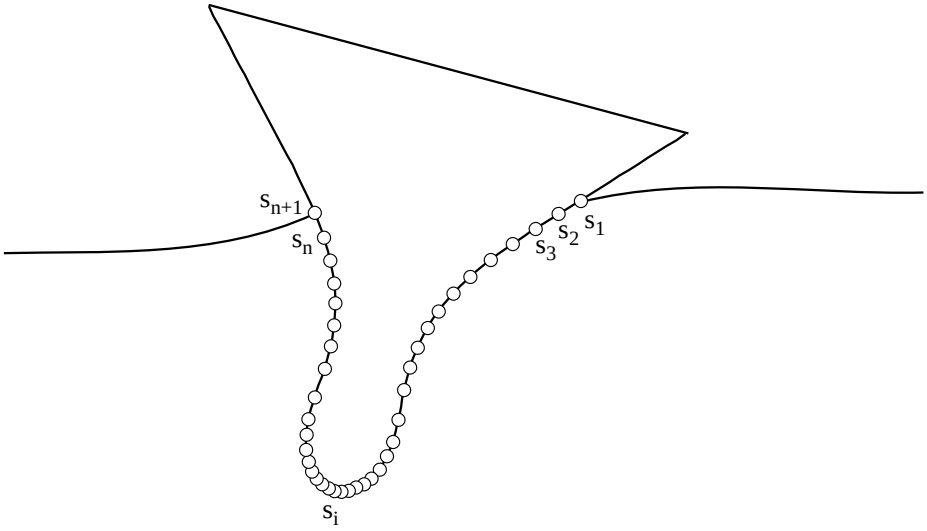


Fig.C.1: Collocation points generated on the bow section body

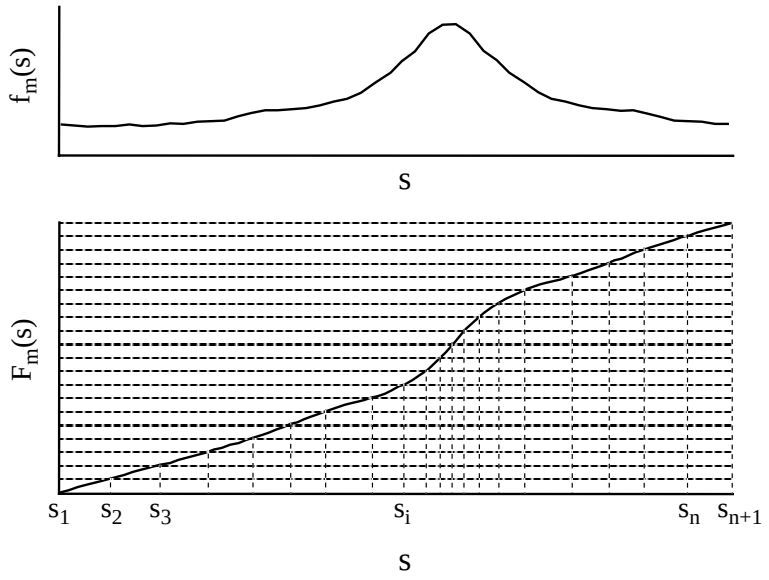


Fig.C.2: Mesh function and its integral

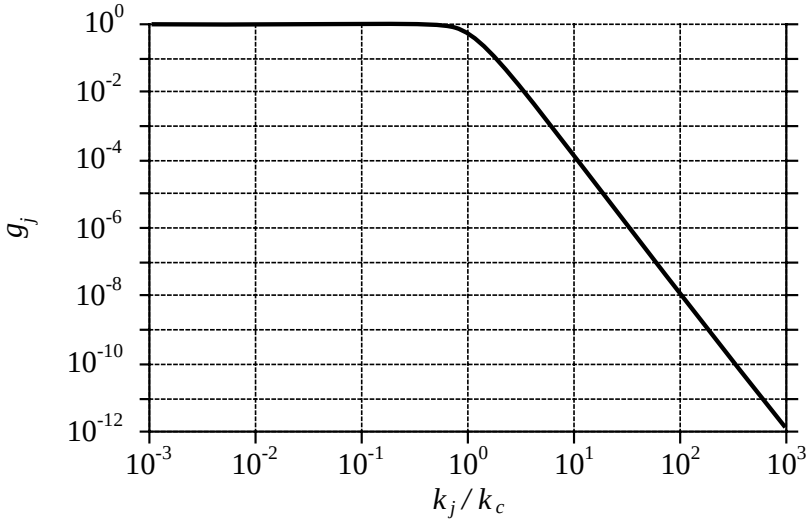


Fig.C.3: Gain of the smoothing spline as a function of k_c

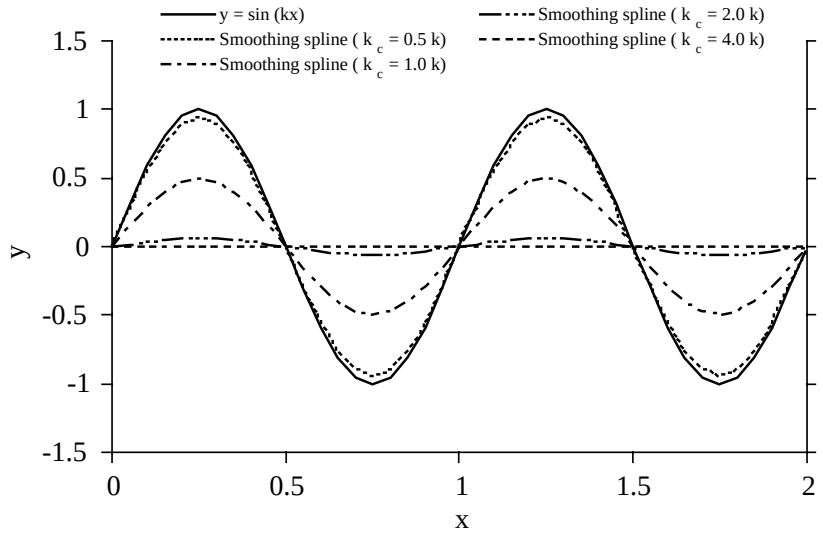


Fig.C.4: Smoothing splines applied to a sinusoidal function

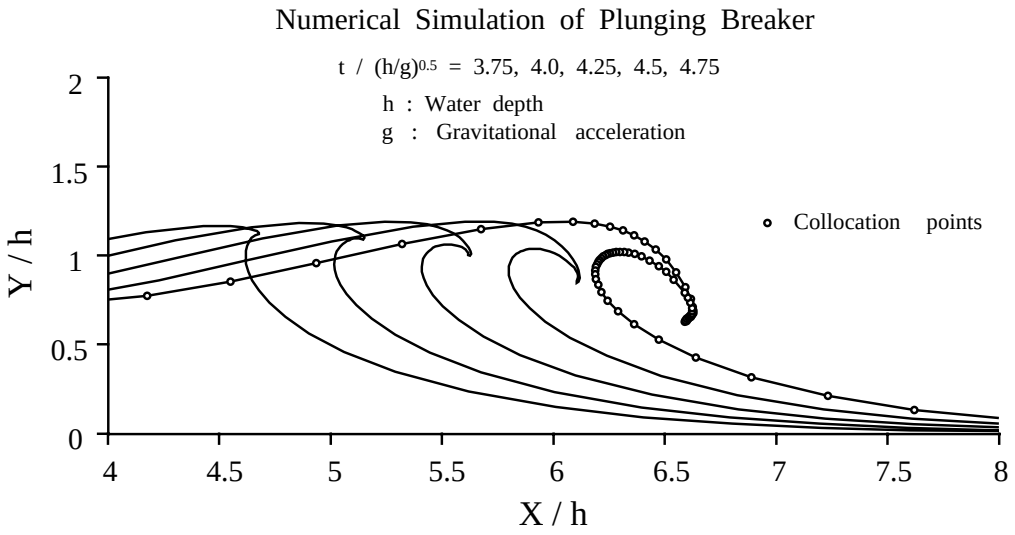


Fig.C.5: Simulated profile of a plunging wave

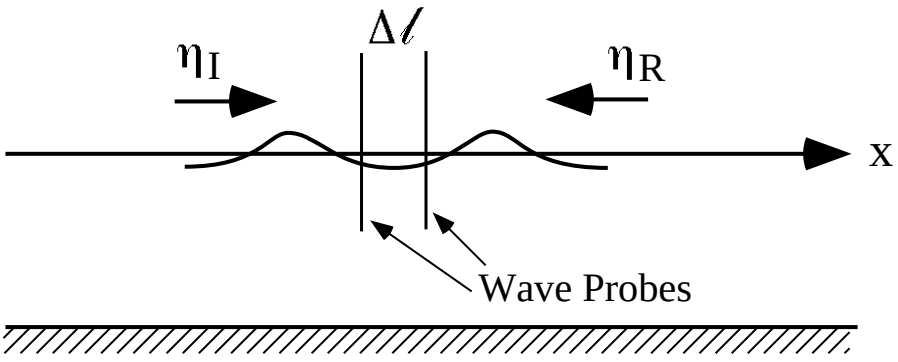


Fig.D.1: Incident wave and the reflected wave inside a wave basin