【46】

氏　　　　　名	根来　彬（ねごろ　あきら）
博士の専攻分野の名称	博　士（理　学）
学　位　記　番　号	第　10563　号
学位授与年月日	平成5年3月15日
学位授与の要件	学位規則第4条第2項該当
学　位　論　文　名	**Stable-like processes: Construction of the transition density and the behavior of sample paths near t= 0** **(安定的 Markov 過程の推移密度関数の構成と見本過程の挙動について)**
論　文　審　査　委　員	(主査) 教　授　渡辺　毅 (副査) 教　授　池田　信行　　教　授　井上　満　　助教授　眞鍋昭治郎

論　文　内　容　の　要　旨

本論文で取り扱うのは下記の型をした作用素である。

$$-(-\Delta)^{\alpha(x)/2} f(x) = \{ \int_{R^d \setminus \{0\}} \{ f(x+y) - f(x) - \nabla f(x) \cdot y 1_{\{|y| \leq 1\}}(y) \frac{\omega_{\alpha(x)}}{|y|^{d+\alpha(x)}} \} dy,$$

但し，α は $0 < \inf \alpha(x), \sup \alpha(x) < 2$，を満たす$R^d$上の関数で，$\omega_{\alpha(x)}(x)$ はこの作用素の表象 $-|\xi|^{\alpha(x)}$ に対する *Lévy-Khintchine* 公式を通じて定まる $\alpha(x)$ の関数である。この型の作用素には α が *Dini* 連続のとき，純飛躍型の *Markov* 過程が対応することは *Bass* によって示されており，我々はこの過程を指数 α をもつ安定的 *Markov* 過程と呼ぶ。

本論文では，α が無限回微分可能で全ての導関数が有界であると仮定したとき，対応する安定的 *Markov* 過程 X が推移密度関数をもち，また，安定過程の $t=0$ の近傍での挙動についての *Blumenthal* と *Getoor* の結果をこの場合に拡張出来ることを示した。

密度関数の存在は，作用素 $-(-\Delta)^{\alpha(x)/2}$ はその表象が滑らかでないので，まず無限回微分可能な関数 Φ で $-(-\Delta)^{\alpha(x)/2}$ の *Lévy* 測度の台を限定して作った作用素 L_Φ を考え，それに対応する純飛躍型 *Markov* 過程 X_Φ の推移密度関数を構成し，これと *Markov* 過程に対する局所的議論を用いて証明した。L_Φ を疑微分作用素とみなすと，その表象 p_Φ は有界関数 α を次数にもつ *Hörmander* クラス $S^{\alpha}_{1,\delta}$（δ は1より小さい任意の正数）に属する。これは通常の定数を次数にもつ *Hörmander* クラスの自然な拡張である。表象が有界関数を次数にもつ疑微分作用素に対しても，次数が定数のときに展開されている *algebra* と漸近展開公式に関する基本定理はそのまま拡張できる。更に，p_Φ は次数が関数にもかかわらず（H）- 条件を満たすことが分かる。これらのことから放物型発展方程式の初期値問題 $\partial_t - L_\Phi = 0$ に対して疑微分作用素の意味での基本解 $E(\cdot)$ を構成することが出来る。この基本解 $E(t)$ は $t>0$ のとき C^∞- 核表示が可能なので，その核関数を $K(t,x,y)$ とする。L_Φ に関する *Martingale* 問題の，xを出発点とする解 P_x と，無限回微分可能で *compact* な台をもつ関数 ϕ に対し，

$$E(t)\ \phi(x) = \int K(t,x,y) \phi(y) dy = E_x\ [\phi(X(t))]$$

が成立する。このことより L_Φ に対する *Martingale* 問題の解の一意性が示されたことになり，$K(t,x,y)$ が X_Φ の推移密度関数であることが分かる。

X の $t=0$ の近傍での挙動については次の結果を得た。R^d の点 x を任意に固定すると，

(1) もし$\alpha(x) < \beta$ならば

$$P_x(\lim_{t\to 0} |X(t)-x| / t^{1/\beta} = 0) = 1,$$

(2) もし$0 < \beta < \alpha(x)$ならば

$$P_x(\limsup_{t\to 0} |X(t)-x| / t^{1/\beta} = \infty) = 1,$$

となる。これらのことを証明するにはX_Φについて考察すれば十分である。一般にはX_Φは加法過程でない。そこで*Khintchine*の判定条件を標準過程にも適用出来るように一般化し，それをX_Φに適用して(1)を示す。(2)の証明は，$\gamma > 0$とし，$e(t,x,\xi)$を$E(t)$の表象とすると，$t^{-1/\gamma}(X_\Phi(t)-x)$の特性関数が$e(t,x,t^{-1/\gamma}\xi)$となることに着目して行う。

論文審査の結果の要旨

安定的*Markov*過程は対称安定過程の拡張で，その生成作用素が$L = -(-\Delta)^{\alpha(x)/2}$で与えられる純飛躍型の*Markov*過程をいう（$0 < \alpha(x) < 2$）。近年*Bass*らによって一般な存在定理が証明された。

本論文において根来君は安定的*Markov*過程Xについて（*i*）推移密度関数が存在する，（*ii*）安定過程の見本過程の挙動に関する*Blumenthal-Getoor*の定理が拡張される。という2つの重要な結果を得たが，証明の本質的部分は次の補助的*Markov*過程を構成することにある。すなわちLに対応する*Lévy*測度をC_0^∞関数Φによって制限した測度を*Lévy*測度とする作用素と*Markov*過程をL_Φ, X_Φとする。L_Φに対しては疑微分作用素論が適用でき，（*iii*）X_ΦはC^∞の推移密度関数をもつことが示される。さらに（*iv*）X_ΦはXの*part*であることも示される。

以上，根来君の研究は安定的*Markov*過程の基本的性質を解明したものであり，確率論および解析学の研究に貢献するところ大である。よって本論文は博士（理学）の学位論文として十分価値あるものと認める。