| | |
|---|---|
| 氏　　　　　名 | 島（しま）　　唯（ただ）　史（し） |
| 博士の専攻分野の名称 | 博　士　（理　学） |
| 学　位　記　番　号 | 第　1 0 4 7 9　号 |
| 学位授与年月日 | 平成 4 年 12 月 15 日 |
| 学位授与の要件 | 学位規則第 4 条第 2 項該当 |
| 学　位　論　文　名 | Lifschitz Tails for Random Schrödinger Operators on Nested Fractals<br>(ネステッドフラクタル上のランダムシュレーディンガー作用素に関するリフシッツ挙動について) |
| 論　文　審　査　委　員 | (主査)<br>教 授　福島　正俊<br>(副査)<br>教 授　伊達　悦朗　　教 授　石井　惠一　　教 授　稲垣　宣生 |

## 論　文　内　容　の　要　旨

物理学者 I.M. Lifschitz の1964年の論文によばれランダムなポテンシャルを持ったシュレーディンガー作用素の状態密度分布関数（integrated density of states）$\kappa(\lambda)$ はスペクトルの下限 $\lambda_0$ で $\exp[-\mathrm{const.}(\lambda-\lambda_0)^{-d/2}]$ のように減衰する。ここで d はランダムシュレーディンガー作用素が定義されているユークリッド空間又は格子の次元と一致している。本論文では基礎の空間をネステッドフラクタル集合（nested fractal）とした時に状態密度分布関数が上と同様に減衰し特に d に代わってフラクタルのスペクトル次元 $d_s$ が現れるのを論証する。

ネステッドフラクタル集合は自己相似性を持つ図形のうちで強い対称性と有限分岐性（finitely ramifiedness）を備えたものとして定義される。その例としては Sierpinski gasket, snowflake fractal 等がある。

スペクトル次元はフラクタル上でのラプラス作用素の状態密度分布関数の漸近的な振舞いに現れる指数で，ユークリッド空間では空間の次元と一致しているが多くのフラクタル図形においては埋め込まれているユークリッド空間の次元あるいは図形のハウスドルフ次元とも異なっている。

Lifschitz tail と呼ばれる先にあげた減衰の数学的な取扱いとしては二つの方法が知られている。一つは Abel-Tauber 型定理を用いて状態密度分布関数のラプラス変換の時間無限大での振舞いの評価に問題を帰着させる方法，いま一つは Dirichlet-Neumann bracketing を用いて有界領域に制限したときの第一固有値の評価から状態密度分布関数そのものの評価を導く方法である。

第一の方法を用いて Paluba は本論と同じ主題を Sierpinski gasket 上で論証している。我々は第二の方法を採用し，より一般のネステッドフラクタル集合を扱う。まず min-max principle を用いて状態密度分布関数の存在を示す。この時同時に Dirichlet-Neumann bracketing の関係が得られる。続いて Lifschitz tail の評価を行う。下からの評価のために Dirichlet 境界条件の下での第一固有値を，randomness の影響が無視できる状況で，上から評価する。これは deterministic な問題に帰着される。上からの評価のためには randomness の影響を考慮した上で，Neumann 境界条件の下で第一固有値を下から評価する。このために Kusuoka によって得られた Dirichlet norm による評価式が用いられる。また証明を通して Fukushima による Dirichlet form の scaling property が有効に用いられる。確率変数と

してポテンシャルが，フラクタル図形を作り上げている単位毎に独立同分布であり，又その分布の台が非負で0に退化していない，という仮定の下で状態密度分布関数 $\kappa(\lambda)$ に関して

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{\log[-\log k(\lambda)]}{\log \lambda} = -\frac{d_s}{2}$$

が成立することが厳密に証明された。

また，より具体的なランダムポテンシャル即ち，Poisson obstacles，Poisson noise，Poisson integral potential を与えそれらに対応する $\kappa(\lambda)$ についてはより精密な評価を得た。

## 論文審査の結果の要旨

シュレーディンガー作用素はラプラス微分作用素とポテンシャルの和として表わされる量子力学的 Hamiltonian であるが，ポテンシャル関数がランダムなときには，そのスペクトルが著しく特異な挙動をすることが知られている。特にスペクトルの平均的な分布を示す状態密度分布関数（integrated density of states）$\kappa(\lambda)$ は通常の場合はスペクトラムの下限 a の近くで c $(\lambda\text{-a})^{d/2}$ の形であるのにランダムポテンシャルの時は c exp $(-(\lambda\text{-a})^{-d/2})$ 形で緩やかに立ち上がる。ここに d は基礎のユークリッド空間または格子の次元である。これは Lifschitz tail と呼ばれ1964年に発見され80年前後に Varadhan，Simon 等によって厳密な数学的証明が与えられた。

本論文は基礎の空間を nested fractal と呼ばれるクラスのフラクタル集合に置き換えたとき，ランダムポテンシャルを伴うシュレーデインガー作用素の状態密度分布関数がやはり Lifschitz tail を持つことを証明し，しかもそこに現れる定数 d が nested fractal のスペクトル次元として最近知られるようになった数に一致することを示したものである。

フラクタルとは自己相似的集合即ちその縮小コピーのいくつかをうまく繋合わすと元の図形が復元されるという性質を持つ図形であり，そのうち特に強い対称性をもち有限分岐的なものが nested fractal で，例としては Sierpinski gasket, snow flake がある。70年代にはフラクタルを新しい幾何学的対象とみなして主にそのハウスドルフ次元等が調べられていたが，80年代後半に入ってそれを拡散過程や波動の媒体とみなす立場からの本格的な研究が楠岡，木上，Barlow, Perkins, Lindstrom 等によって開始され，その研究の中心的役割を果たす概念としてフラクタル上に最も自然なラプラス作用素が導入された。フラクタルは一般に不均一性の高い図形であるからこれは微分作用素ではありえないが，差分作用素の適当な繰り込み極限として定義される。フラクタルのスペクトル次元とはこのラプラス作用素の定める状態密度分布関数の漸近挙動に現れる指数として捉えられるものでありハウスドルフ次元とは一致せずそれより小さいことが最近の研究で知られている。

島君は既にラプラス作用素に基づくフラクタル解析学の構成に参加し，特に Sierpinski gasket 上のラプラス作用素のスペクトルを差分作用素の固有値の極限として explicit に記述することに成功してその通常と異なる wildness を明らかにしてきた。本論文はそこでの方法と Simon の方法を結合し一般の nested fractal 上のラプラス作用素にランダムな確率場としてポテンシャルを加え，その確率場が無限のフラクタル図形を作り上げている単位の図形毎に独立同分布であるという仮定の下で対応する状態密度分布関数の Lifschitz 挙動とそのスペクトル次元との関係を明らかにした。このように本論文はフラクタル解析学の発展に寄与するところ大であるのみならず数理物理学上も極めて興味深いものであり，博士論文として価値あるものと認める。