



Title	CONFORMAL DEFORMATION TO PRESCRIBED SCALAR CURVATURE ON COMPLETE NONCOMPACT RIEMANNIAN MANIFOLDS WITH NONPOSITIVE CURVATURE
Author(s)	加藤, 信
Citation	大阪大学, 1994, 博士論文
Version Type	
URL	https://hdl.handle.net/11094/38528
rights	
Note	著者からインターネット公開の許諾が得られていないため、論文の要旨のみを公開しています。全文のご利用をご希望の場合は、大阪大学の博士論文についてをご参照ください。

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

氏 名 加 藤 信

博士の専攻分野の名称 博 士 (理 学)

学 位 記 番 号 第 1 1 1 5 1 号

学 位 授 与 年 月 日 平成 6 年 3 月 15 日

学 位 授 与 の 要 件 学位規則第 4 条第 2 項該当

学 位 論 文 名 CONFORMAL DEFORMATION TO PRESCRIBED SCALAR
CURVATURE ON COMPLETE NONCOMPACT RIEMANNIAN
MANIFOLDS WITH NONPOSITIVE CURVATURE
(非正曲率完備非コンパクト・リーマン多様体の指定されたスカラー
曲率への共形変形)

論 文 審 査 委 員 (主査)
教 授 尾 関 英 樹
(副査)
教 授 井 川 満 助教授 加 須 栄 篤 助教授 小 磯 憲 史

論 文 内 容 の 要 旨

一般に, n 次元リーマン多様体 (M, g) に対して, そのスカラー曲率を S_g と書くことにする. M 上で与えられた滑らかな関数 f を, そのスカラー曲率として実現するような共形計量 $\tilde{g}$ を探すためには, 方程式 $-4 \frac{n-1}{n-2} \Delta_g u + S_g u = f u^{(n+2)/(n-2)}$, $u > 0$ ($n \geq 3$ の時), $-\Delta_g u + S_g = f e^u$ ($n = 2$ の時) を解けば良いことが知られている. 実際, 求める共形計量は, $n \geq 3$ の時は $\tilde{g} := u^{4/(n-2)} g$, また $n = 2$ の時は $\tilde{g} := e^u g$ とおくことにより得られる. 本論文では特に, 非正曲率完備非コンパクトな (M, g) 上で, g に一様同値な $\tilde{g}$ によって f が実現される場合を考察している. この一様同値性は, 上の方程式の有界な ($n \geq 3$ の時は, 特に正定数で上下から抑えられる) 解によって実現される. 第一の結果は, ユークリッド空間における次の定理である.

定理 I. f は $n (\geq 3)$ 次元ユークリッド空間 $(\mathbb{R}^n, g_0)$ 上の滑らかな関数とする. 今, $\mathbb{R}^n$ の $m (\leq n-3)$ 次元部分多様体 Σ で, $\mathbb{R}^m$ から $(\mathbb{R}^{n-m})$ への傾き有界な C^1 級写像のグラフとして表されるものが存在して, ある正の実数 C と $\ell > 2$ に対し, $|f| \leq C/r_\Sigma^\ell$ が成立するならば, g_0 に共形かつ一様同値で, f をスカラー曲率として持つ $\tilde{g}$ が, 無限個存在する. ただしここで, r_Σ は Σ からの距離関数とする.

定理 II では, 上述の Σ に関する仮定を, ある種の積分条件に置き換えることを試みている. これに類似した状況を, 負曲率多様体上で観察したものが, 次の定理である.

定理 III. (M, g) は, $n (\geq 2)$ 次元負曲率完備単連結非コンパクト・リーマン多様体で, その断面曲率の下限 $-A^2$ と上限 $-B^2$ の比が高々 $(n-1)^2/n(n-2)$ であるものとする. f は, M 上の有界かつ滑らかな関数とする. 今, M の部分集合 Σ で, ある正の実数 δ と $\alpha = \{n-1+\sqrt{(n-1)^2-n(n-2)(A/B)^2}\}/2$ に対して

$$\sup_{x \in M} \int_{B_\delta(\Sigma)} \frac{dy}{\cosh^\alpha B d_g(x, y)} < +\infty$$

を満たすものが存在して, ある正の実数 a, b, R に対し $-a^2 \leq f \leq -b^2$ on $M - B_R(\Sigma)$ が成立し, かつ A, B, a, b, R, Σ による正の実数 ε に対し $f \leq \varepsilon$ in $B_R(\Sigma)$ が成立するならば, g に共形かつ一様同値で, f をスカラー曲率として持つ $\tilde{g}$ が存在する.

以下, 上の条件を満たす Σ の例, また定理の主張が成立しないような Σ の例を挙げるとともに, 類似の主張が, M が単連結でない場合にも, ある程度成立する事を示している.

論文審査の結果の要旨

本論文では、非コンパクト・非正曲率な完備リーマン多様体において、その上の関数が、一様同値な共形変形でスカラー曲率として実現できる条件を考察した。上のタイプのある種のリーマン多様体では、関数が部分多様体からの距離に関連する条件をみたしているとき、肯定的であるとの解を与えた。

これは、最近の大域的解析の手法を用い、重要な幾何学的成果を与えたもので、博士（理学）の学位論文として十分価値あるものと判断する。