



Title	CONFORMAL DEFORMATION TO PRESCRIBED SCALAR CURVATURE ON COMPLETE NONCOMPACT RIEMANNIAN MANIFOLDS WITH NONPOSITIVE CURVATURE
Author(s)	加藤, 信
Citation	大阪大学, 1994, 博士論文
Version Type	
URL	<a href="https://hdl.handle.net/11094/38528">https://hdl.handle.net/11094/38528</a>
rights	
Note	著者からインターネット公開の許諾が得られていないため、論文の要旨のみを公開しています。全文のご利用をご希望の場合は、<a href="https://www.library.osaka-u.ac.jp/thesis/#closed">大阪大学の博士論文について</a>をご参照ください。

*The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA*

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

氏名	加藤 信
博士の専攻分野の名称	博士(理学)
学位記番号	第 11151 号
学位授与年月日	平成6年3月15日
学位授与の要件	学位規則第4条第2項該当
学位論文名	CONFORMAL DEFORMATION TO PRESCRIBED SCALAR CURVATURE ON COMPLETE NONCOMPACT RIEMANNIAN MANIFOLDS WITH NONPOSITIVE CURVATURE (非正曲率完備非コンパクト・リーマン多様体の指定されたスカラー曲率への共形変形)
論文審査委員	(主査) 教授 尾関 英樹 (副査) 教授 井川 満 助教授 加須栄 篤 助教授 小磯 憲史

## 論文内容の要旨

一般に,  $n$ 次元リーマン多様体  $(M, g)$  に対して, そのスカラー曲率を  $S_g$  と書くことにする。 $M$  上で与えられた滑らかな関数  $f$  を, そのスカラー曲率として実現するような共形計量  $\tilde{g}$  を探すためには, 方程式  $-4 \frac{n-1}{n-2} \Delta_g u + S_g u = fu$  ( $n \geq 3$  の時),  $-\Delta_g u + S_g = fe^u$  ( $n = 2$  の時) を解けば良いことが知られている。実際, 求める共形計量は,  $n \geq 3$  の時は  $\tilde{g} := u^{4/(n-2)} g$ , また  $n = 2$  の時は  $\tilde{g} := e^u g$  とおくことにより得られる。本論文では特に, 非正曲率完備非コンパクトな  $(M, g)$  上で,  $g$  に一様同値な  $\tilde{g}$  によって  $f$  が実現される場合を考察している。この一様同値性は, 上の方程式の有界な ( $n \geq 3$  の時は, 特に正定数で上下から抑えられる) 解によって実現される。第一の結果は, ユークリッド空間における次の定理である。

定理I.  $f$  は  $n (\geq 3)$  次元ユークリッド空間  $(\mathbb{R}^n, g_0)$  上の滑らかな関数とする。今,  $\mathbb{R}^n$  の  $m (\leq n-3)$  次元部分多様体  $\Sigma$  で,  $\mathbb{R}^m$  から  $(\mathbb{R}^{n-m}$  への傾き有界な  $C^1$  級写像のグラフとして表されるものが存在して, ある正の実数  $C$  と  $l > 2$  に対し,  $|f| \leq C/r_\Sigma^l$  が成立するばらば,  $g_0$  に共形かつ一様同値で,  $f$  をスカラー曲率として持つ  $\tilde{g}$  が, 無限個存在する。ただしここで,  $r_\Sigma$  は  $\Sigma$  からの距離関数とする。

定理IIでは, 上述の  $\Sigma$  に関する仮定を, ある種の積分条件に置き換えることを試みている。これに類似した状況を, 負曲率多様体上で観察したものが, 次の定理である。

定理III.  $(M, g)$  は,  $n (\geq 2)$  次元負曲率完備单連結非コンパクト・リーマン多様体で, その断面曲率の下限  $-A^2$  と上限  $-B^2$  の比が高々  $(n-1)^2/n(n-2)$  であるものとする。 $f$  は,  $M$  上の有界かつ滑らかな関数とする。今,  $M$  の部分集合  $\Sigma$  で, ある正の実数  $\delta$  と  $\alpha = \{n-1 + \sqrt{(n-1)^2 - n(n-2) (A/B)^2}\}/2$  に対して

$$\sup_{x \in M} \int_{B_\delta(\Sigma)} \frac{dy}{\cosh^\alpha B d_g(x, y)} < +\infty$$

を満たすものが存在して, ある正の実数  $a, b, R$  に対し  $-a^2 \leq f \leq -b^2$  on  $M - B_R(\Sigma)$  が成立し, かつ  $A, B, a, b, R, \Sigma$  による正の実数  $\varepsilon$  に対し  $f \leq \varepsilon$  in  $B_R(\Sigma)$  が成立するならば,  $g$  に共形かつ一様同値で,  $f$  をスカラー曲率として持つ  $\tilde{g}$  が存在する。

以下, 上の条件を満たす  $\Sigma$  の例, また定理の主張が成立しないような  $\Sigma$  の例を挙げるとともに, 類似の主張が,  $M$  が单連結でない場合にも, ある程度成立する事を示している。

## 論文審査の結果の要旨

本論文では、非コンパクト・非正曲率な完備リーマン多様体において、その上の関数が、一様同値な共形変形でスカラー曲率として実現できる条件を考察した。上のタイプのある種のリーマン多様体では、関数が部分多様体からの距離に関連する条件をみたしているとき、肯定的であるとの解を与えた。

これは、最近の大域的解析の手法を用い、重要な幾何学的成果を与えたもので、博士（理学）の学位論文として十分価値あるものと判断する。