【47】

氏　　　名	加(か)藤(とう)　信(しん)
博士の専攻分野の名称	博　士（理　学）
学位記番号	第　11151　号
学位授与年月日	平成 6 年 3 月 15 日
学位授与の要件	学位規則第 4 条第 2 項該当
学位論文名	CONFORMAL DEFORMATION TO PRESCRIBED SCALAR CURVATURE ON COMPLETE NONCOMPACT RIEMANNIAN MANIFOLDS WITH NONPOSITIVE CURVATURE **（非正曲率完備非コンパクト・リーマン多様体の指定されたスカラー曲率への共形変形）**
論文審査委員	（主査） 教　授　尾関　英樹 （副査） 教　授　井川　　満　　助教授　加須栄　篤　　助教授　小磯　憲史

論 文 内 容 の 要 旨

一般に，n 次元リーマン多様体（M, g）に対して，そのスカラー曲率を S_g と書くことにする。M 上で与えられた滑らかな関数 f を，そのスカラー曲率として実現するような共形計量 $\tilde{g}$ を探すためには，方程式 $-4\frac{n-1}{n-2}\Delta_g u+S_g u=fu^{(n+2)/(n-2)}$, $u>0$（$n\geq 3$ の時），$-\Delta_g u+S_g=fe^u$（$n=2$ の時）を解けば良いことが知られている。実際，求める共形計量は，$n\geq 3$ の時は $\tilde{g}:=u^{4/(n-2)}g$，また $n=2$ の時は $\tilde{g}:=e^u g$ とおくことにより得られる。本論文では特に，非正曲率完備非コンパクトな（M, g）上で，g に一様同値な $\tilde{g}$ によって f が実現される場合を考察している。この一様同値性は，上の方程式の有界な（$n\geq 3$ の時は，特に正定数で上下から抑えられる）解によって実現される。第一の結果は，ユークリッド空間における次の定理である。

定理Ⅰ. f は $n(\geq 3)$ 次元ユークリッド空間（R^n, $g_\circ$）上の滑らかな関数とする。今，R^n の $m(\leq n-3)$ 次元部分多様体 Σ で，R^m から（R^{n-m} への傾き有界な C^1 級写像のグラフとして表されるものが存在して，ある正の実数 C と $l>2$ に対し，$|f|\leq C/r_\Sigma^l$ が成立するばらば，$g_\circ$ に共形かつ一様同値で，f をスカラー曲率として持つ $\tilde{g}$ が，無限個存在する。ただしここで，r_Σ は Σ からの距離関数とする。

定理Ⅱでは，上述の Σ に関する仮定を，ある種の積分条件に置き換えることを試みている。これに類似した状況を，負曲率多様体上で観察したものが，次の定理である。

定理Ⅲ.（M, g）は，$n(\geq 2)$ 次元負曲率完備単連結非コンパクト・リーマン多様体で，その断面曲率の下限 $-A^2$ と上限 $-B^2$ の比が高々 $(n-1)^2/n(n-2)$ であるものとする。f は，M 上の有界かつ滑らかな関数とする。今，M の部分集合 Σ で，ある正の実数 δ と $\alpha=\{n-1+\sqrt{(n-1)^2-n(n-2)(A/B)^2}\}/2$ に対して

$$\sup_{x\in M}\int_{B_\delta(\Sigma)}\frac{dy}{\cosh^\alpha Bd_g(x,y)}<+\infty$$

を満たすものが存在して，ある正の実数 a, b, R に対し $-a^2\leq f\leq -b^2$ on $M-B_R(\Sigma)$ が成立し，かつ A, B, a, b, R, Σ による正の実数 ε に対し $f\leq\varepsilon$ in $B_R(\Sigma)$ が成立するならば，g に共形かつ一様同値で，f をスカラー曲率として持つ $\tilde{g}$ が存在する。

以下，上の条件を満たす Σ の例，また定理の主張が成立しないような Σ の例を挙げるとともに，類似の主張が，M が単連結でない場合にも，ある程度成立する事を示している。

論文審査の結果の要旨

本論文では，非コンパクト・非正曲率な完備リーマン多様体において，その上の関数が，一様同値な共形変形でスカラー曲率として実現できる条件を考察した。上のタイプのある種のリーマン多様体では，関数が部分多様体からの距離に関連する条件をみたしているとき，肯定的であるとの解を与えた。

これは，最近の大域的解析の手法を用い，重要な幾何学的成果を与えたもので，博士（理学）の学位論文として十分価値あるものと判断する。