【51】

氏　　　　名	中(なか)　内(うち)　伸(のぶ)　光(みつ)
博士の専攻分野の名称	博　士（理　学）
学位記番号	第　11941　号
学位授与年月日	平成7年3月23日
学位授与の要件	学位規則第4条第2項該当
学位論文名	CONCENTRATION COMPACTNESS OF A SPACE OF NON-LINEAR p-HARMONIC FUNCTIONS （非線型p-調和関数の空間の凝縮コンパクト性）
論文審査委員	（主査） 教 授 尾関 英樹 （副査） 教 授 井川 満　教 授 坂根 由昌　教 授 小磯 憲史

論文内容の要旨

$\mathbf{R}^n$ の領域Ω上，方程式

(1)　$\operatorname{div}(\|\nabla u\|^{p-2}\nabla u)+C_0|u|^{p^*-2}u=0 \qquad (2\leq p<n)$

を考える。但し，$p^*=\dfrac{np}{n-p}$ である。

これは，汎関数

$$F(u)=\frac{1}{p}\int_\Omega\|\nabla u\|^p dx-\frac{C_0}{p^*}\int_\Omega|u|^{p^*}dx.$$

の Euler-Lagrange 方程式であり，臨界ソボレフ埋込み $L^{1,p}(\Omega)\hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$ に対応したもの（$p=2$ のときは山辺タイプ）になっている。解空間

$$H_p=\{u\ ;\ (1)の弱解\}$$

を考える。ここで，方程式(a)の弱解とは，$u\in L^{1,p}(\Omega)$ であって，任意の test function $\eta\in C_0^1(\Omega)$ に対して，

$$-\int_\Omega\|\nabla u\|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla\eta dx+C_0\int_\Omega|u|^{p^*-2}u\eta dx=0$$

を満たすものをいう。解空間 H_p を調べるために，モース理論の観点から次のような部分空間を考える。任意に与えられた正定数 C に対して，部分空間 H_p (C)

$$H_p(C)=\{u\ ;\ (1)の弱解で、\|u\|_{L^{1,p}}\leq C\}$$

とおく。このとき，主結果は「空間 H_p (C) の有限個の点を modulo とした “C^1-コンパクト性”」である：

定理。任意の列 $u_j\in H_p(C)$ に対して，Ωの高々有限個の点からなる集合 $S=\{x_1,\cdots,x_k\}$ が存在して，次の(a), (b)が成り立つ：

(a)　u_j は，$\Omega-S$ の任意のコンパクト集合上一様な $C^{1,\alpha}$-評価（$\exists\alpha\in(0,1)$）が得られる。したがって，Ω－Sの C^1-関数 w が存在して，必要なら部分列をとれば，u_j は w に，Ω－Sの任意のコンパクト集合上，C^1-位相で収束する。さらに w は，Ω上の(1)の弱解である。

(b)　さらに，測度 $|u_j|^q dx$ は $|w|^q dx+\sum_{i=1}^k a_i\delta_{x_i}$ に，ラドン測度の意味で弱収束する。但し，a_i は，正の数で，δ_{x_i} は，点 x_i に台をもつディラック測度である。

定理の結論(b)は，「Sが高々可算集合」という弱い形でＰ．Ｌ．Lions の concentration compactness の理論から導くこともできる。結論(a)の C^1-収束という強い収束性は，「方程式(1)の解である」という仮定から導かれるものであり，Ｐ．Ｌ．Lions の一般的理論では捉えきれないものである。また，(a)の $C^{1,\alpha}$-評価は，方程式(1)の退化性により，一

般には C^2 級まで上がらないという意味でベストである。特異集合 S は一般には空集合であることも有り得るが，S が空でない例も構成できる。S の各点ではいわゆる “bubbling” が起こり，方程式(1)の弱解が bubble out される。このような bubbling（あるいは，concentration）と呼ばれる現象は，極小曲面，調和写像，ヤン・ミルズ接続，アインシュタイン計量などの収束においても観察される。

定理の証明では，ポイントとなる(a)の局所 $C^{1,\alpha}$- 評価は局所 C^0- 評価から従うが，この C^0- 評価には非線型方程式(1)の解に関する Moser の iteration technique を用いる。この C^0- 評価は，非退化楕円型の場合（$p=2$）にはR. Schoen, S. Takakuwa 等により implicit に得られている。

定理は，もっと一般の，「任意の $u \in C_0^1(M)$ に対してソボレフ不等式

$$\left\{\int_M |u|^{p^*} dv\right\}^{\frac{1}{p^*}} \leq C\left\{\int_M (|u|^p + \|\nabla u\|^p) dv\right\}^{\frac{1}{p}}$$

が成り立つようなリーマン多様体（特に，任意のコンパクト多様体）M 上の方程式

$$\operatorname{div}(\|\nabla u\|^{p-2}\nabla u) + f(x, u) = 0,$$

$$|f(x, u)| \leq C(|u|^{p-1} + |u|^{p^*-1})$$

の解に対して，拡張できる。

論文審査の結果の要旨

本研究は p- 調和関数に関する空間の凝縮コンパクト性を考察したものである。$\mathbf{R}^n$ の領域で，p- 調和性を与える方程式に対し，$L^{1,p}$ 空間で，その弱解のなす空間をとる。ここでの任意有界列に対し，適当な部分列をとると，領域内の有限の点を除いて，ある弱解に C^1- 一様収束し，またこれらの有限個の点では Dirac 測度に弱収束することを示した。

この結果は，より一般にリーマン多様体の間のp-調和写像の研究に応用・見通しを与えるもので，博士（理学）の学位論文として十分価値あるものと認める。