

Title	CONCENTRATION COMPACTNESS OF A SPACE OF NONLINEAR p -HARMONIC FUNCTIONS
Author(s)	中内, 伸光
Citation	大阪大学, 1995, 博士論文
Version Type	
URL	https://hdl.handle.net/11094/39308
rights	
Note	著者からインターネット公開の許諾が得られていないため、論文の要旨のみを公開しています。全文のご利用をご希望の場合は、 〈a href="https://www.library.osaka-u.ac.jp/thesis/#closed"〉 大阪大学の博士論文について 〈/a〉 をご参照ください。

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

氏名	中内伸光
博士の専攻分野の名称	博士(理学)
学位記番号	第 11941 号
学位授与年月日	平成7年3月23日
学位授与の要件	学位規則第4条第2項該当
学位論文名	CONCENTRATION COMPACTNESS OF A SPACE OF NON-LINEAR p -HARMONIC FUNCTIONS (非線型 p -調和関数の空間の凝縮コンパクト性)
論文審査委員	(主査) 教授 尾関 英樹 (副査) 教授 井川 満 教授 坂根 由昌 教授 小磯 憲史

論文内容の要旨

\mathbf{R}^n の領域 Ω 上, 方程式

$$(1) \operatorname{div} (\|\nabla u\|^{p-2} \nabla u) + C_0 |u|^{p^*-2} u = 0 \quad (2 \leq p < n)$$

を考える。但し, $p^* = \frac{np}{n-p}$ である。

これは, 汎関数

$$F(u) = \frac{1}{p} \int_{\Omega} \|\nabla u\|^p dx - \frac{C_0}{p^*} \int_{\Omega} |u|^{p^*} dx.$$

の Euler-Lagrange 方程式であり, 臨界ソボレフ埋込み $L^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$ に対応したもの ($p=2$ のときは山辺タイプ) になっている。解空間

$$H_p = \{u; (1) \text{の弱解}\}$$

を考える。ここで, 方程式(a)の弱解とは, $u \in L^{1,p}(\Omega)$ であって, 任意の test function $\eta \in C_0^1(\Omega)$ に対して,

$$-\int_{\Omega} \|\nabla u\|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \eta dx + C_0 \int_{\Omega} |u|^{p^*-2} u \eta dx = 0$$

を満たすものをいう。解空間 H_p を調べるために, モース理論の観点から次のような部分空間を考える。任意に与えられた正定数 C に対して, 部分空間 $H_p(C)$

$$H_p(C) = \{u; (1) \text{の弱解で, } \|u\|_{L^{1,p}} \leq C\}$$

とおく。このとき, 主結果は「空間 $H_p(C)$ の有限個の点を modulo とした “ C^1 -コンパクト性”」である:

定理. 任意の列 $u_j \in H_p(C)$ に対して, Ω の高々有限個の点からなる集合 $S = \{x_1, \dots, x_k\}$ が存在して, 次の(a), (b) が成り立つ:

(a) u_j は, $\Omega - S$ の任意のコンパクト集合上一様な $C^{1,\alpha}$ -評価 ($\exists \alpha \in (0, 1)$) が得られる。したがって, $\Omega - S$ の C^1 -関数 w が存在して, 必要なら部分列をとれば, u_j は w に, $\Omega - S$ の任意のコンパクト集合上, C^1 -位相で収束する。さらに w は, Ω 上の(1)の弱解である。

(b) さらに, 測度 $|u_j|^q dx$ は $|w|^q dx + \sum_{i=1}^k a_i \delta_{x_i}$ に, ラドン測度の意味で弱収束する。但し, a_i は, 正の数で, δ_{x_i} は, 点 x_i に台をもつディラック測度である。

定理の結論(b)は, 「 S が高々可算集合」という弱い形で P. L. Lions の concentration compactness の理論から導くこともできる。結論(a)の C^1 -収束という強い収束性は, 「方程式(1)の解である」という仮定から導かれるものであり, P. L. Lions の一般的理論では捉えきれないものである。また, (a)の $C^{1,\alpha}$ -評価は, 方程式(1)の退化性により, 一

般には C^2 級まで上がらないという意味でベストである。特異集合 S は一般には空集合であることも有り得るが、 S が空でない例も構成できる。 S の各点ではいわゆる “bubbling” が起こり、方程式(1)の弱解が bubble out される。このような bubbling (あるいは, concentration) と呼ばれる現象は、極小曲面、調和写像、ヤン・ミルズ接続、アインシュタイン計量などの収束においても観察される。

定理の証明では、ポイントとなる(a)の局所 $C^{1,\alpha}$ -評価は局所 C^0 -評価から従うが、この C^0 -評価には非線型方程式(1)の解に関する Moser の iteration technique を用いる。この C^0 -評価は、非退化楕円型の場合 ($p = 2$) には R. Schoen, S. Takakuwa 等により implicit に得られている。

定理は、もっと一般の、「任意の $u \in C_0^1(M)$ に対してソボレフ不等式

$$\left\{ \int_M |u|^{p^*} dv \right\}^{\frac{1}{p^*}} \leq C \left\{ \int_M (|u|^p + \|\nabla u\|^p) dv \right\}^{\frac{1}{p}}$$

が成り立つようなリーマン多様体 (特に、任意のコンパクト多様体) M 上の方程式

$$\operatorname{div} (\|\nabla u\|^{p-2} \nabla u) + f(x, u) = 0,$$

$$|f(x, u)| \leq C(|u|^{p-1} + |u|^{p^*-1})$$

の解に対して、拡張できる。

論文審査の結果の要旨

本研究は p -調和関数に関する空間の凝縮コンパクト性を考察したものである。 \mathbf{R}^n の領域で、 p -調和性を与える方程式に対し、 $L^{1,p}$ 空間で、その弱解のなす空間をとる。ここでの任意有界列に対し、適当な部分列をとると、領域内の有限の点を除いて、ある弱解に C^1 -一様収束し、またこれらの有限個の点では Dirac 測度に弱収束することを示した。

この結果は、より一般にリーマン多様体の間の p -調和写像の研究に応用・見通しを与えるもので、博士 (理学) の学位論文として十分価値あるものと認める。