Title	Asymptotic behavior of solutions of a semilinear heat equation with subcritical nonlinearity
Author(s)	川中子, 正
Citation	大阪大学, 1996, 博士論文
Version Type	
URL	https://hdl.handle.net/11094/39433
rights	
Note	著者からインターネット公開の許諾が得られていないため、論文の要旨のみを公開しています。全文のご利用をご希望の場合は、大阪大学の博士論文についてをご参照ください。

氏　　　　名　川中子　　正（かわなご　ただし）

博士の専攻分野の名称　博　士（理　学）

学 位 記 番 号　第　1 2 5 6 4　号

学位授与年月日　平成 8 年 3 月 25 日

学位授与の要件　学位規則第 4 条第 2 項該当

学 位 論 文 名　Asymptotic behavior of solutions of a semilinear heat equation with subcritical nonlinearity
（サブクリティカルな非線形性をもつ半線形熱方程式の解の漸近挙動）

論文審査委員　（主査）
教 授　井川　満

（副査）
教 授　長瀬　道弘　　教 授　鈴木　貴

論 文 内 容 の 要 旨

次のような発散項を持つ半線型熱方程式の Cauchy 問題の解の漸近的挙動を考える。

$$(\mathrm{H})\quad \begin{cases} u_t = \Delta u + u^p & \text{in} \quad \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^+, \\ u(x,0) = u_0 \geq 0 & \text{in} \quad \mathbf{R}^N. \end{cases}$$

非線形項の指数が $1 < p \leq 1 + 2/N$ の場合，任意の初期値 u_0 に対し，(H) の解 $u(t;u_0)$ は有限時間で爆発する，すなわち $t_{\max}(u_0) := \sup\{T \in R^+; u(t;u_0) \in L^\infty((0,T);L^\infty)\} < \infty$ であることはよく知られている。本論文の目的は $1 + 2/N < p$ かつ $(N-2)p < N+2$ の仮定のもとで (H) の非負解空間の構造を決定することである。初期値 u_0 が十分に小さいとき (H) の解 $u(t;u_0)$ は線形熱方程式 $v_t = \Delta v$ の解のように振る舞い，u_0 が十分に大きいとき $u(t;u_0)$ は有限時間で爆発することはすでに知られている。方程式 (H) は相似変換 $u(x,t) \mapsto \lambda^{2/(p-1)} u(\lambda x, \lambda^2 t)$ $(\lambda > 0)$ に関して不変であるが，このような特徴を反映して (H) はこの変換に対して不変な Haraux－Weissler の自己相似解を持つ。O. Kavian は1987年に $u_0 \in L^2_\rho := \{f \in L^2; \int_{R^N} |f|^2 \exp(|x|^2/4) < \infty\}$ かつ $t_{\max}(u_0) = \infty$ なるとき $u(t;u_0)$ は $t \to \infty$ において Haraux－Weissler の自己相似解に漸近していくか，または $u(t;u_0)$ の L^∞ －norm が Haraux－Weissler 自己相似解のそれより速く減衰することを明らかにした。

本論文では O. Kavian の研究を発展させ，(H) の非負解の挙動を分類するとともに非負解空間の位相的構造を明らかにした。本論文の主結果の要約は以下のようである。非負解空間を $X := \{f \in L^2_\rho \cap L^\infty; f \geq 0 \quad \text{in} \quad \mathbf{R}^N\}$ と設定し，$K := \{u_0 \in X; t_{\max}(u_0) = \infty\}$ とおく。さらに，X における K の内点を $\mathrm{Int}(K)$，境界を ∂K と表す。このとき次が成立する。

(i)　集合 K は X において非有界な閉凸集合であり，$0 \in \mathrm{Int}(K)$ が成立する。

(ii)　任意の $u_0 \in X - \{0\}$ に対し，一意的な $\tau_0 \in \mathbf{R}^+$ が存在して次が成立する。

$$(*)\quad \begin{cases} \tau_0 u_0 \in \partial K, \\ \tau u_0 \in \mathrm{Int}(K) & \text{if} \quad \tau \in (0, \tau_0), \\ \tau u_0 \in X - K & \text{if} \quad \tau \in (\tau_0, \infty). \end{cases}$$

さらに，原点Oを中心とする X の単位球 $G := \{u_0 \in X; \|u_0\| = 1\}$ と ∂K は $P|_G$ によって位相同型である。ここで $P: X - \{0\} \to \partial K$ は $(*)$ で定義される $Pu_0 = \tau_0 u_0$ なる射影である。

(iii)　任意の $u_0 \in \mathrm{Int}(K) - \{0\}$ に対し $t \to \infty$ のとき $u(t;u_0)$ は $m_\infty G(t)$ に漸近する。ここで $G(x,t) := (4\pi t)^{-N/2}$

$\exp(-|x|^2/4t)$ は線形熱方程式の基本解であり，$m_\infty = \sup_{t\geq 0} \int_{R^N} u(t) \in R^+$ である。

(iv) 任意の $u_0 \in \partial K$ に対し，$t \to \infty$ のとき $u(t;u_0)$ は Haraux－Weissler の自己相似解に漸近する。

論文審査の結果の要旨

非線形熱方程式の解の挙動は，非線形指数がある数（＞1）より大きければ，小さな初期値の解は時間大域的に存在する。一方，指数がその数より小さく1より大であれば，零でない初期値の解は全て有限時間で爆発する。

本論文は，非線形指数がまさにその数である時，精密な解析により解の挙動を完全に分類した。この分類は，知られていなかった新しい挙動を見つけ出したことにより完成したもので，極めて興味深いものである。本論文は注目すべき結果と独創性を豊に含み，博士（理学）の学位論文として十分価値あるものと認める。