# パスカルの数学論文についてのノート (1)

## A.D.D.S.への手紙およびホイゲンスへの手紙をめぐつて．運動学的な観点から．

原　亨吉

パスカルの数学上の業績に関して，今後しばらく，自由な態度でノートのようなものを書いてみたいと私は思っている．たぶんこの場所を借りることになるであろう．とりあげる作品の順序も不同であって，今回まず対象に選んだのは，この人の数学論文としては最も後期に属する上記の2篇，すなわち，*Lettre de A. Dettonville à Monsieur A .D.D.S.*(1)(10 décembre 1658)，および *Lettre de A.Dettonville à Monsieur Hugguens de Zulichem* (février 1659) である．どちらも，有名なルーレットについての懸賞に関連して執筆され，単行本 *Lettres de A.Dettonville contenant Quelques-unes de ses Inventions de Geometrie* (Desprez, 1969) 中に収められたものであって，前者は，いわゆるアルキメデスのスパイラルが或る放物線と等長であることを証明し，後者は，ルーレット(2)が或る楕円と等長であることを結論している．すなわち，両者ともに2種の曲線の間の等長性を論ずるのである．

ところで，今回私がとくにこれらの2論文をとりあげたのは，ロベルヴァルの名にちなむ運動学的な考え方がここで問題となり得ると考えたためであって，以下のノートは，原則として，この観点からのものである．したがって，第1の論文は「古代人の方法」la manière des anciens により，第2の論文は「不可分量」les indivisibles の理論によっているという点は，むろん重要なことではあるが，いまの私にとってはまったく問題のそとにある．

パスカルと関係の深かったロベルヴァルは，幾何学を運動の観点から考察し，それによって曲線の接線の新しい求め方を発見した人として知られて

いるし，また，同じ観点から曲線の長さをも求めたことが伝えられている．いわゆる運動学的幾何学と言ってよい．しかし，ロベルヴァル自身の論著は私にとってことごとく未見であるばかりか，おそらくは稀覯に属するのであろうから，はたしていつこれに接し得ることか．それゆえ，私の企ては考証的なものではあり得ないが，もともとそうあることを私は望んでもいない．いま私が試みようとするのは，当時の知識のワク内において，運動学的な観点からはこのように考え得るであろうという，いくつかの可能性をさぐることなのである．もしも大げさな言葉が許されるならば，なかば歴史的，なかば理論的な試みと言おうか．したがって，このノートはつぎの二つの制約を受けている．まず，(1) 私の議論はかならずしも，ロベルヴァルが実際そのように考えたということを意味しない．第1の手紙に関して記すことについては，彼自身もおそらく同様に考えたのであろうと思うけれども，第2の手紙に関する部分では，これはなんとも言えないのである．しかし他方，(2) 私は議論を立てるにあたって，後代の知識を前提してはならない．記号その他の表現法に関しては，私は現代のものを用いるであろうが，それはたんに便宜のためであって，その実質は当時の知識に属していなくてはならないのである．

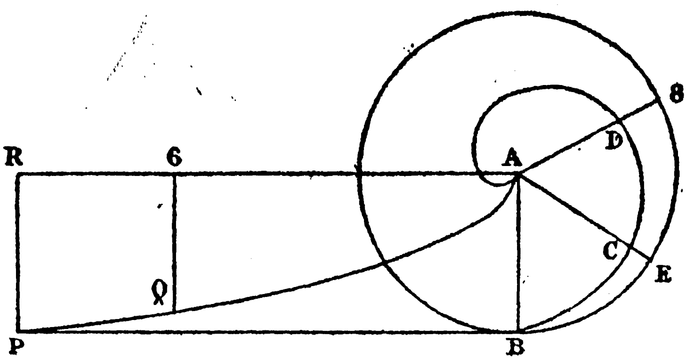
ロベルヴァルは，一般に曲線を点の運動の軌道と見なした上で，接線の求め方についてつぎのように言う．「与えられた曲線の特性によって，それを描く点が接線をひこうとする位置において有するさまざまな運動を調べよ．それらすべての運動をただ一つの運動に合成し，合成された運動の方向線 ligne de direction をひけば，その曲線の接線が得られる[(3)]」と．この方法は数学史上に有名である．これに反して，同じ人による曲線の求長法は一般に閑却されているのではあるまいか．しかし，このことについてはパスカル自身に明瞭な証言がある．すなわち，彼がルーレットに関する懸賞問題の提出にあたって執筆した文書『ルーレットの歴史』*Histore de la Roulette* 中には，ロベルヴァルが同じ運動の合成によって曲線の長さをも求めたことがかなり詳しく語られており，かつ，その方法の説明として，「合成された運動の方向が接線を与えると同様に，その速さは曲線の長さを与える[(4)]」と記されているである．この言葉を根拠として，——私にとって唯一の資料である

が，また，これだけでじゅうぶんだ——以下に私は A. D. D. S. およびホイゲンスへの手紙を，この順序にながめよう．そして，まず第1の手紙に関して，この方法のいわば「小手しらべ」をした上で，第2の手紙に関しては，この方法——というよりむしろ着眼——から出発して，パスカルの結論にたいするいくつかの別証を試みたい．というのは，この方法は，実はたんに出発点を与えるだけであって，個々の問題の解決にあたっては，そのたびに個別的なくふうを要すると思われるからである．

まず A. D. D. S. への手紙について．

その冒頭に記され，また，すでに『ルーレットの歴史』のうちにも記されていたところによれば，ロベルヴァルは，上記の運動学的な方法によって，スパイラルと放物線との等長性を示していた．ただパスカルは，この方法が一般の人々にたいしてはなお説得力に欠けることを恐れ，当時最も厳密なものと考えられた「古代人の方法」によって同じ命題を確証しようとした．それがこの美しい論文であり，また，ここに比較されたのは，ともにアルキメデスの深い研究によって知られる通常のスパイラル（$r=a\theta$）と通常の放物線（$y^2=4fx$）なのであるが，さて，この論文に接したフェルマは，問題を「あらゆる種類の」スパイラルと「あらゆる種類の」放物線とに拡張した．この一般化は，1659 年中におけるカルカヴィへの一書簡にも記されているが，[5]最も完全な形においてこれが述べられた（証明なしに）のは，*Ad Laloveram Propositiones* と題する小論文においてである[6]．すなわち，

図 1 Fig. 119.[7]



$m$, $n$ を任意の自然数とするとき，円A内の任意の点Cについて，

$$\frac{\mathrm{AB}^m}{\mathrm{AC}^m}=\frac{\text{円周}}{\text{円弧}}\ \frac{\mathrm{BE8B}^n}{\mathrm{E8B}^n}\quad \text{〔すなわち，}k\text{を常数として，}r^m=k\theta^n\text{〕} \tag{1}$$

なるスパイラル ACB の長さは，

$$\frac{\mathrm{RP}^{m+n}}{6\,\mathrm{Q}^{m+n}}=\frac{\mathrm{AR}^{\,n}}{\mathrm{A6}^{\,n}}\qquad \text{〔}y^{m+n}=k'x^n\text{〕} \tag{2}$$

なる放物線 AQP の長さに等しい．ただし，RP＝AB，また $\mathrm{AR}=\frac{m}{m+n}\times$ BE8B とするのである．

そしてフェルマは，上記のカルカヴィへの手紙において，このような一般化には「おそらくデトンヴィル氏〔パスカル〕もド・チュリヘム氏〔ホイゲンス〕もいまだ思い及ばなかったでしょう」と，自信のほどを見せているのである．

けれども，これは彼が実情にくらかったためであって，ロベルヴァル自身すでに命題の一般化の可能性を認めていたようであるし，だとすればまた，おそらくはパスカルもこれを知っていたであろう．[8]では，ロベルヴァルはどのようにしてこの一般化を達成したであろうかと考えるに，はじめに記したとおり，私はこの人自身の手になる資料をなんらもたないのではあるが，そこに用いられた方法は，たんに上述の運動学的なものばかりではあり得まい．しかし，ここにフェルマによる接線の求め方を援用するとき，――ロベルヴァルはこの方法をよく知っていた――上述の一般化が困難でないことは確かである．

ロベルヴァルによる通常の放物線の接線の求め方は，彼の運動学的な方法の適用例としてしばしば引用されるものであり，実際，ここにおける成功はいちじるしい．[9]しかし，高次の放物線，まして任意の次数の放物線についてはどうか．ここに早くもこの方法の限界があらわれる．すなわち，この方法の有力さはたんに限られた場合のものと考えねばならない．これに反し，フェルマの方法は汎通的であった．

フェルマによる接線の求め方は，彼の有名な極大・極小の理論の基本的応用の一つであって，歴史的意義の深いものであるから，ついでながら紹介し

ておこう．

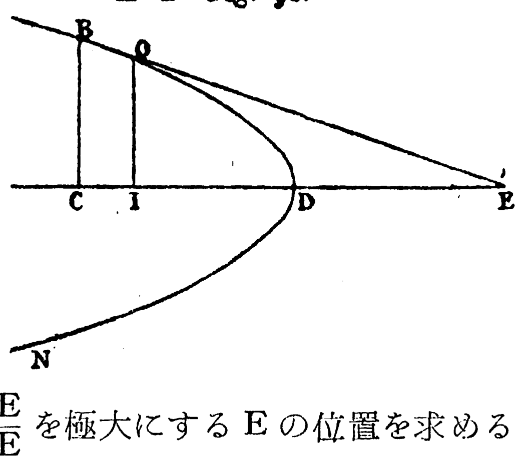
彼によれば，極大・極小を決定する「唯一の規則」はつぎのとおりである．「問題中の任意の1未知量を $a$ とせよ（それは問題に応じて，1，2，3次元などをもつ）．任意の次数の項を用いて，極大量または極小量を $a$ によってあらわす．つぎに，最初の未知量 $a$ のかわりに $a+e$ を置き，これによって，極大量または極小量を，任意の次数における $a$ および $e$ を含む諸項によってあらわす．極大量または極小量のこれら二つの表現を，ディオパントスの言葉を借りれば adégaler (adaequare) し，[10]両辺から共通項を消去する．そうすると，両辺を通じて，すべての項が $e$ またはその或る巾を含むことになる．すべての項を $e$，または $e$ のそれより高次の或る巾で除し，いずれか1辺の少くとも1項〔中の $e$〕が完全に消えるようにする．つぎに，なお $e$ またはその或る巾を含んでいるすべての項を消し，〔両辺における〕他のものを等置する．1辺に何も残らないときは，けっきょく同じことであるが，プラスの項をマイナスの項と等置する．この最後の方程式を解いて $a$ の値を求めれば，これが，その最初の表現を回復するとき，極大または極小に導く．[11]」

この方法によって，通常の放物線の接線を求めよう．[12]点 B における接線が求められたと仮定し，その上に任意の点 O をとれば，O は放物線の外部にあるから，$\dfrac{\mathrm{CD}}{\mathrm{DI}}>\dfrac{\mathrm{BC}^2}{\mathrm{OI}^2}$．しかるに，

$\dfrac{\mathrm{BC}^2}{\mathrm{OI}^2}=\dfrac{\mathrm{CE}^2}{\mathrm{IE}^2}$ であるから，

$\dfrac{\mathrm{CD}}{\mathrm{DI}}>\dfrac{\mathrm{CE}^2}{\mathrm{IE}^2}$ となり，OがBに一致するときに限って両辺が等しい．よって，$\dfrac{\mathrm{CE}}{\mathrm{IE}}$ を極大にする E の位置を求めることによって，接線影が見いだされるであろう．[13] $\mathrm{CD}=d$, $\mathrm{CE}=a$, $\mathrm{CI}=e$ と置けば，$\dfrac{d}{d-e}>\dfrac{a^2}{(a-e)^2}$．すなわち，

図 2 **Fig. 92.**




$$da^2+de^2-2dae>da^2-a^2e$$

上述の規則は，この両辺を adégaler することを命ずる．このとき，『フェルマ全集』の編集者にならって記号 $\backsim$ を用いるならば，

$$da^2+de^2-2dae \backsim da^2-a^2e$$

共通項を消去して，

$$de^2-2dae \backsim -a^2e$$

すべての項を$e$で除して，

$$de-2da \backsim -a^2$$

$e$ を含む項 $de$ を消し，かつ，このとき等号が回復されて，

$$-2da=-a^2. \qquad a=2d$$

すなわち，CE＝2CD が得られた．

一見奇異なこの方法も，注意して見れば，実質的には導函数の使用と同じであることが認められるであろう．操作的には，と言い直すべきかもしれない．なぜならば，理論的見地からは，微分法は変数や極限の概念を前提せねばならないが，フェルマは「函数と極限概念とによるよりは，むしろ等式と無限小とによって考えていた」[14]からである．

が，それはとにかく，この方法は汎通的であって，前記(1)の放物線においては，$CE=\dfrac{m+n}{n}\times CD$ となることが容易に知られるであろう．しかるに，図1において，任意の点Cに関して AC＝6Q，すなわち $r=y$ とすれば，(1)から $r^{m+n}=k(r\theta)^n$ であから，(2) と比較して $k(r\theta)^n=k'x^n$，すなわち $x=k''r\theta$．しかるに，作図によって $k''=\dfrac{m}{m+n}$ であるから，

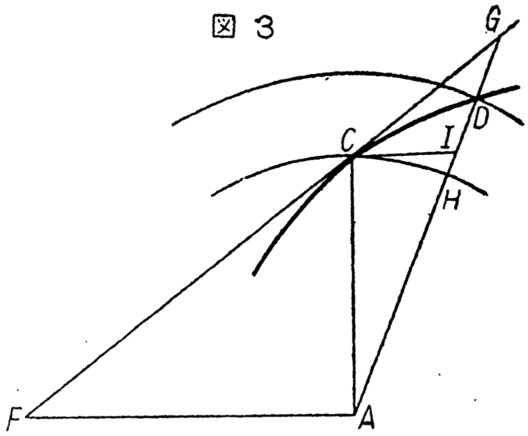
$$\text{Q における放物線の接線影} = \frac{m+n}{n}\times\frac{m}{m+n}\times r\theta=\frac{m}{n}\times r\theta \qquad (3)$$

となる．

ではスパイル(1)の接線はどうか．上にならってこれを求めてみれば以下のようになるであろうが，ここに注意すべきはつぎの点である．上の例においては曲線の性質は直線のみを用いてあらわされたが，（フェルマはこれを第1の場合と呼ぶ），ここでは曲線（円弧）の微小部分が介入する（第2の場合）ことであり，「これにたいしては，すでに見いだされている接線中の対応する長さをもって置きかえてよい」とフェルマは言うのである．[15]

図3のごとく，Aを始点とするスパイラル(2)にたいし，点Cにおいて接線がひかれたとして，Aにおいて動径ACにたてた垂線との交点をFとする．接線上にC以外の点Gをとり，AGとスパイラルとの交点をD，Aを中心としてCを通る円周との交点をH，Cにおけるこの円の接線との交点をIとすれば，明らかに，

図 3




$$\frac{AC^m}{AD^m}=\frac{\text{C に終わる円弧}^n}{\text{H に終わる円弧}^n}$$ であるが，

このときGがじゅうぶんCに近ければ，微小円弧CHは上述のようにCIと同一視され，またAHはAIと同一視され得る.[16] したがって，

$\dfrac{AC}{AG}=\dfrac{AH}{AG}\fallingdotseq\dfrac{AI}{AG}=\dfrac{AF-CI}{AF}$，かつ $\dfrac{AC}{AG}<\dfrac{AC}{AD}$ であることから，

$$\frac{(AF-CI)^m}{AF^m}<\frac{AC^m}{AD^m}=\frac{\text{C に終わる円弧}^n}{\text{H に終わる円弧}^n}$$

$AF=a$，Cに終わる円弧$=b$，$\overset{\frown}{CH}\fallingdotseq CI=e$ と置いて，

$$\frac{(a-e)^m}{a^m}\backsim\frac{b^n}{(b+e)^n}$$

$$(a^m-ma^{m-1}e+\cdots)(b^n+nb^{n-1}e+\cdots)\backsim a^m b^n$$

これを前述の規則にしたがって処理すれば，けっきょく，

$$ma^{m-1}b^n=na^m b^{n-1}\text{，すなわち } a=\frac{m}{n}b \qquad (4)$$

よって，これを(3)と比較して，AFはQにおける放物線の接線影に等しい．

しかるに，図1において AC ＝ 6Q なのであるから，放物線とスパイラルとに関して作ったこれら二つの直角三角形は合同となり，したがって，スパイラルの接線が接点に終わる動径となす角は，対応する点における放物線の接線がその点を通る縦線となす角に常に等しい．したがってまた，この角を変えないで，放物線のすべての縦線の足R，6などを頂点Aに集めるならば，放物線AQP はスパイラル ACB となるわけであり，当然，両者は等長である．

それにしても，いま行なったスパイラルの接線の求め方は，かならずしも簡単でない上，無限小の取り扱いにおいて，なお厳密性を欠いていることは言うまでもない．しかし，ここでロベルヴァル的な観点に移るならば，こうした論理的不備の上をいわば飛びこえ，一挙に目的を達することができるであろう．なぜならば，スパイラルは1点の回転運動と直進運動との合成によって生成されると考えるとき，これら両運動の方向は常にたがいに垂直であるから，その動径を放物線の縦線に対応させ，他方，一定の円周において動径との交点に終わる弧を横線に対応させるならば，成分運動間の関係においては，スパイラル(1)は $y^m=k'''x^n$ なる放物線とまったく同じである．したがって，放物線における接線影と横線との関係を前提すれば，直ちに(4)が結論されるわけである．

さらに，曲線の長さについてはつぎのように考えられることも，すでに明らかであろう．上に作った各三角形において，直角をはさむ2辺の長さは，それぞれ放物線およびスパイラルを描く点が，その成分運動のおのおのにおいて，同じ微小時間内に描く軌道の長さに比例し，したがって，その斜辺は，同じ微小時間内に描かれる各曲線の微小部分の長さに比例すると考えられる．パスカルとともに，「動点の速さ」と言ってもよい．しかも，スパイラルの動径の方向における動点の運動の速さと，放物線の縦線の方向におけるそれとは，常に相等しいとしてよい．ゆえに，両三角形の合同から，スパイラル上の動点と放物線上の動点とは常に相等しい速さをもって運動することが結論され，同一時間内に描かれる両曲線の長さは，当然，相等しい．

このような考え方は，すでに述べたように，この場合かならずしも必要でないにもかかわらず，ここにこれを記したのは，第2の手紙を考えるための準備としてである．上のようにとった三角形を実際に微小化して，上述の比例関係を相等関係に移そう．このとき，接線によって作られる辺は，接線の微小部分であるとともに，曲線の微小弧（線素）とも，さらに微小弦とも同一視され得るものであることは，当時としては直観的に認められたものと考えてさしつかえないであろう．

ホイゲンスへの手紙に移ろう．

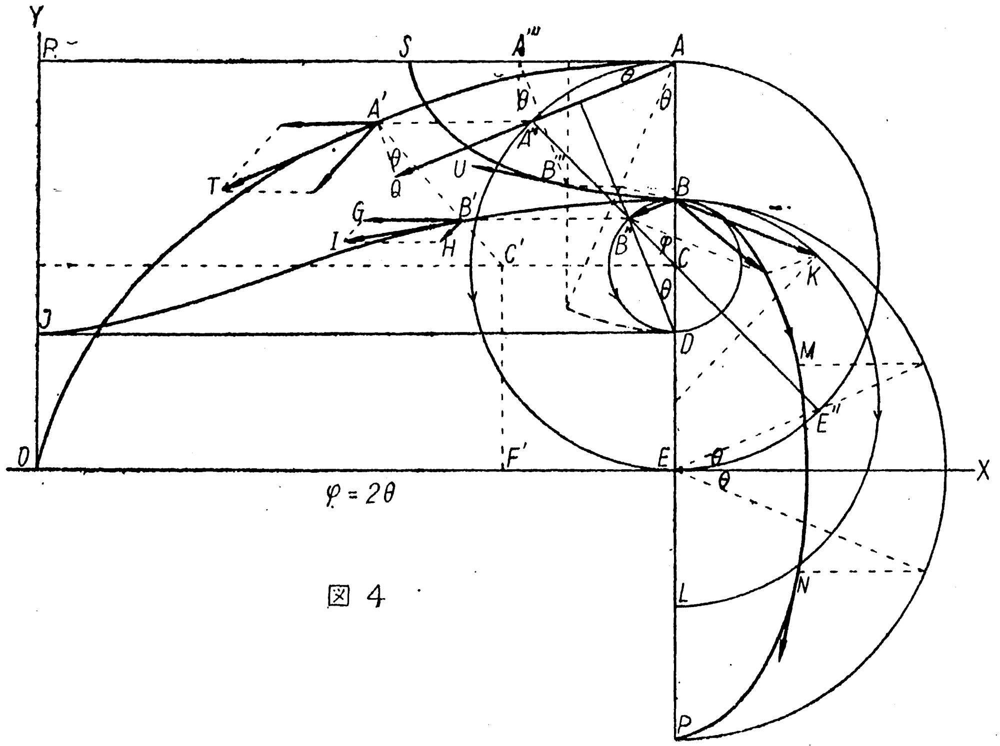



図 4

パスカルが提出した懸賞問題はすべて単純なルーレットに関するものであったが，この手紙において彼はルーレットの定義を拡張し，「あらゆる種類の」それの長さを求めた．ルーレットは，極の位置を任意とすることによって一般化される．図4において，母円 AA"EE"A の周上の点Aは単純なルーレット roulette simple AA'O を描くが，母円内の点Bが描く曲線 BB'J もまたルーレットである．ただし，パスカル自身はこのような定義法をとらず，はじめの母円と同心であってBを通る円 BB"DB を母円と考え，また，はじめの底と平行な直線 DJ を底と考える．このとき，母円の周上の任意の点B" について $B''B' : \widehat{BB''} = CA : CB$ であって，この比の値が1より大であるところから，曲線 BB'J は延長されたルーレット roulette alongée と呼ばれる．これに反し，極がはじめの母円の外部にあるときは，短縮されたルーレット roulette accourcie が得られる．以下の所論はすべてこれにもあてはまるものである．パスカルの習慣に従って，母円は図に示した方向に回転するものと考え，$CA=a$, $CB=b$ と置こう．パスカルの結論は，半ルーレット BB'J の長さは，両軸が $2(a+b)$, $2(a\sim b)$ に等しい楕円の周の ¼ に等しく，「部分は部分に」等しい，というのである．[17] そ

して，いま私が試みようとするのは，上に準備した観点から，この命題にたいする別証を行なうことである．

今日行なわれるような積分による解答は，いまは問題外にある上，容易でもあるから，ことさら記すまでもないのであるが，ただそこには，パスカルの解法とも，また私が試みるものとも比較したい点もあるので，いちおう記しておこう．比較を便にするためには，パスカルの習慣からは離れるけれども，今日ふつうに行なわれるように，母円は図とは反対の方向に回転するものとし，直交座標軸X－O－Yを図の位置にとるがよい．このとき，ルーレットBB'Jの方程式は，母円の回転角DCB"の大きさ$\varphi'$を助変数として，

$$x=a\varphi'-b\sin\varphi',\quad y=a-b\cos\varphi'$$

であるから，半ルーレットの長さ$s_r$は，

$$s_r=\int_0^{\pi}\sqrt{(x')^2+(y')^2}\,d\varphi'=\int_0^{\pi}\sqrt{(a-b\cos\varphi')^2+(b\sin\varphi')^2}\,d\varphi'$$

$$=\int_0^{\pi}\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\varphi'}\,d\varphi' \qquad (5)$$

他方，上記の楕円の方程式は，離心角$\theta'$を助変数として，

$$x=2(a+b)\cos\theta',\quad y=2(a\sim b)\sin\theta'$$

であるから，第1象限内におけるその弧長$s_e$は，

$$s_e=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\{-2(a+b)\sin\theta'\}^2+\{2(a\sim b)\cos\theta'\}^2}\,d\theta' \qquad (6)$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sqrt{a^2+b^2+2ab(\sin^2\theta'-\cos^2\theta')}\,d\theta'$$

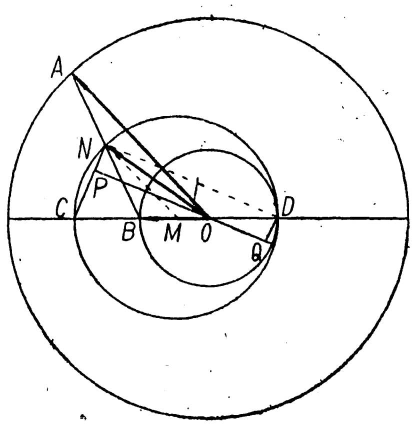
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos2\theta'}\,d\theta'$$

よって，$\triangle\varphi'=2\triangle\theta'$にとっておけば，$s_r=s_e$である．[18]

さて本題に帰り，さきに準備したロベルヴァル的な観点にたってみよう．フェルマは前出の論文 ***Methodus ad disquirendam maximam et miniman*** において単純なルーレットの接線をも求めているが（第2の場合），その操作は煩雑をまぬがれない[19]．これに反し，ロベルヴァルの方法によれば一般ルーレットの接線が難なく求められることは，すでに明らかであろう．すなわち，B' における動点の運動は $\overrightarrow{B'G}$ および $\overrightarrow{B'H}$ を描く二つの運動に分解され，B'G は底に平行，B'H は B" における母円の接線に平行，そして B'G：B'H＝$a:b$ である．したがって，∠GB'H＝∠BCB"（＝$\varphi$）であり，また，B'H を母円の微小な回転角$\triangle\varphi$に対応する微小円弧 $b\cdot\triangle\varphi$ に等しくとれば，B'G＝$a\cdot\triangle\varphi$ となり，このとき，平行四辺形の対角線 B'I はルーレット BB'J の線素を与える．

すべての B'I の和を求めるため，$\triangle\varphi$ は∠ACEの $n$ 等分によるものとした上で，図5を作図しよう．OA＝$2a\cdot\triangle\varphi$，OB＝$2b\cdot\triangle\varphi$，∠AOB＝図4の∠BCB"＝$r\cdot\triangle\varphi$ とすれば，中線ONは B'I に等しく，BO を固定して，$r$ を 0，1，2，……$n$ と変化させるとき，Nは常に，OB の中点Mを中心として半径が $a\cdot\triangle\varphi$ に等しい円周の上にあり，この円周と OB の延長との交点C，D においては，

図5




OC＝$(a+b)\triangle\varphi$，OD＝$(a\sim b)\triangle\varphi$ となる．いま，OからCNにくだした垂線の足をP，またDからPOの延長にくだした垂線の足をQとすれば，∠COP＝½∠AOB＝$\frac{r}{2}\triangle\varphi$となり，$\frac{\triangle\varphi}{2}=\triangle\theta$と置けば，

$$OP=2(a+b)\triangle\theta\cdot\cos(r\cdot\triangle\theta)$$
$$NP=DQ=2(a\sim b)\triangle\theta\cdot\sin(r\cdot\triangle\theta) \qquad (7)$$

他方において，両軸が $2(a+b)$，$2(a\sim b)$ に等しい楕円を図6のように作れば，上の2成分をもつ ONの長さは，離心角が$\frac{\pi}{2}-(r+1)\triangle\theta$，$\frac{\pi}{2}-r\cdot\triangle\theta$ なる2点 $R_{n-r-1}$，$R_{n-r}$の間の弧長に等しいことが知られる．なぜならば，この微小弧を直線と見なし（$n\to\infty$），また微小円弧 $P_{n-r-1}P_{n-r}$，$Q_{n-r-1}Q_{n-r}$ をも直線と見なすとともに，それぞれを $P_{n-r}$，$Q_{n-r}$ に

おける円 O の接線と考えるとき，$R_{n-r-1}R_{n-r}$ の X 軸，Y 軸上への正射影は，式(7)における OP，NP に等しいからであるが，また，つぎのように考えるのも一興であろう．すなわち，Y 軸に関する $P_r$, $R_r$ の対称点をそれぞれ $P'_r$, $R'_r$ とするとき，上と同じ条件のもとに，$P'_{n-r-1}P'_{n-r}$ は $OP_r$ に平行，かつ $OP_r \cdot \triangle\theta$ に等しいところから，$R_{n-r-1}R_{n-r} = R'_{n-r-1}R'_{n-r} = OR_r \cdot \triangle\theta$．しかるに，(7)における OP，NP は $R_r$ の X 坐標，Y 坐標に $\triangle\theta$ を乗じたものにほかならないから，ON (図 5) もまた $OR_r$ に $\triangle\theta$ を乗じたものにほかならない．[20]

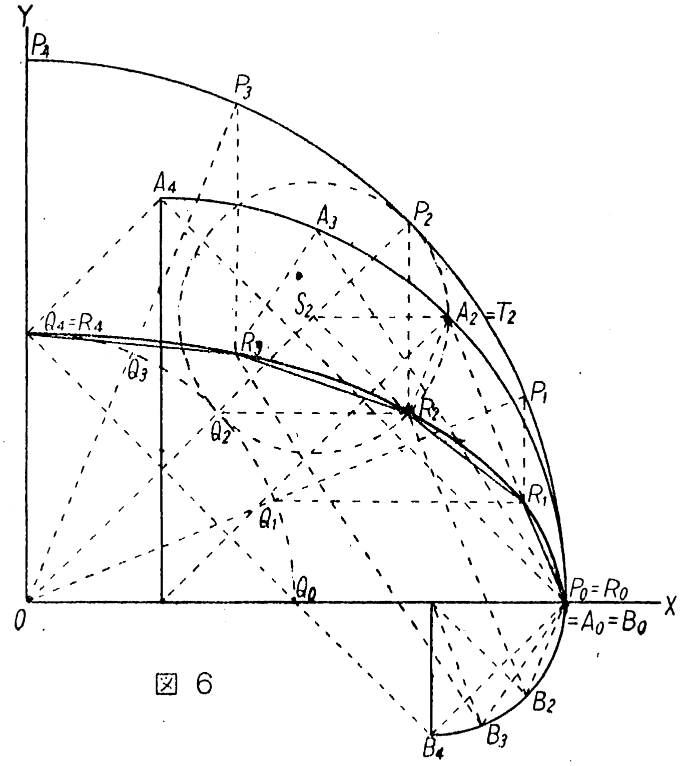


図 6

けれども，以上の証明法はいくらか「解析的」である．しかし，ロベルヴァルの方法の特徴は「直観的」な点にあると思われる．そこにこの方法の長所もあれば短所もあるが，ともかくも，それが特徴であるとすれば，私もまた，もうすこし解析的でない証明法をさがしたい．このとき，つぎのものはどうであろうか．

対角線として線素を与える平行四辺形（図 4 における B'GIH を微小化したもの）において，運動の成分を示す 2 辺の夾角は $\triangle\varphi$ ずつ増大するのであるから，運動の方向を無視し，その大きさだけを考えるとき，この両辺をつぎのように定位することができる．すなわさ，逆に夾角が最大なものから始めて，夾角を両側から $\frac{\triangle\varphi}{2} = \triangle\theta$ ずつ減小させてゆく．そうすると，これらの 2 辺は，半径がそれぞれ $2a$ および $2b$ に等しい円において，$\triangle\theta$ なる大きさの中心角をもつ順次に相隣る弦と見ることができ，けっきょく，動点

Bは，その成分としての両運動において，これらの円周上を，母円の角速度の$1/2$の大きさをもって反対方向に回転すると考えられる．したがって，母円が$\pi$だけ回転するときは，図6における二つの四分円$A_0 \cdots A_n$，$B_0 \cdots B_n$が描かれることになる．そして，これらの両運動を合成したものの軌道はすなわち，さきに作図した楕円の弧$R_0 \cdots R_n$にほかならない．このことは，平行四辺形による変位の合成から容易に知られるのであり，また，母円の回転角の大きさが一般に$\varphi$の場合には，これらの四分円において，中心角がOXから測って$\left[\frac{\pi}{2}-\theta, \frac{\pi}{2}\right]$なる部分があらわれるから，楕円においても，同じ離心角をもつ部分が得られるのである．ただし，二つの回転運動による楕円の生成については，つぎのように考えるほうがさらに「直観的」であるかもしれない．すなわち，$P_r Q_r$を直径とする円を描いてみると，$R_r$はその周上にあり，OXに平行な半径$S_r T_r$をひけば，$\angle T_r S_r R_r = \angle P_0 O P_r$．ゆえに，円$S_r$が，一方において，その中心$S_r$がOSを半径としてOのまわりに回転するように並進し，[21]他方において，$S_r$のまわりに，この回転と反対の方向に同じ角度だけ回転するならば，その周上にあってはじめ$P_0$と一致していた点Rは，図の楕円を描くことが知られる．そして，第一の並進運動によっては，点Rも中心$S_r$と同じくOを中心としOSを半径とする円を描くが，ここに$OS=2a$，$ST=2b$であるから，これで目的が達せられた．

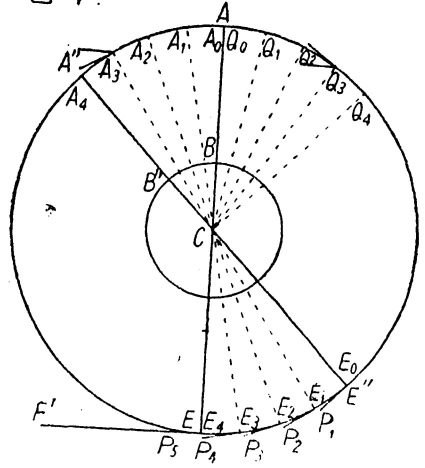
しかし，この方法によってはルーレットと楕円との間における方向の関係までは，まだ明らかでない．それを知り得るように改めることはできるけれども，いまはそこまで述べる煩を避けて，先へ進もう．方向の問題もそのとき同時に答えられるであろう．

以上のように母円の2倍の円を用いるのでなく，たんに母円のみによることはできないであろうか．それは可能であるが，それにはすこし技巧を要するようである．

母円の弧AA"を，図7のように，点$A_r$によって$2n$等分し（$A_0=A$，$A_{2n}=A$"），$A_r$の中心Cに関する対称点を$E_{2n-r}$，半径CAに関する対称点を$Q_r$とした上，$E_r$において$\widehat{AA''}$の$\frac{1}{2n}$に等しい母円の接線$E_r P_{r+1}$を図の方向にひく．以下においても，しばらくは運動の大きさのみを考えるのであ

るが．言葉を節するため，例えばAから A” に向かって $\overset{\frown}{\mathrm{AA''}}$ を描く運動を運動 $\overset{\frown}{\mathrm{AA''}}$ と略記し，かつ符号＋をもって運動の合成を示したい．そして，運動の大きさを示すには符号 | | を用いよう．まず，(1)運動 $\overset{\frown}{\mathrm{A_0A_1}}$ と運動 $\mathrm{E_1P_2}$ とをとれば，これらを合成したものは，母円の本来の運動においては，$\triangle\theta$ $(=\frac{1}{2n}\angle\mathrm{ACA''})$ だけの回転による点 $\mathrm{Q}_{2n-1}$ の運動と大きさが等しく，かつ，$\mathrm{Q}_{2n-1}$ のこの運動は，ロベルヴァルの方法によって直ちに知られるように，$\mathrm{A}_{2n-1}$ の運動と大きさが等しい．すなわち，$|$ 運動 $\overset{\frown}{\mathrm{A_0A_1}}$ ＋運動 $\mathrm{E_1\ P_2}$ $|$ ＝ $|$ $\mathrm{Q}_{2n-1}$ の運動 $|$．同様に，$|$ 運動 $\overset{\frown}{\mathrm{A_1A_2}}$＋運動 $\mathrm{E_2P_3}$ $|$ ＝ $\mathrm{Q}_{2n-3}$ の運動 $|$．以下同様にして，運動 $\overset{\frown}{\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{A}_n}$ および運動 $\mathrm{E}_n\mathrm{P}_{n+1}$ まで順次に進むとき，$\mathrm{A}_r$ のうち添数が奇数であるすべての点の運動の大きさが得られる．つぎに(2) $|$ 運動 $\overset{\frown}{\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}}$ ＋運動 $\mathrm{E}_n\mathrm{P}_{n+1}$ $|$ ＝ $|$ $\mathrm{A_0}$ の運動 $|$．$|$ 運動 $\overset{\frown}{\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{A}_{n+2}}$ ＋運動 $\mathrm{E}_{n+1}\ \mathrm{P}_{n+2}$ $|$ ＝ $|$ $\mathrm{A_2}$ の運動 $|$．以下同様にして，運動 $\overset{\frown}{\mathrm{A}_{2n-1}\mathrm{A}_{2n}}$ および運動 $\mathrm{E}_{2n-1}\mathrm{P}_{2n}$ まで順次に進むとき，$r$ が偶数であるすべての点 $\mathrm{A}_r$（$\mathrm{A}_{2n}$ のみを除く）の運動の大きさが得られる．そして，以上すべての運動が順次に行なわれ，かつ $n\to\infty$ のとき，$\mathrm{E_0P_1}$ の欠如および $\mathrm{E}_n\mathrm{P}_{n+1}$ の重複は無視されて，左辺は $|$ 運動 $\overset{\frown}{\mathrm{AA''}}$＋運動 $\overset{\frown}{\mathrm{E''E}}$ $|$ となるが，これは明らかに弦 AA” を2倍に延長した AQ（図4）に等しく，そして，右辺は単純ルーレットの弧 AA’ の長さにほかならない．すなわち，有名なレンの命題が得られた．[22]

図 7




以上のことは，けっきょく，母円の回転運動 $\overset{\frown}{\mathrm{AA''}}$ をそのままとして，並進運動 EF’ を運動 $\overset{\frown}{\mathrm{E''E}}$ に置きかえ得ることを示している．したがって，点Bは，回転によっては運動 $\overset{\frown}{\mathrm{BB''}}$ を行なうが，並進によってはやはり運動 $\overset{\frown}{\mathrm{E''E}}$ を行なわねばならない．そして，両者の合成は，母円が $\pi$ だけ回転した場合には，図4における楕円 BMNP，すなわち，両軸が $a+b$，$a\sim b$ に等しい半楕円を与えることは，もはや言うまでもないであろうし，また，母円

の回転角の大きさが一般に $\varphi$ の場合には，離心角が〔$\frac{\pi}{2}-\theta, \frac{\pi}{2}+\theta$〕なる部分 MN が得られるが，このとき長軸は BB" の方向にあることも明らかである．ところで，運動 EF' が運動 $\widehat{\mathrm{E''E}}$ に置きかえられたのは，運動の方向を無視した結果であったけれども，終点Eにおいて考えるかぎり，運動 $\widehat{\mathrm{E''E}}$ の方向は運動 EF' の方向と変わらない．したがって，点Nにおける楕円の接線は，長軸を BB" の方向に移すとき，B' におけるルーレットの接線 B'I と平行である．

なお一つの補足的な観察をもってこのノートを終えよう．A' における単純ルーレットの接線 A'T が AA" に平行であることは，いま見た関係の特殊の場合にほかならないが，これはまた既述のロベルヴァルの方法によって容易に知られることでもある．[23] そこで，単純ルーレットにおけるこの平行関係と前出のレンの命題とが，知りやすいものとしてはじめに知られたと仮定しよう．そうすると，ここから一般ルーレットに移るには，つぎのような推論によることもできる．すなわち，単純ルーレット AA'O を，点Aを固定して底と平行な直線 AR 上に伸ばすならば，そのはじめの ½ に対応して，AA" はすべてAR上に移り，点DはAを中心としADを半径とする四分円を描くであろうが，ここに $AD=a+b$，$AB=a\sim b$，かつ $\angle BB''D=\frac{\pi}{2}$，BB' ∥AA' であるから，点Bは両軸が $a+b$，$a\sim b$ に等しい楕円の ¼ である BB'''S を描くであろう．詳しく言えば，母円が $\varphi$ だけ回転したとき，単純ルーレットの弧 AA' の ½ に等しく AA''' をとり，また，楕円 BB'''S において離心角が $\frac{\pi}{2}-\theta$ である点 B''' から接線 B'''U をひけば，$A'B'=A'''B'''$，$\angle TA'B'=\angle RA'''B'''$，$\angle IB'A'=\angle UB'''A'''$ となるであろう．そして，ABに関するBB'''Sの鏡像をもあわせ考えることによって，$BB'=2BB'''$であることが結論されるであろう．なぜならば，点 A'''，B''' の像をそれぞれ $\bar{A}'''$，$\bar{B}'''$ であらわすことにすれば，｜運動AA'｜＝｜運動AA'''｜＋｜運動$A\bar{A}'''$｜であり，これに対応して，｜運動 BB'｜＝｜運動 BB'''｜＋｜運動 $B\bar{B}'''$｜となるからである．

## 注

(1) ここに A.D.D.S. とは，近年におけるメナールの研究によれば，大アルノーその人（Arnauld Docteur de Sorbonne）と推定される．Voir J. Mesnard : *Autour des écrits de Pascal sur la roulette*, dans *Annales Universitatis Saraviensis, 1953*, Ⅱ.

(2) パスカルの用語に従う．今日では，ルーレット，サイクロイド，トロコイドの３語は区別して用いられるようであるが，パスカルの時代においては，これらはまったく同義であり，パスカルはそのうちルーレットの語を最も多く用いているのである．

(3) *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*, VI, 1730, p.25, cité dans L.Brunschvicg: *Les Etapes de la Philosophie mathématique*, P.U.F., 1947, p.181.

(4) *Œuvres de Blaise Pascal*, Hachette, VIII, p.205. 以下すべてこの版による．

(5) *Œuvres de Pascal*, Ⅷ, pp. 285—287.

(6) *Œuvres de Fermat*, Gauthier-Villars, I, pp.206—298, Ⅲ, pp. 178—180. なお，この小論文 *Ad Laloveram Propositiones* は，ラルエールの著書 *Veterum geometria promota in septem de Cycloide libris, et in duabus adjectus Appendicibus*（1660）の付録第２部をなすものであって，８個の命題を含むが，いずれも命題のみであって，証明はつけられていない．

なおまた，今後フェルマの所論を記すにあたっては，ラテン語原文の直訳は煩雑を招く恐れがあるので，上記全集の第３巻に収められている編集者自身のフランス語訳により，あるいは，私自身の要約によることにする．純粋に歴史的な観点からは，原文の直訳が望ましいわけであるが，はじめに記したような性質をもつこのノートでは，このように処置してさしつかえないであろう．

(7) *Œuvres de Fermat*, Ⅰ. p.207, Ⅲ, p.179 に所載のもの．これは，パスカルが用いた図（*Œuvres de Pascal*, Ⅷ, p.262）を簡略にしたものにほかならない．

(8) この点については，*Voir Œuvres de Paseal*, Ⅷ, p.285, note 1.

(9) 通常の放物線上の点は，焦点の方向と準線に垂直な方向とに同じ速さで運動すると考え得る．よって，これらの「方向線」のなす角の２等分線がその接線を与える．

(10) ディオパントスは，『数論』の Ⅴ, 14, 17 におて，近似的な相等性を示すために παρισότης および πάρισον の語を用い，これはバシェその他によって adaequalitas および adaequale と訳された．

(11) *Methodus ad disquirendam maximam et minimam* の冒頭．*Œuvres de Fermat*, Ⅰ, pp. 134—135, Ⅲ, p.121. ただし，〔　〕内はこのノートの筆者の加筆による．

(12) *Œuvres de Fermat*, Ⅰ, pp. 135—136, Ⅲ, pp. 122—123. ただし本文は，既述の理由から，Ⅲ のフランス語訳によりつつ，私見によっていくらか記述を変更した．

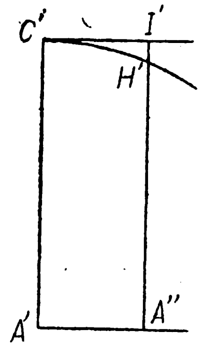
(13) ただしフェルマ自身は，何の極値を求めるかについてまったく沈黙しており，そし

て，ここからデカルトとの間の論争がおこったことは有名である．

(14) C. B. Boyer : *The Concepts of the Calculus*, *Hafner*, 1949, p. 156. 無限小の観念は，上述の「規則」および適用例においてはまだ外顕的でないが，ついで見る「第2の場合」において明らかとなる．

(15) *Œuvres de Fermat*, Ⅰ, p. 143.

(16) フェルマ自身が挙げている「第2の場合」の例（Ⅰ，pp. 162—165，Ⅲ，pp. 144—145）においては，$\widehat{C'H'}$ が C'I' に置きかえられ，A''H' が A''I' に置きかえられる．ただし，その正当さについてフェルマはなんら議論していないのであるが，H'I' は，∠C'A'H' が無限小となるとき，これにたいして「2位の無限小」であり，このことは本文中のＨＩと∠ＣＡＨとの関係についても同様である．




(17) *Œuvres de Pascal*, Ⅸ, p. 199. ただし，楕円の軸の長さについては，パスカルはその値を提出したにとどまり，その算出法までは記さなかったのであるが，その方法については，邦訳『パスカル全集』第3巻（人文書院，昭和 34 年）に挿入された「月報」中で注記しておいた．

(18) まず式(5)に着目しよう．この被積分函数は，第2余弦法則によって，線分 EB''（パスカルのいわゆる代表線 representante）の長さを与えるものにほかならない．よってこの積分式の内容は，目下の手紙のはじめ（Ⅸ，pp. 191—192）におけるパスカルの所論と結果においてまったく一致している．（この部分において彼は，半ルーレット×小母円の半径＝Σ（代表線×小母円の周を無際限に等分して得られる微小弧）という関係を，幾何学的に導き出しているのである．）

(19) *Œuvres de Fermat*, Ⅰ, pp. 162—165, Ⅲ, pp. 144—145.

(20) なお，式(7)を前出の(6)と比較するとき，∠ＢＣＢ″の補角の大きさを $2\theta'$ とすることによって，ＯＮの和を求めることは定積分(6)に直ちに帰着することが知られる．

(21) ここに「並進」とは，その図形上のすべての点が任意の同一時間（微小時間をも含めて）内に行なう「変位」が等しいような運動を意味している．通常の「平行移動」の意味を拡張したものである．

(22) レン Christopher Wren (1632—1723) によるこの命題の発見については，*Voir Œuvres de Pascal*, Ⅷ, p. 204.

(23) なお，ついでに言えば，ロベルヴァルの方法は，点 A および点 E の同じ瞬間における運動の方向は常に直角をなすことをも直ちに教えるが，これはすなわち，単純ルーレットの縮閉線はやはり単純ルーレットであるといういちじるしい性質を示すものにほかならない．

---

末筆ながら，*Œuvres de Fermat*, Gauthier-Villars は，本学の中村幸四郎先生より見せていただいた．ここに厚くお礼を申しあげるものである．

# 付　記

上述の本文とはまったく無関係のことなのであるが，昨年人文書院から刊行された『パスカル全集』第1巻において数学論文の翻訳を担当した者として，ここに二つの事柄を付記させてもらいたい．

I．まず，同書に挿まれた「月報」中において，私は「1以外の三角数は4乗数であり得ない」というフェルマの一命題を紹介したのであったが，これにたいして私が試みた証明の前半は正しくなかった．まことに幼稚な誤りをおかして，汗顔の至りである．この場所を借りて訂正させていただく．

三角数の第 $l$ 数が $m^4$ に等しい，すなわち $l(l+1)=2m^4$ とすれば，$l$ と $l+1$ とがたがいに素であることから，(1) $l=n^4$, $l+1=2p^4$ か，(2) $l=2p'^4$, $l+1=n'^4$ であるから，問題は不定方式 $2x^2-y^2=\pm1$ が平方数の解を有するかいなかに帰するが，この方程式の，0 および正整数の範囲における一般解は，古くからよく知られている．すなわち，

$$x_{\gamma+1}=x_\gamma+y_\gamma,\quad y_{\gamma+1}=2x_\gamma+y_\gamma,\quad \gamma=0,\ 1,2,\ \cdots \tag{1}$$

ただし，$x_0=0$, $y_0=1$

であって，添数 $\gamma$ が偶数であるか奇数であるかにしたがって，右辺は$-1$ または$+1$であり，また，$y_\gamma$ は常に奇数であるが，$x_\gamma$ は $\gamma$ が偶数であるか奇数であるかにしたがって同じく偶数または奇数である．そして，右辺が$-1$の場合，すなわち，初めに述べた(2)の場合に平方数の解がないことは，すでに別の方法によって示されたとおりであるから，いまは添数が奇数の場合だけを考えればよく，$2p^4-n^4=1$ において $n$, $p$ はともに奇数である．

(1)から，つぎの一般関係が得られる．

$$x_{2\gamma}=2x_\gamma y_\gamma,\quad y_{2\gamma}=2x_\gamma^2+y_\gamma^2 \tag{2}$$

よって，$x_{2\gamma+1}=p^2$, $y_{2\gamma+1}=n^2$ とおけば，

$$p^2=2x_\gamma y_\gamma+2x_\gamma^2+y_\gamma^2=(x_\gamma+y_\gamma)^2+x_\gamma^2=x_{\gamma+1}^2+x_\gamma^2 \tag{3}$$

$$n^2=4x_\gamma y_\gamma+2x_\gamma^2+y_\gamma^2=(2x_\gamma^2+y_\gamma^2)-2x_\gamma^2=y_{\gamma+1}^2-2x_\gamma^2 \tag{4}$$

しかるに，$y_{\gamma+1}^2-2x_{\gamma+1}^2=\pm1$（右辺は $\gamma$ が奇数のとき$+1$，偶数の

とき$-1$）であるから，(4)を用いて，$2\left(x_{\gamma+1}{}^2 - x_\gamma{}^2\right) = n^2 \mp 1$，あるいは$2\left(x_{\gamma+1} - x_\gamma\right)\left(x_{\gamma+1} + x_\gamma\right) = 2\,y_\gamma y_{\gamma+1} = n^2 \mp 1$を得るが，ここに$y_\gamma$，$y_{\gamma+1}$，$n$はすべて奇数なのであるから，右辺は$n^2+1$でなければならず，すなわち，$r$は偶数である．

すると，(3)において$(x_\gamma,\ x_{\gamma+1}) = (x_\gamma,\ y_\gamma) = 1$であるから，

$$p^2 = a^2 + b^2,\quad x_{\gamma+1} = a^2 - b^2,\quad x_\gamma = 2\,ab \tag{5}$$

とおくことができ，したがって，$y_{\gamma+1} = (a+b)^2 - 2\,b^2$．しかるに他方，$r$が偶数であることから，(4)に準じて，$y_{\gamma+1} = y_{\frac{\gamma}{2}+1}{}^2 - 2\,x_{\frac{\gamma}{2}}{}^2 = \left(x_{\frac{\gamma}{2}+1} + x_{\frac{\gamma}{2}}\right)^2 - 2\,x^2_{\frac{\gamma}{2}}$．そして，(5)の３式を同時に満足する$a, b$（$a > b \geqq o$）が一意的に定まっていることは第１，第２式によって明らかであるから，$a = x_{\frac{\gamma}{2}+1}$，$b = x_{\frac{\gamma}{2}}$でなければならず，したがって，第３式から$x_\gamma = 2\,x_{\frac{\gamma}{2}+1}\,x_{\frac{\gamma}{2}}$．しかるにまた(2)に準じて，$x_\gamma = 2\,x_{\frac{\gamma}{2}}\,y_{\frac{\gamma}{2}}$．よって，$x_{\frac{\gamma}{2}} = 0$，または$y_{\frac{\gamma}{2}} = x_{\frac{\gamma}{2}+1}$となるが，これらはいずれも$r = 0$においてのみ可能なことであり，したがって$p^2 = x_1 = 1$，$n^2 = y_1 = 1$を得る．これは確かに(5)の第１式ばかりか，問題の条件をみたす．

（なお，以上は$r$が偶数のとき$x_{2\gamma+1}$は１以外の平方数であり得ないことを示すものであって，$r$が奇数のときはその限りでない．例えば，$x_7 = 169 = 13^2$．）

Ⅱ．つぎに，パスカルの「数三角形論」*Traité du triangle arithmétique*の翻訳に際し浅学のためにおかしていた或る不当な解釈について，同じく訂正を加えさせてもらう．問題は，同論文の「帰結１２」の証明中に見える"*la proportion troublée*"という語である（*Œuvres de Pascal, Hachette*, Ⅲ, *1923, p.457*)．当時この語の意味を詳かにしなかかった私は，やむなく一時的な解釈によって難をしのいだのであったが（前掲書555ページ注４），この用語はまさしくユウクリッドに由来するものであることをこのたび知った．すなわち，『幾何学原論』第５巻の定義18によれば，３個の量の２個の組$a,\ b,\ c : A,\ B,\ C$があって，$a : b = B : C$，かつ$b : c = A : B$であるとき，「乱された比」τεταραγμένη ἀναλογια があると言われ，このとき$a : c = A : C$であることが，同巻の定理23において述べられている．問題のパスカルの本文は，この記述と完全に合致するものである．