数値シミュレーションによる粘性流れの解析に関する研究

１９８５年１２月

梶　島　岳　夫

目　次

緒　言

自然科学においてシミュレーションの発想はそれほど新しいものではないが，理論・実験とならぶ現実的な方法として認識されるに至ったのは近年の計算機の急速な発展に負うところが大きい．流体力学・流体工学の分野でも，流れの現象を解明・予測・制御する上で，理論の限界を克服し，困難な実験を補完するために，数値シミュレーションの方法の役割が増大し，数値流体力学として体系化されつつある(1)(2)．

本研究では非圧縮性流体のナビエ・ストークスの方程式で表される流れを対象とする．粘性の効果の程度はレイノルズ数によって代表され，レイノルズ数が低いときには層流，またレイノルズ数が通常 1000 のオーダーを超えると乱流という，二つの状態の流れに大別される．ナビエ・ストークスの方程式は非線形で時間依存型であり，このような広範囲のレイノルズ数域にわたって統一的に扱い得る解析解は不可能であるから，これを解くには数値解によらなければならない．

数値シミュレーションの手法は理論解析よりもむしろ実験に近い．物理的な実験に対する著しい利点は条件設定の任意性である．計算機の中では，現実には存在しない非粘性あるいは非圧縮性という流体の性質や，風洞内で同時に成立させることが不可能な多くの相似則を容易に実現することができる．また，実験では流れ場の一点で例えば速度と圧力を同時に求めることは至難で，計器の挿入が流れに影響を与えることもある．これに対して数値シミュレーションでは情報の抽出が任意で，同時にデータを多面的に表示することができる．

これまで数値シミュレーションが実験にとって代わるまでに至っていない理由は，計算機性能の不足もさることながら，離散化に伴う諸問題にある(2)．

すなわち，離散化により単に精度が低下するだけでなく，数値解が原微分方程式とは定性的に異なる流れを与えることもありうる．例えば，非粘性を仮定していても，離散化により粘性に似た効果が導入されることはよく知られているまた乱流における小スケール渦のように全体の流れに無視できない作用を及ぼす挙動があるが，これを差分格子でとらえきれない数値解法は現実の流れと異なる解を導くこともありうる．そこで誤差の影響を正しく評価し，適切に制御すること，また数値スキームでとらえられない挙動を精度よくモデル化して組み込む技術が不可欠となっている．

粘性流れの数値解法

流れを数値的に扱う方法としては差分法，有限要素法，境界要素法が代表的である(1)．差分法は流れ場を格子で離散化し，差分化された支配方程式が成立するような格子点の値を求める方法である．有限要素法では流れ場を体積要素に分割し，各要素内で平均的に支配方程式が成り立つような節点値を求める．また境界要素法は，境界面を面積要素に分割してポテンシャルなどの作用素を配置し，流れが境界条件を満足するような作用素の分布を定める解法である．

原理的には初期条件と境界条件を与え，離散化した基礎方程式を数値的に積分すれば解が得られることになる．しかし乱流の場合には，全てのスケールの現象を解析するための計算の規模は近い将来においても計算機の能力をはるかに上まわることが予測されており(3)，直接積分の方法は不可能である．また層流の場合にも，直接積分は必ずしも実用的な方法とはいえない．そこで対象とする流れの性質に応じた解法の選択が必要となる．

レイノルズ数がごく小さく，流れをストークス近似あるいはオゼーン近似のように線形化して表すことができる場合には境界要素法が可能であるが，その

レイノルズ数範囲はきわめて狭い．中間のレイノルズ数域では差分法も適用できるが，メッシュ分割が自由な有限要素法がよく用いられている．高レイノルズ数で，粘性効果が薄い境界層や後流内のみで顕著になる流れでは，流れ場をこれらの層とポテンシャル領域に分けて考えることができる．ポテンシャル流れでは外部流れには境界要素法，内部流れには有限要素法がよく用いられているが，工学的には物体表面上の値のみが重要であることが多く，とくに三次元流れには境界要素法が有利である．差分法は以上のいずれの場合にも適用することができる．最近では，複雑な形状の物体のまわりに薄いせん断層での解像度が良好で，しかも直交に近い格子を発生させる技術が発達し，精度の高い計算が可能になった．乱流に関しては，アンサンブル平均をとったレイノルズ方程式を解く場合にも，乱流渦そのものをシミュレートする場合にも差分法が多用されている[4]〜[6]．

本研究の概要と目的

本論文は，第１部の差分法による乱流の数値シミュレーションと，第２部の境界要素法による層流の解析の研究から構成されている．第１部では乱流渦のシミュレーションによる乱流構造の解明と複雑な流れ場への応用に続いて，遷移レイノルズ数域の乱れのシミュレーションを行う．逆に第２部ではごく低いレイノルズ数におけるオゼーン流れの境界要素法をより高レイノルズ数域に拡張する．このように本研究では高レイノルズ数側と低レイノルズ数側の双方から中間域への拡張を試み，広範囲のレイノルズ数域での粘性流れの数値解法の確立を追求している．

第１部は３つのテーマから成る．第１章の序論に続いて，第２章では Large eddy simulation(ＬＥＳ)[6]〜[8] の手法により平行平板間のポアゾイユ乱流の解析を行った結果を述べる．ここでは乱流構造の解明を目的としている．

数値シミュレーションの利点は，条件の設定が任意で，流れを様々な角度から時々刻々観察でき，測定困難なデータの抽出が容易で，しかも流れを点情報ではなく場として把握し得ることなどである．そこで第２章では，まず現実の乱流が適切に再現されていることを示し，その上で数値シミュレーションの特色を生かして乱流の生成機構の解析を試みる．実験的には様々な渦構造のモデルが提案されている[9][10]．これらは平均化されたモデルであって瞬時的な構造をとらえていないことと，渦構造において乱流生成が活発であるのか乱れの生成の結果としてできるものなのかが明瞭でないことなどが欠点と思われ，壁乱流の構造に関する共通の認識はまだ確立されていない．この研究に数値シミュレーションを用いることは最も有効な活用であると考える．

第３章では回転流路の乱流にＬＥＳを適用した結果を述べる．この流れは体積力の作用する乱流場の例として興味がもたれており[11]，工学的にも流体機械の内部に現れる流れとして重要である．まずコリオリ力による平均的な流れ場の構造の変化をシミュレートし，続いて第２章で示す乱流生成機構のモデルに基づいてコリオリ力の微視的な効果を観察し，回転場の乱流機構を明らかにする．

第４章では遷移レイノルズ数域の平行平板間クエット流れを上流差分を用いた直接シミュレーションで解析した．対象とする流れは工学的には潤滑膜の流れが乱流に遷移する場合に相当する．その目的は，乱流モデルによる予測が困難な低レイノルズ数のせん断乱流をシミュレートすることと，上流差分という人為的な効果を加えた計算により現実の流れが再現し得るかを調べることである．さらに低レイノルズ数乱れにおけるＬＥＳのモデルの性質についても言及する．またこの流れは，乱流境界層の外層の大規模乱流渦の代わりに平板が引っ張ってできる，境界層のひとつのモデルとみなすことができる．この状況で生ずる乱れ渦を調べ，第２章で示した乱流生成のモデルと合わせて，乱れの

構造を考察する．

第２部では，まずオゼーン近似の基本解を用いた境界要素法による流れの解析方法を定式化し，具体例として二次元平板のまわりの流れを計算した結果を示す．境界要素法の適用範囲は流れを線形近似できる場合に限定されるが，完全ナビエ・ストークスの式でも，非線形項を流れ場に分布する体積力とみなし，境界要素法を繰り返して用いれば流れを解くことが可能になると考えられる．そこで本研究ではオゼーン近似だけでは表し得ないレイノルズ数領域まで適用できる解法を導く．また境界要素法は，差分法や有限要素法とは異なり，問題を単純化して基本法則を抽出した解析解を組み合わせることにより全体の流れ場を記述するので，現象の根本的な理解の上で意義があると考える．

最後に結言として，本研究の成果をまとめ総括する．

第1部　乱流の数値シミュレーション

第１章　序　――乱流の数値シミュレーション――

1・1　乱流の数値計算の概観

ナビエ・ストークスの方程式が乱流を記述し得る[12][13]ことを前提にすれば，これを解くことにより，乱流の統計量だけでなくその構造や発生機構に関する情報が得られるはずである．一般にナビエ・ストークスの式を解析的に解くことは不可能で，数値解によらなければならない．しかし乱れの最小スケールで時空を分割して，差分化した方程式を直接数値積分するためには，流れの代表速度U，代表長さL，動粘性係数νによるレイノルズ数$Re=UL/\nu$の9/4乗の程度の格子数を確保することが必要と見積もられ[3][7][14]，これは近い将来に実現可能な計算機性能をはるかに上回ると予想されている．そこで問題の本質を損なわない範囲でなんらかの限定を与えて計算を可能にすること，すなわちモデル化が必要となる．

現在実用に供されている乱流の計算法はナビエ・ストークスの式にアンサンブル平均を施したレイノルズ方程式に基づいている．古くはせん断流れの厚み方向に積分した形が盛んに用いられていたが，最近ではレイノルズ方程式を解いて流れを予測する微分法あるいは場の方法と総称される方法が一般的である[4][15][16]．この方法は乱れの相関項の完結のレベルにより４種類に分類される[4][15]～[18]．レイノルズ応力に渦粘性の概念を導入する方法には，渦粘性係数を経験的関数で与える零方程式モデル，渦粘性係数を特徴づける量の

輸送方程式を連立させて解く１方程式，２方程式モデルがあり，さらにレイノルズ応力そのものの輸送式をたてる応力方程式モデルがある．現在は２方程式モデルに属する$k-\varepsilon$モデル[19]が多用されている．しかし全てのスケールの乱れを一括して扱う以上のような方法では，変動の相関項に普遍性のあるモデルを与えることは困難である．計算機性能の向上に伴い補助方程式の数を増すことに計算技術上の障害はないが，高次相関のモデルや多くのモデル定数の物理的な意味が明瞭でなくなる．このような事情がモデル依存度の少ない乱流渦のシミュレーションを必要とする背景のひとつとなっている．

１・２　乱流せん断流れの構造の研究の概観

壁近傍の乱れが三次元的であることは古くから知られていたが，熱線流速計によって平均速度だけでなく変動の強さやエネルギ・バランスの詳細な測定が可能となったのは1950年代で，Klebanoff[20]による平板乱流境界層の測定，Laufer[21][22]の平板間乱流や円管内乱流の測定は現在でも乱流計測の規範となっている．

Klineら[23]，Kimら[24]は水素気泡法による可視化実験の結果，壁のごく近くには全く不規則な乱れではない組織的な構造が存在することを指摘した．彼らは壁近傍に現れる低速の縞が上昇して乱れに至るまでの一連の運動をバーストとよんだ．この機構の発生を時空的に予測することは不可能であるが，運動そのものはきわめて決定論的に推移するようにみえるため，整構造あるいは組織的構造と認識されている．Kimらによれば壁付近の縞構造の横断方向のスケールはきわめて狭く，壁面摩擦速度をu^*で表すと$100\nu/u^*$の程度である．一方Raoら[25]はバーストの発生の平均的な時間間隔を境界層の外側における速度Uと境界層厚さδにより$5\delta/U$で表されることを示した．このよう

に空間スケールが壁指標で表される縞構造と外層の特性量により記述されるバースト周期との関連，すなわち乱れの生成機構と外層の大規模渦との関係は現在も未解決の課題となっている．

壁近傍の乱流構造を解明し，定量化するために，可視化実験に加えて，熱線流速計により信号の相関をとったり，条件付きサンプリング〔26〕〔27〕，４象限分解〔28〕などの手法が発達した．実験的研究による乱れの生成機構のモデルは縦渦説と横渦説に大別できる〔10〕． Offenら〔29〕の馬蹄形渦モデルや Blackwelderら〔26〕〔30〕の渦対モデルに代表される縦渦説は，主流方向に軸をもつ逆回転の渦対の間の低速流体がもち上げられ，側面では高速流れが壁に吹き込むというものである．一方 Brodkeyら〔10〕〔31〕は，横断方向に軸をもつ渦が外層の高速流れを巻き込み，壁から低速流れを噴出させるという説を示し，馬蹄形渦などの構造は付随的なものであると説明した．

流速計による研究は基本的には点情報の解析で，計器の挿入の影響や測定精度などの問題がある．また可視化実験では流れの一側面しかとらえ得ず，しかも上流履歴を含んだ流れの観察となる．このように従来の実験的研究では流れが瞬時的な場として把握されていない．また統計平均量として抽出された渦構造が何を意味するのか，さらにその構造が乱れの生成に対して能動的であるのか副産物であるのかなどの疑問が残る．

１・３　乱流渦の数値シミュレーションの概観

乱流渦を数値的にシミュレートして流れを予測したり，実験を補完するために測定困難なデータを抽出することは，工学上あるいは乱流研究の上できわめて重要である〔3〕〔6〕〔32〕～〔34〕．

乱流渦を直接計算しようという発想はコンピュータ以前からあり，地球規模

の気象パターンの予測を目的とする気象学の研究に遡ることができる．かつてRichardsonは差分格子点に人間を配置して周囲と情報を交換しながら計算を進行するという壮大な構想を示したが，人間が真空管になり，さらにトランジスタからＬＳＩにまで変遷した今日も発想は全く変わっていない．

ところで，乱流は広い波数域にわたる三次元渦運動で，乱流渦はその大きさにより性質が異なることが実験的に知られている(3)(8)(35)．主流からエネルギを受け取り，乱れのエネルギの大部分を輸送する大スケール渦は全体的な流れ場の種類によって様々な様相をみせる．現実にはこのような大スケールの流れのみを知ればよい場合が多い．小規模渦は流れ場の種類に関わらず普遍的で等方的な性質をもっており，大スケール乱れからカスケード過程によって受け取ったエネルギを消散する．したがって小規模変動を記述するパラメータは消散するエネルギ量のみとなる．

Large-eddy simulation(ＬＥＳ)は，このような乱流渦の性質に注目して，乱流場を大小のスケールの乱れに分離し，小規模変動をモデル化して大スケールの流れの方程式に組み込み，これを直接計算しようとする方法である．この研究は1960年前後から気象学の分野で行われていたが，小規模乱れの消散効果を局所的な大スケール挙動と関連づける現在のモデルが形成されたのはSmagorinsky (36), Lilly (37), Leonard (7) らの研究による．一様乱流においてはモデルの性質もよく調べられている(38)～(40)． Deardorff(41), Schumann(42)はＬＥＳにより平行平板間の乱流をシミュレートし，実験室規模の乱流に応用した．

ＬＥＳは工学分野への応用もさることながら，乱流構造の解明の手段として最も期待されている．Moinら(43)は特に壁近傍の格子の解像度を向上させ，壁乱流の構造を精度よく再現しうることを示した．また Kim(44)(45)はＬＥＳにより条件付き平均の手法を模倣し，実験と同様の結果を得た．

一方モデルによらない直接シミュレーション(Direct numerical simulation：ＤＮＳ)には，Orszagを中心とする一連の研究がある[5][46][47]．この方法は主として層流乱流遷移の研究に向けられてきた．Orszagら[46]は平行平板間の層流の周期的変動を与えた場合の流れの安定性を調べた．また遷移の最終段階に至るまで実験[48]で観察されている現象を精度よく再現した計算例[49][50]もある．十分に発達した乱流では，非線形作用により次々と生成される小スケール乱れの消散を，上流差分[51][52]などの効果によって代用して計算を安定化させることが必要となる．しかし，その物理的意味が不明瞭で，数値的拡散がエネルギ・バランスや乱れの構造に与える影響については十分に調べられていない．

第２章　数値シミュレーションによる乱流構造の解析

２・１　序論

Large-eddy simulation(ＬＥＳ)〔6〕～〔8〕〔53〕～〔55〕は乱流場を大小のスケールの流れに分離し，普遍的な性質をもつ小スケール渦をモデル化して，全体的な流れ場の形状によって様々に変化する大スケールの流れを直接シミュレートする乱流の数値計算法である．ＬＥＳでは，乱れのエネルギの大部分を輸送する比較的大規模な構造を解析するのに十分な格子を設ければよいので，エネルギの消散に関与する最小のスケールの乱れまで計算する場合よりもはるかに少ない差分格子数で，乱流の重要な運動を予測することができる．またレイノルズ方程式を解く方法では，全てのスケールの乱れを一括して扱うために，普遍性のあるモデルは得られていない．これに対してＬＥＳは，この欠点を克服しうるので，工学的に興味のある種々の複雑な乱流への応用が可能である．しかし現状では，ＬＥＳの適用は一様流れや平行平板間乱流のような比較的単純な流れに限られている〔41〕～〔43〕．その理由には，格子以下のスケールの乱れをモデル化してもなお必要な格子数を確保するためには計算機容量が十分ではなく，解像度の不足がモデルの普遍性を生かしていないことと，複雑な流路では境界条件の設定が難しいことなどが挙げられる．現在はＬＥＳの適用の目的は主として乱流構造の解明に向けられている〔34〕〔56〕．

現在の計算機は，壁乱流の生成に関係の深い壁近傍の縞構造を解析するのに必要な格子数を設定することが可能な段階にある．ＬＥＳが乱流構造の解明の

手段となりうることは，Moinら[43]が平行平板間乱流を精度よくシミュレートしてみせたこと，さらに Kim[44][45]が条件付き平均の手法をとり入れ実験と同様の結果を再現したことにより実証されている．

乱流構造に関するこれまでの実験的研究では，混沌とした乱れの中にも秩序だった構造が存在することが指摘され[23][24]て以来，その組織的な構造を抽出することに大きな努力がはらわれ，様々な渦構造のモデルが提案されてきた[9][10][57][58]が，まだ共通の理解が得られるまでには達していない．実験の技術の限界を超えるためにＬＥＳが果たしうる重要な役割は，瞬時的な流れを場として観察するとともに，これを時々刻々追跡し，この中から実測困難なデータを取り出して表示することであろう．実験的手法を模倣して同じ結果を得るだけでは，計算結果の妥当性を確認する程度の意義しかもたない．

このような観点から，本研究では，乱れの機構を解明するために，瞬時的な流れ場と同時に乱れの生成の分布を観察することによって，渦構造と乱れの生成との関連を考察する．

2・2　基礎方程式

図2・1のような平行平板間の非圧縮性流体の十分に発達したポアゾイユ流れを考える．平均流れはx_2 方向とする．

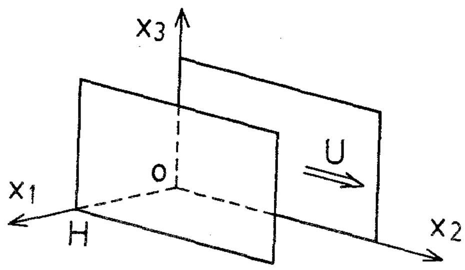


図2・1　流 路 と 座 標

2・2・1　大スケールの流れ場の支配方程式

まずフィルタ関数G_i により，流れ場（u）を大スケールの流れ（$\overline{u}$）とそれからの変動（u'）に分離する．

$$u = \overline{u} + u' \qquad (2\cdot 1)$$

ここで大スケール流れは

$$\overline{u}(x_1, x_2, x_3) = \iiint_{-\infty}^{\infty} u(x_1', x_2', x_3') \times \prod_{i=1}^{3} G_i(x_i - x'_i ; \Delta_i)\, d x'_i \qquad (2\cdot 2)$$

で定義される．ただしΔ_iはフィルタの各方向の長さである．フィルタに適する関数としては次のようなものがある．

（a）格子幅平均　　これは代表長さを格子幅とし（$\Delta = h$），

$$G(r ; \Delta) = \begin{cases} 1/\Delta, & |r| \leqq \Delta/2 \\ 0 \quad, & |r| > \Delta/2 \end{cases} \qquad (2\cdot 3)$$

で表されるフィルタで，このとき式(2·2) の積分は格子幅の平均となる．

（b）ガウス・フィルタ　　このフィルタはガウス関数

$$G(r;\Delta)=\frac{1}{\Delta}(6/\pi)^{1/2}\cdot\exp\left(-\frac{6r^2}{\Delta^2}\right) \quad \cdots\cdots (2\cdot 4)$$

で重みをつけた平均をとることを意味する．

（c）波数幅平均　　フィルタ関数として

$$G(r;\Delta)=\frac{\sin(\pi r/\Delta)}{\pi r} \quad \cdots\cdots (2\cdot 5)$$

を用いると，上式と式(2·3) の形は互いにフーリエ変換と逆変換の関係になるので，波数空間で格子幅平均をとることになる．

式(2·4) のガウス関数はフーリエ変換しても形は変化せず，統計的に一様な乱れには最適である．しかし，壁乱流の壁に垂直な方向には，乱れの性質が粘性底層から外層まで急激に変化するので，離れた点の影響が入るガウス・フィルタよりも格子幅の外側で打ち切ってしまう格子幅平均の方が適している．そこで本計算では Moin ら[43]と同様に，x_1 方向には格子幅平均，x_2 および x_3 方向にはガウス関数を用いる．

ナビエ・ストークスの運動方程式と連続の式に

$$u_i = \bar{u}_i + u'$$

$$p = \bar{p} + p'$$

を代入し，さらにフィルターをかけると式(2·6),(2·8) となる．

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{\bar{u}_i\bar{u}_j}+R_{ij})-\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i}+\frac{1}{Re^*}\frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_k\,\partial x_k} \quad \cdots\cdots (2\cdot 6)$$

ただし

$$R_{ij} = \overline{\bar{u}_i\, u'_j}+\overline{u'_i\,\bar{u}_j}+\overline{u'_i\, u'_j} \quad \cdots\cdots (2\cdot 7)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_k} = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots (2\cdot8)$$

座標 x_i は流路幅 H，速度 u_i は式(2·9) で定める摩擦速度 u^* ，時間 t は $H／u^*$ ，圧力 p は ρu^{*2} でそれぞれ無次元化されている． Re^* は式(2·10)で定義されるレイノルズ数，τ_w は壁面上の平均摩擦応力である．

$$u^* = (\tau_w / \rho)^{1/2} \qquad \cdots\cdots\cdots (2\cdot9)$$

$$Re^* = \frac{H u^*}{\nu} \qquad \cdots\cdots\cdots (2\cdot10)$$

式(2·7) の R_{ij} を決定すれば $(\bar{u}_i, \bar{p})$ についての方程式(2·6),(2·8) は閉じる．

フィルタをかけた流れ場では，フィルタ量そのものが変動量であるため，アンサンブル平均をとる場合とは異なり，

$$\overline{u_i\ u_j} = \overline{\bar{u}_i\ \bar{u}_j} + \overline{\bar{u}_i\ u'_j} + \overline{u'_i\ \bar{u}_j} + \overline{u'_i\ u'_j} \qquad \cdots\cdots\cdots (2\cdot11)$$

において，

$$\overline{\bar{u}_i\ \bar{u}_j} - \bar{u}_i\ \bar{u}_j \neq 0, \quad \overline{\bar{u}_i\ u'_j} \neq 0, \quad \overline{u'_i\ \bar{u}_j} \neq 0$$

の各項が残る． $\overline{u'_i\ u'_j}$ は小スケール乱れのレイノルズ応力である．また $(\overline{\bar{u}_i\ \bar{u}_j} - \bar{u}_i\ \bar{u}_j)$ はいわゆるレナード応力[7] ，$\overline{\bar{u}_i\ u'_j}$ ，$\overline{u'_i\ \bar{u}_j}$ はは大小のスケールの流れ場の相関で，これらに対してはフィルタ関数を展開してモデルを与えることができるが，前者については $(\bar{u}_i\ \bar{u}_j)$ を式(2·2) で積分して直接求めることができる場合にはモデルを考える必要はない．

なお後述の小スケールモデルの便宜上，

$$\hat{p} = \bar{p} + 2x_2 + \frac{1}{3} R_{kk} \qquad \cdots\cdots\cdots (2\cdot12)$$

とおいて式(2·6) を次のように変形する.

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{\bar{u}_i \bar{u}_j} + R_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij} R_{kk}\right) - \frac{\partial}{\partial x_i}(\hat{p} - 2x_2) + \frac{1}{Re^*}\frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_k \partial x_k} \quad \cdots\cdots (2\cdot13)$$

$\hat{p}$には無次元圧力勾配（－２）による降下分を補ってある.

２・２・２　小スケール乱れのモデル

小スケール乱れのレイノルズ応力のモデルには，いわゆるアンサンブル平均のレイノルズ応力に対する渦粘性からの類推により，小スケール乱れの渦粘性係数Kによる勾配拡散型のモデル

$$\overline{u'_i u'_j} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\overline{u'_k u'_k} = -K\bar{D}_{ij} \quad \cdots\cdots (2\cdot14)$$

が代表的である. ただし$\bar{D}_{ij}$は大スケールの変形速度テンソル

$$\bar{D}_{ij} = \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \quad \cdots\cdots (2\cdot15)$$

である. ＬＥＳではKに対しては Smagorinskyモデル[36]

$$K = (C\Delta)^2 \left(\frac{1}{2}\bar{D}_{ij}\bar{D}_{ij}\right)^{1/2} \quad \cdots\cdots (2\cdot16)$$

がよく用いられている. 上式は，乱流統計理論からの考察[59]～[61]によれば，小スケール乱れは一様で局所平衡にあり，これによる散逸がその場所で大スケール乱れから受け取るエネルギに等しいと仮定したモデルと解釈できる. Δはフィルタの代表長さである. 一様な乱流場においては，$\overline{u'_i u'_j}$の各種モデルと，式(2·14)を用いた場合のKのモデルに対して試験が行われ，式(2·16)のモデルが最適と判断されている[38][39].

本計算で対象としている固体壁面を有するせん断流れでは，特に壁近傍で非等方性が強い低レイノルズ数乱れとなる．したがって小スケールの乱れも等方性・普遍性が失われ，以上のモデルでは対応できなくなる．このような流れで例えばKを小スケール乱れのエネルギ$\overline{u'_k u'_k}$の関数としてその輸送方程式をたてたり〔62〕，$\overline{u'_i u'_j}$そのものの輸送方程式〔37〕〔63〕を扱い，小スケール渦の拡散項の効果も考慮にいれる方法も考えられる．これらの方法では，補助方程式にはさらに高次の項が現れ，レイノルズ方程式に対する$k-\varepsilon$モデルや応力方程式モデルなどと同様に，高次相関項のモデルが問題になり，数値シミュレーションの有利性が損なわれる．安易でしかも根本的な解決法は，式(2·16)のようにKがΔ^2に比例することから，格子を細かくすることである．しかし必要以上に細かい渦の挙動を知る要請はなく，また計算機容量の制約からこれは現実的でない．

現状では補助方程式をたてずに，Kのレベルで完結させるために，一様な乱れと平均せん断成分に分離して，

$$R_{ij}-\frac{1}{3}\delta_{ij}R_{kk}=-K_H\overline{D}_{ij}''-K_I\langle\overline{D}_{ij}\rangle \qquad (2\cdot17)$$

とおき〔42〕〔43〕，せん断成分のモデル定数などを別個に調整するのが妥当であると考える．このため式(2·14)の$\overline{u'_i u'_j}$の代わりに上式のように大小のスケールの乱れの相関項を含めたR_{ij}とし，一括してモデルを定めることにしても差し支えない．なお$\langle u\rangle$は壁に平行なx_2-x_3面内の平均，u''はそれからの変動である．

$$u=\langle u\rangle+u'' \qquad (2\cdot18)$$

式(2·17)の右辺第１項を一様項（Ｈ），第２項を非等方項（Ｉ）とよぶことにする．K_H，K_Iは小スケールの渦粘性係数で，それぞれに Smagorinskyモデルを適用する．

一様項のK_H は次式で決定される.

$$K_H = (C_H\ \Delta)^2\ (\frac{1}{2}\overline{D_{ij}''}\ \overline{D_{ij}''})^{1/2} \quad \cdots\cdots (2\cdot19)$$

C_H は定数で，フィルターの代表長さΔは

$$\Delta = (\Delta_1\ \Delta_2\ \Delta_3)^{1/3} \quad \cdots\cdots (2\cdot20)$$

で定められる. 壁面近くでは低レイノルズ数となり，小スケール渦は減衰するので，Δには壁近傍における混合長の van Driest の補正からの類推による

$$d_H = 1 - \exp(-\frac{x_w^+}{25}) \quad \cdots\cdots (2\cdot21)$$

を乗じる. x_w^+ は近い方の壁までの距離x_w を次のように無次元化したものである.

$$x_w^+ = \frac{x_w\ u^*}{\nu} \quad \cdots\cdots (2\cdot22)$$

K_H のモデルについては多くの計算例からその妥当性が認められている[38]〜[40]. そこで Moinら[43]と同じ形の式(2·19)を用い， 定数C_H は 0.07 とした.

非等方項についてはモデルは確立しておらず，経験的な関数を導かなければならない. 本計算では式(2·19)と同じ形の次式を用いることにする.

$$K_I = (C_I\ \Delta)^2\ (\frac{1}{2}\langle\overline{D_{ij}}\rangle\ \langle\overline{D_{ij}}\rangle)^{1/2} \quad \cdots\cdots (2\cdot23)$$

定数C_I は 0.14 とした. △の補正関数

$$d_I = 1 - \exp\{-(\frac{x_w^+}{25})^2\} \quad \cdots\cdots (2\cdot24)$$

は式(2·21)とは異なるが，これは適切な平均速度分布が得られるように探索し

て定めたものである.

以上のモデルを用いて式(2·13)を書き換える.

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} = L_i + S_i - \frac{\partial P}{\partial x_i} \qquad \text{(2·25)}$$

$$L_i = -\overline{\bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}} + \overline{\bar{u}''_j \frac{\partial \bar{u}''_j}{\partial x_i}} \qquad \text{(2·26)}$$

$$S_i = \left(K_H + \frac{1}{Re^*}\right) \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_k \, \partial x_k} + \frac{\partial K_H}{\partial x_j} \overline{D}_{ij}''$$

$$+ \delta_{i2} \left\{ \frac{\partial K_I}{\partial x_1} \frac{\partial \langle \bar{u}_2 \rangle}{\partial x_1} + 2 + (K_I - K_H) \frac{\partial^2 \langle \bar{u}_2 \rangle}{\partial x_1^2} \right\}$$

$$\text{(2·27)}$$

$$P = \hat{p} + \frac{1}{2} \overline{\bar{u}''_k \bar{u}''_k} \qquad \text{(2·28)}$$

2・3　数値計算法

無限平行平板間の流れを扱うが，実際の流れは主流方向・横断方向に同じような構造が繰り返して現れると考えて支障はない．そこでその一部の有限領域を切り取り，この部分に格子を設けて計算を行う．本計算では主流方向には平板間隔の 4.8倍，横断方向には 1.2倍の計算領域をとり，これを32×32×32の差分格子に分割する．各格子点に速度分布を与え，運動方程式(2·25)，連続の式(2·8) による連立方程式を解いて時間ステップを進行させる．このようにして時々刻々変化する乱流渦がシミュレートされる．

2・3・1　差分格子

流れ場を図２・２に示すような差分格子で分割する．各方向の計算領域H_i（および壁指標で表す$H_i^+ = H_i u^* / \nu$），　格子数N_i，格子間隔h_i（および解像度$h_i^+ = h_i u^* / \nu$）はそれぞれ表２・１のように設定されている．

壁乱流をシミュレートするためには，壁近傍に現れる縞構造を解析するのに十分な格子の解像度が必要となる．それとともに流れ場の周期性を仮定しているので，このような人為的な条件の影響を受けない程度に広い計算領域をとる

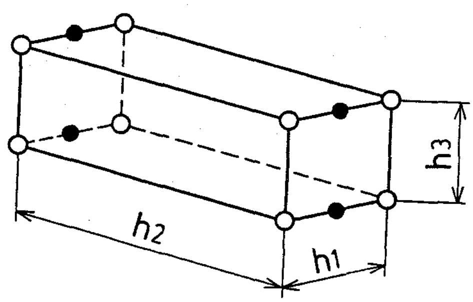


図２・２　差 分 格 子
○　各方向速度を定める点
●　圧力を与える点

表2・1　差分格子

	1(normal)	2(stream)	3(span)
N_i	32	32	32
H_i	1.0	4.8	1.2
H_i^+ (Re^*= 500)	500	2400	600
h_i	0.0024～0.049	0.150	0.038
h_i^+ (Re^*= 500)	1.20～24.5	75.0	18.8

必要がある．縞構造の平均的なスケールλ_i^+（$=\lambda_i u^*/\nu$）は，主流方向にはλ_2^+～1000，横断方向にはλ_3^+～100 の程度であることが実験的に知られている[24]．実際には大きさにばらつきがあること，この構造の成長から消滅までシミュレートすることを考慮すると，平均的スケールよりもかなり細かい格子が必要となる．本計算の差分格子は，Re^*= 500のとき，横断方向に計算領域は縞構造のスケールの５～６倍，解像度は１/５倍程度となっており，格子数の制約下では妥当なものである．主流方向には格子をより粗くして計算領域を十分に大きくすることもできるが，格子が歪むので表２・１のように$h_2/h_3=4$を限度とした．なお　Re^*= 1000 のときにはh_3^+ = 37.5 となり，この格子でも縞構造を再現することは可能であるが，乱流構造を議論する上では解像度は不十分である．

x_2, x_3 方向には等間隔格子とし，フィルター幅は格子間隔の２倍とする．

$$\Delta_2 = 2h_2, \quad \Delta_3 = 2h_3 \qquad (2\cdot29)$$

x_1 方向には速度$\bar{u}_i$ を定める点（図２・２の点○）を壁近傍で密になるように次式で与える．

$$x_1(\mathrm{I}) = \frac{1}{2}\left[1-\cos\left\{\frac{\pi(\mathrm{I}-1)}{N_1}\right\}\right]$$

$$\mathrm{I} = 1, 2, \cdots\cdots, N_1+1 \qquad (2\cdot30)$$

圧力$\bar{p}$の点（図2・2の点●）はこれらの中間に置かれる．差分格子間隔h_1とフィルター幅Δ_1は次のようになる．

$$\left.\begin{aligned} h_1(\mathrm{I}) &= x_1(\mathrm{I}+1) - x_1(\mathrm{I}), \\ \Delta_1(\mathrm{I}) &= \{h_1(\mathrm{I}-1) + h_1(\mathrm{I})\} / 2 \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (2\text{・}31)$$

2・3・2　時間進行差分

運動方程式(2・25)のL_i[式(2・26)]にはleap-frog法[64]を用い，S_i[式(2・27)]はステップ遅れとする．また式(2・28)のPは陰的に処理される．

$$\frac{\bar{u}_i^{(n+1)} - \bar{u}_i^{(n-1)}}{2\Delta t} = -\frac{\partial P^{(n+1)}}{\partial x_i} + L_i^{(n)} + S_i^{(n-1)} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (2\text{・}32)$$

添え字（n）はステップ数で，$t = n \cdot \Delta t$となる．次のステップの流れ場を求めるために，上式に連続の条件

$$\frac{\partial \bar{u}_k^{(n+1)}}{\partial x_k} = 0 \quad \cdots\cdots\cdots \quad (2\text{・}33)$$

を加える．以上のスキームは基本的にはGroetzbachら[65]と同様である．彼らはまず圧力を省略して仮の時間進行を行い，次ステップで連続条件を満たすように補正を加えた圧力のポアソンの式を解き，これを先の中間段階に加えて1ステップの前進を完了するという方法をとっている．これに対して本計算では$\bar{u}_i$，Pのフーリエ係数を同時に解く連立方程式とする．なお時間刻みΔtは0.002とした．一般に時間進行差分において計算が安定する時間刻み幅Δtを理論的に与えることは不可能で，特に非線形計算では試行により探索する他はない．ここではΔtを半分にとして2倍のステップ数進行させても同じ結果が得られたことを確認している．

L_i 項に leap-frog法を用いるため２Δtの周期をもつ振動が生じやすいので，30ステップ毎に通常のオイラー型の前進差分を行うことにした．

$$\frac{\overline{u}_i^{(n+1)} - \overline{u}_i^{(n)}}{\Delta t} = -\frac{\partial P^{(n+1)}}{\partial x_i} + L_i^{(n)} + S_i^{(n)} \qquad \cdots\cdots (2\cdot34)$$

２・３・３　境界条件と初期条件

境界条件は壁面上（x_1 ＝０，１）ですべりなし（u_i ＝０）とする．圧力に関しては，図２・２の格子配置により壁面上での境界条件は不要である．x_2, x_3 方向には，x_2 方向の１周期ごとにx_3 方向に１格子分だけずらす，食い違いの周期的境界条件[38]を与える．この境界条件は，二次元格子をx_2 方向に１列に並べて一次元的に扱うことができるので，フーリエ変換に有利でベクトル計算機にも適している．周期性が人為的な条件であるため，これを少しずらしても大差はない．後に示す流れ場の断面図をみるとこの影響は無視できることが確かめられる．

計算開始時（t＝０）において平均速度には Laufer [21]の測定値を与えた．初期乱れは乱数とし，そのスペクトルには特別の配慮はしていない．

２・３・４　フーリエ変換による解法

前述の食い違いの周期的境界条件により，x_2-x_3 面内では一次元的に次のような離散フーリエ変換が可能となる．

$$u(I,j) = \frac{1}{N_2 N_3} \sum_{k=0}^{N_2N_3-1} \tilde{u}(I,k)\, \exp\left(\frac{2\pi i}{N_2 N_3} j k\right)$$

$$j = 1, 2, \cdots\cdots, N_2 N_3 \qquad \cdots\cdots (2\cdot35)$$

$$\tilde{u}(I,k) = \sum_{j=1}^{N_2N_3} u(I,j)\ \exp\left(\frac{-2\pi i}{N_2N_3} j k\right)$$

$$k = 1,2,\ \cdots\cdots,\ N_2N_3-1 \qquad \cdots\cdots\cdots \quad (2\cdot36)$$

上式で点〔$x_1(I)$, $(J-1)h_2$, $(K-1)h_3$〕は，（Ｉ，ｊ）ただし

$j = J + (N_2 - 1)K$

と記されている．

運動方程式(2･32)を図２・２の○点で，連続の式(2･33)を●点で成立させる．両式を式(2･36)で変換し，（ｎ＋１）の項だけを左辺に集めて整理すれば式(2･37)が得られる．ただし左辺の添え字（ｎ＋１）は省略する．これは$N_2 \times N_3$ 組の（$4N_1-3$）元連立方程式である．

$$\tilde{u}_1(I,k) + d_1(I)\{-\tilde{p}(I-1,k) + \tilde{p}(I,k)\} = \phi_1(I,k) \quad ,$$

$$\tilde{u}_2(I,k) + d_2(k)\{\tilde{p}(I-1,k) + \tilde{p}(I,k)\} = \phi_2(I,k) \quad ,$$

$$\tilde{u}_3(I,k) + d_3(k)\{\tilde{p}(I-1,k) + \tilde{p}(I,k)\} = \phi_3(I,k) \quad ,$$

$$\text{以上}\quad I = 2,3,\ \cdots\cdots,\ N_1 \quad ,$$

$$c_1(I)\{-\tilde{u}_1(I,k) + \tilde{u}_1(I+1,k)\} + c_2(k)\{\tilde{u}_2(I,k) + \tilde{u}_2(I+1,k)\} + c_3(k)\{\tilde{u}_3(I,k) + \tilde{u}_3(I+1,k)\} = 0 \quad ,$$

$$I = 1,2,\ \cdots\cdots,\ N_1$$

$$\cdots\cdots\cdots \quad (2\cdot37)$$

$$d_1(I) = \frac{4\Delta t}{h_1(I-1) + h_1(I)} \quad , \qquad d_2(k) = i\frac{\Delta t}{h_2}\sin\left(\frac{2\pi k}{N_2N_3}\right)$$

$$d_3(k) = i\frac{\Delta t}{h_3}\sin\left(\frac{2\pi k}{N_3}\right) \qquad \cdots\cdots\cdots \quad (2\cdot38)$$

$$c_1(I) = \frac{1}{h_1(I)} \quad , \qquad c_2(k) = \frac{i}{2h_2}\sin\left(\frac{2\pi k}{N_2N_3}\right)$$

$$c_3(k)=\frac{i}{2h_3}\sin\left(\frac{2\pi k}{N_3}\right) \qquad (2\cdot39)$$

$$\phi_i(I,k)=\left[\tilde{u}_i(I,k)+2\Delta t\tilde{S}_i(I,k)\right]^{(n-1)} + 2\Delta t\tilde{L}_i(I,k)^{(n)} \qquad (2\cdot40)$$

微係数 $\partial u/\partial x$ のフーリエ変換は $i k_L \tilde{u}$（k_L は波数）となるので，式(2·38)，(2·39)の $\sin(k_L\Delta x)/\Delta x$ の代わりに k_L の形を用いれば $\partial/\partial x_2$，$\partial/\partial x_3$ に関しては差分化誤差は０となる[53]．しかしここでは壁垂直方向の差分精度を釣り合わせるために，差分式の離散フーリエ変換として式(2·38)，(2·39)を用いている．

S_i 項に Crank-Nicolson 法（陰解法）を用いる方法[43][66]は，連立方程式の係数に小スケールの渦粘性係数 K を含むため，係数行列が毎回変化する．これに対して本解法は左辺が単純な定数行列で，ステップ毎の消去演算を必要としない．両者の総合的な時間差分精度は，陰解法を適用しにくい非線形項 L_i の制約により大差はないと考える．

L_i 項の二重フィルター $\overline{\bar{u}_i\bar{u}_j}$ については，いわゆるレナード項[7]

$$L_{ij}=\overline{\bar{u}_i\bar{u}_j}-\bar{u}_i\bar{u}_j \qquad (2\cdot41)$$

のモデルは考えず，$\bar{u}_i\bar{u}_j$ をフーリエ変換した後でフィルター関数のフーリエ係数を乗じて直接計算する[67]．

2・4　計算結果

まず数値計算が現実の流れをシミュレートしていることを実証するために必要な手続きについて考える．まず，乱れが数値的不安定でなく，実際の乱流渦であることを示すためには

（ａ）　平均速度分布やレイノルズ応力テンソルの各成分が同時に測定値とよく合うこと

（ｂ）　可視化実験などで観察される流れと同じ構造が再現されていること

（ｃ）　その構造を解析するために十分な格子が設けられていること

を確かめることが必要である．（ｃ）の項目は２・３・１節ですでに検討されている．本章では，まず２・４・１節で妥当な平均速度分布や乱れの統計量が得られていることを示し，続いて２・４・２節では壁近傍の縞構造が再現されていることを示して，（ａ）と（ｂ）の条件が満たされていることを確かめる．その上で実験的には測定が困難な諸量を，統計平均だけではなく分布として表すことによって乱流機構を調べる．

壁面摩擦速度に基づくレイノルズ数$Re^*=500$ と$Re^*=1000$の場合について計算を行った．高レイノルズ数では前述のとおり差分格子の解像度が粗くなるなるため，乱流構造の詳細な解析が困難になる．一方，低レイノルズ数乱流は対数領域が明瞭でなく[68]，普遍的な速度分布として整理されていない．そこで本計算では$Re^*=1000$において平均速度分布が測定値[21][69]に合うように２・２・２節のモデルの定数や補正関数を決定し，これを用いて$Re^*=500$ のときの乱流構造のシミュレーションを行った．

モデルの係数などを調節しながら 2000 ステップ（$t=4$）まで計算を進め，さらに 3000 ステップほど進めて（$t=10$）平均速度・乱れの強さの分布が落ち着くのを確認した．このときの平均速度分布《$\bar{u}_2$》を図２･３に示す．

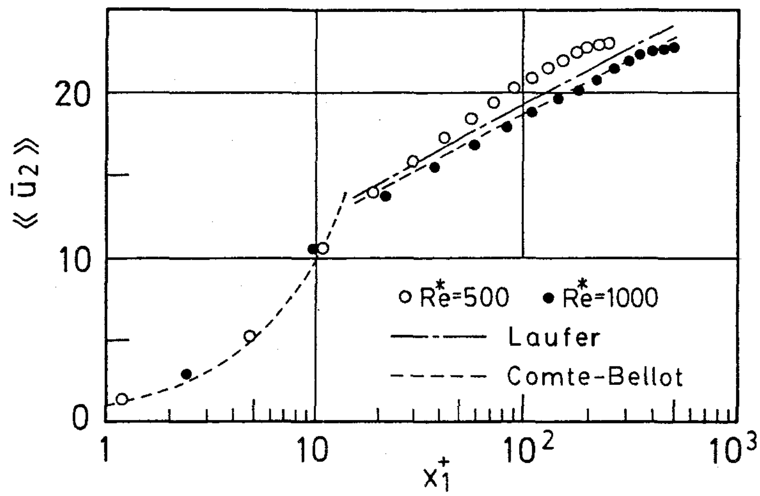


図２・３　平均速度分布（モデル定数の調整）

この図の平均《u》は〈u〉を 300ステップの間に６回求め，さらに中心線から対称位置にある流路の両側の点で平均をとったものを意味する．最大速度《$\bar{u}_2$》max に基づくレイノルズ数R_e は，Re^*＝500 のときR_e ＝11500 ，またRe^*＝1000のときにはR_e ＝22700 であった．比較のために Laufer [21]（R_e ＝24600 ），Comte-Bellot [69]（平均速度によるレイノルズ数R_{em}＝114000）の測定値を加えた．横軸にx_1^+ をとれば，Re^*＝500 では高レイノルズ数の場合よりも対数則の勾配が大きくなる．

２・４・１　平均速度と乱れの強さの分布

以下は全てRe^*＝500 のときの結果である．これ以降は平均《u》として，十分に長い時間（2000ステップの間に50ステップ毎に40回）で〈u〉の平均をとったものを示す．

改めて十分長い時間でとった平均速度分布《$\bar{u}_2$》を図２・４に示す．レイノルズ数はR_e ＝11300 で，図２・３の結果とほとんど変わらない．

図２・５はレイノルズ応力で，大スケール乱れによる応力《$\bar{u}_1\bar{u}''_2$》と，これに小スケール渦による《R_{12}》を加えたものを示した．格子以下の規模の

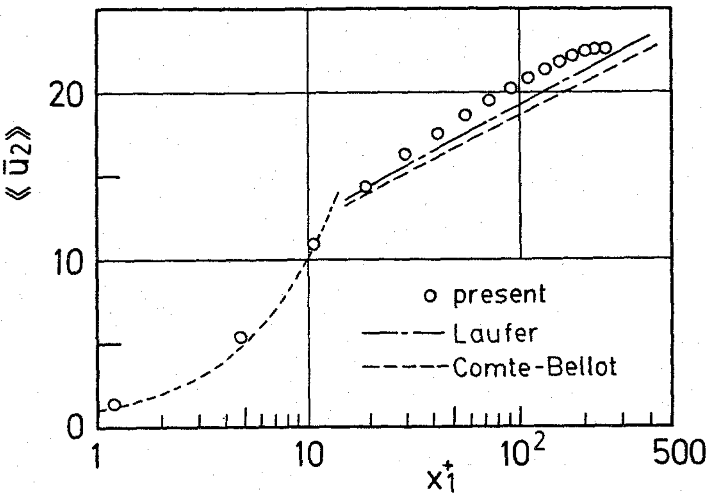


図2・4　平 均 速 度　《$\bar{u}_2$》

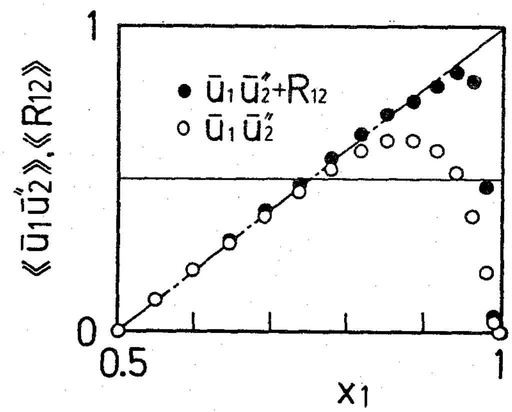
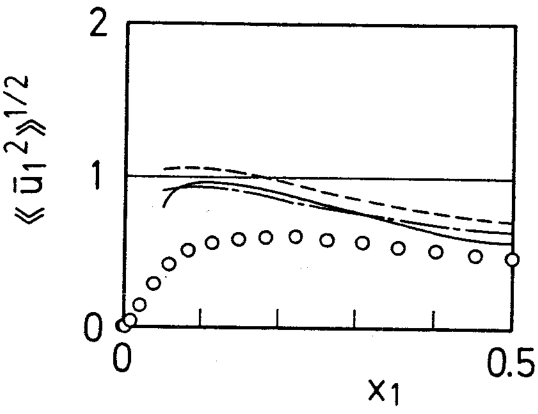


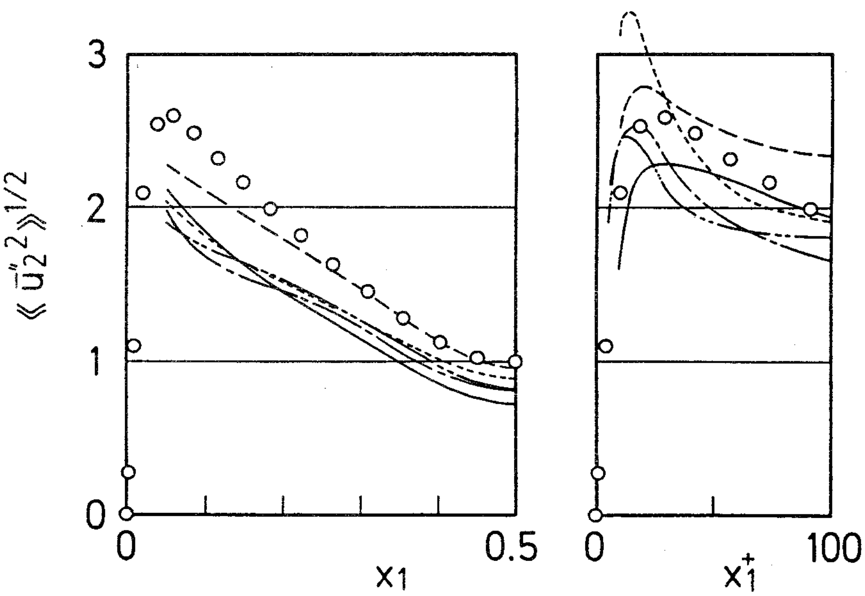
図2・5　せん断応力　《$\bar{u}_1\bar{u}''_2$》，《R_{12}》

乱れに負う部分R_{12}は直接計算によって得られるものではなく，モデルから定められる．壁のごく近くでは分子粘性応力が支配的である．

図２・６は各方向の大スケール速度の乱れの強さをｒｍｓで表した《$\bar{u}''_i{}^2$》$^{1/2}$である．　比較のため，Laufer[21]，Comte-Bellot[69]，Clark[70]，Hussainら[71]の測定値，Moinら[43]のＬＥＳによる計算結果を加えた．本計算結果では流路全域において主流方向に比べて壁に垂直方向と横断



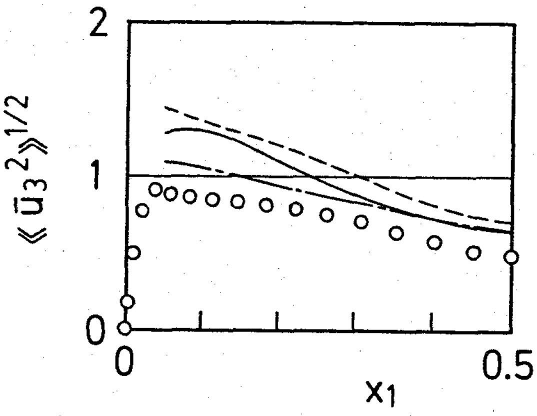
（a）　垂直方向速度　《$\overline{u}_1{}^2$》$^{1/2}$



（b）　主流方向速度　《$\overline{u}''_2{}^2$》$^{1/2}$　　　（壁近傍での比較）

図２・６　速度の乱れの強さ（続く）

○	present	Re=500 (Re=11300)
———	Moin & Kim	Re=1280 (Re=27600)
—·—	Laufer	Re=24600
----	Comte-Bellot	Rem=114000
--------	Clark	Re=30400
—··—	Hussain & Reynolds	Re=27600



（c）　横断方向速度　$《\overline{u}_3{}^2》^{1/2}$

図2・6　速度の乱れの強さ（続き）

方向の乱れが弱い．これは本計算が他のデータより低レイノルズ数で行われており，壁近傍の非等方性が流路全域に強く影響しているためであるが，乱れの強さのレベルはおおむね妥当と考えられる．図2・6(b)の主流方向速度の乱れは流路の中ほどで計算結果と測定値が同程度となっている．壁付近では$x_1{}^+$を横軸にするとよく合うが，極大値の位置は測定値よりも壁から離れている．これは小スケール乱れ（R_{22}）の寄与を加えていないからで，Moinら(43)の計算でも同じ傾向がみられる．R_{22}を得るには式(2·17)中のR_{kk}が必要となるが，非等方性の強い乱れではこれを推定するのは難しい．またR_{kk}を3方向に等配分してよいか疑問が残るので，ここでは大スケール乱れの強さを示すに止めた．

図2·7は相互相関

$$C_{12} = \frac{《\overline{u}_1 \overline{u}''_2》}{(《\overline{u}_1{}^2》《\overline{u}''_2{}^2》)^{1/2}} \quad \cdots\cdots\cdots (2\text{-}42)$$

の分布で，流路の大部分でLaufer(21)の測定値によく一致している．壁近傍で計算結果に凸部ができるのは，この領域では組織的な渦構造が支配的な

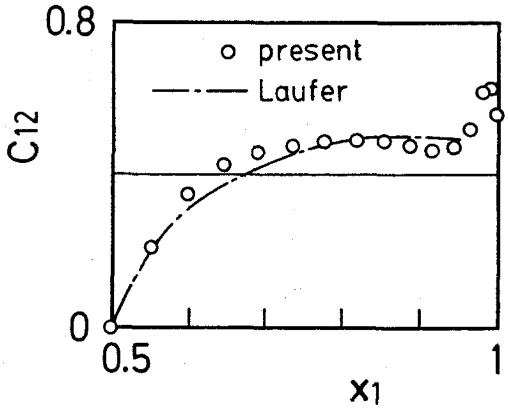


図２・７　相　互　相　関

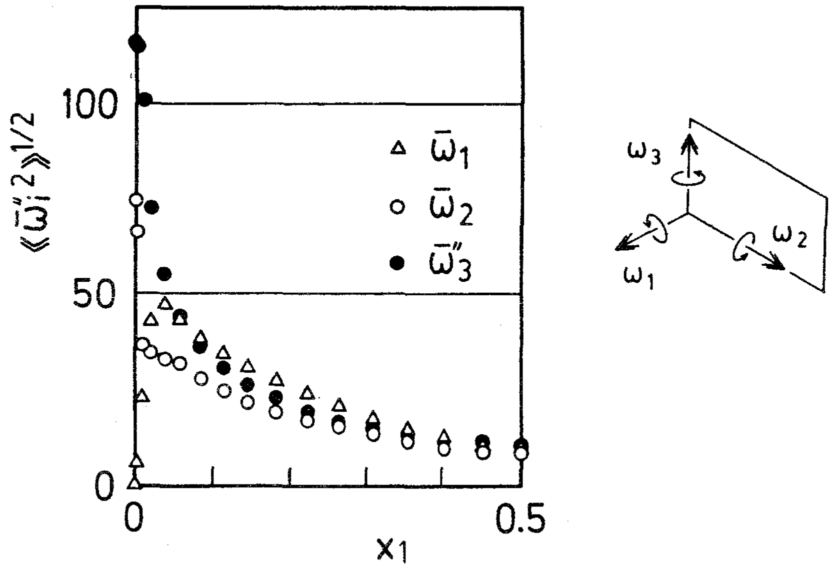


図２・８　渦度の乱れの強さ　《$\overline{\omega}_i$》$^{1/2}$

ことと，大スケール乱れのみから求めたC_{12}では分母が過小になることが原因である．また同じ傾向がみられる測定例〔72〕もある．

図２·８には渦度

$$\overline{\omega}_k = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i} \qquad (2\cdot43)$$

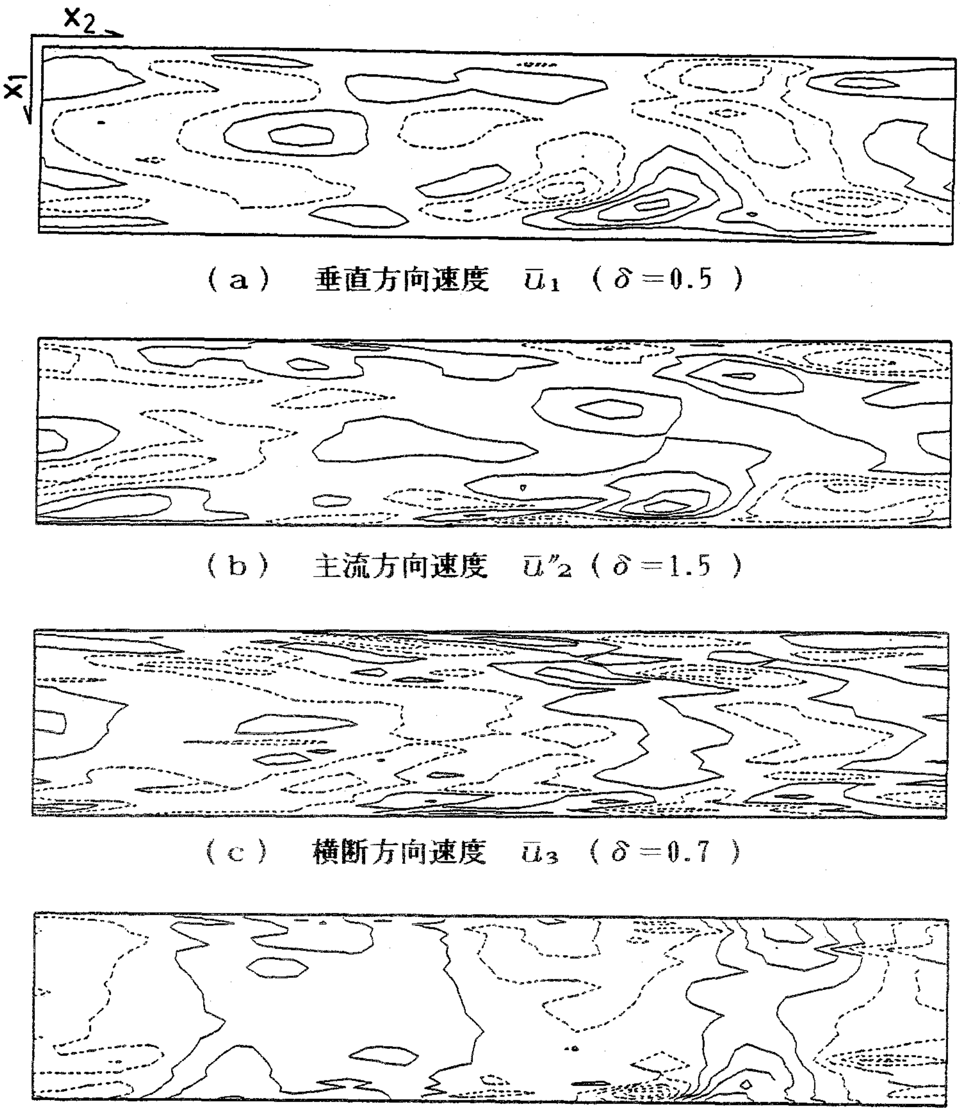
の変動の強さ《$\overline{\omega}''_k{}^2$》$^{1/2}$を示す．変動の強さに関しては，渦度は速度とは異なり流路中央ではかなり等方的であることがわかる．しかし図２·８からは渦度が局所的な大きい速度勾配によるものか，らせん状に旋回する流れに対応するのかの判別は難しく，渦の存在を調べるには実際の流れ場の観察が必要である．

２・４・２　乱流渦の形態

瞬時的な大スケールの流れ場（large eddy）を等速度，等圧力，等渦度線図や速度ベクトル図により表示する．等高線図においてδは等高線の高さの間隔で，実線は正の値，破線は負の値を表している．流れの一断面を取り出した図では，その位置により様々な形が観察され，図示法の違いによってもかなり印象が異なる．そこで個々の図の詳述は避け，多くの観察をもとに流れの一般的な性質を考察する．

図２·９はx_1-x_2 断面における速度および圧力の変動の分布である．ただし圧力は式(2·12)のR_{kk}を含んだ値である．平均流れは図の右方向で，上辺と下辺は壁面に対応する．図２·９(a)(b)(c) の速度分布の模様には壁付近で生じた渦が主流方向に引き伸ばされた構造がみられる．これに対して図２·９(d) の圧力の乱れの分布は，速度の模様とは異なり，壁からほぼ垂直に発達している．

同じ断面での渦度変動，乱れのエネルギ，レイノルズ応力の分布を図２·１０に示す．図２·１０(a)(b)の渦度の乱れは壁近傍に集中している．図２·１０(a) の主流方向に軸をもつ縦渦の図には壁面上から流路内側方向へと逆符号の渦度が交替で現れる階層構造がみられる．図２·１０(b) の紙面に垂直な方向に軸をもつ渦度については Brodkeyら[10][31]のいう大規模な横渦よりも壁近傍の速度勾配の変動による渦度の方が目立つ．図２·１０(c) の乱れエネ



(a)　垂直方向速度　$\bar{u}_1$　($\delta=0.5$)

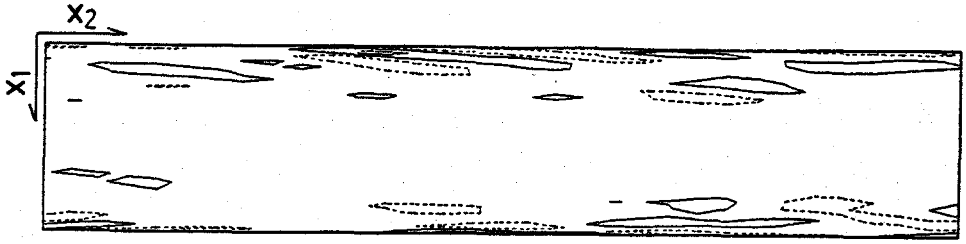
(b)　主流方向速度　$\bar{u}''_2$　($\delta=1.5$)

(c)　横断方向速度　$\bar{u}_3$　($\delta=0.7$)

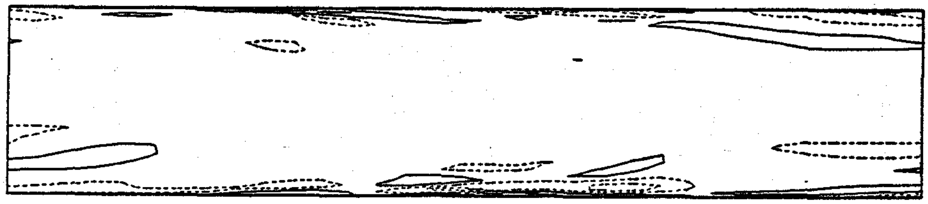
(d)　圧力　$\bar{p}''$　($\delta=1.0$)

図2・9　大規模乱流渦（ large eddy ）の x_1-x_2 断面の例 ($x_3=0.3$)

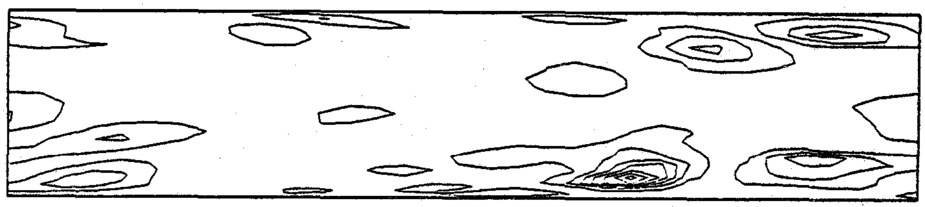
ルギや図2・10(d) のレイノルズ応力の分布は局所的に大きな値をもつ．このような間欠性を考慮しないことが，レイノルズ平均をとるモデルで乱流を普遍的に記述し得ない大きな原因であろう．また例えば図の下半分（ $0.5<x_1<1$ ）においては図2・9(a) の $\bar{u}_1$ と図2・9(b) の $\bar{u}''_2$ の強い変動には



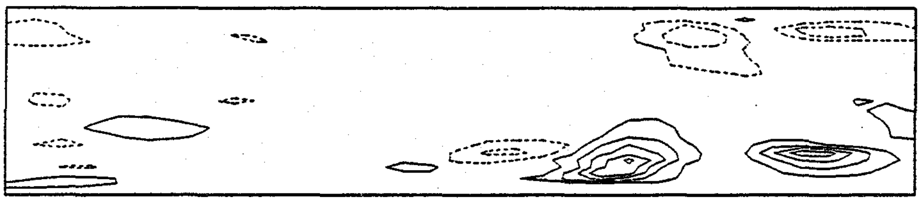
（a） 渦度（縦渦） $\overline{\omega}_2$ （δ＝40.）



（b） 渦度（横渦） $\overline{\omega}''_3$ （δ＝60.）



（c） 乱れのエネルギ $\overline{q}^2$ （δ＝3.0）



（d） レイノルズ応力 $\overline{u}_1\overline{u}''_2$ （δ＝1.5）

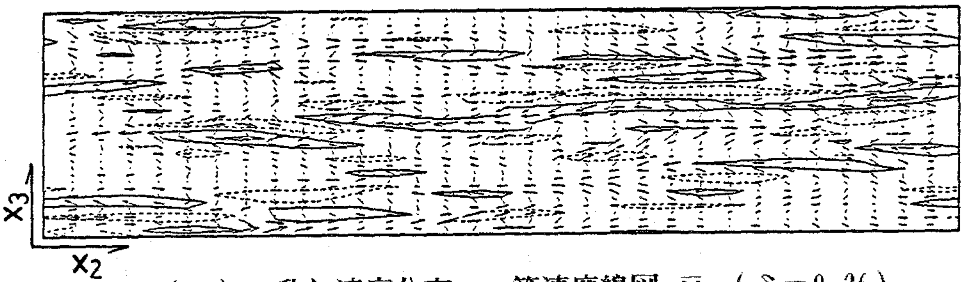
図2・10 大規模乱流渦（ large eddy ）のx_1-x_2 断面の例
（x_3＝0.3）

両者の符号が一致することが多く，その部分では図2・10(d) の変動速度の積$\overline{u}_1\overline{u}''_2$が大きな正の値をもっている．これらはイジェクションとよばれる低速流体の壁からの噴出（$\overline{u}_1<0$，$\overline{u}''_2<0$）とスイープとよばれる高速の壁向き流れ（$\overline{u}_1>0$，$\overline{u}''_2>0$）に対応し，このような速度の相関が

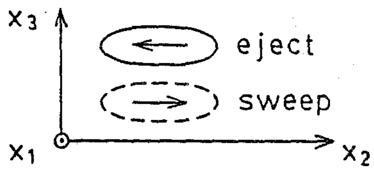
図２･５に示した乱流せん断応力に大きく貢献していることがわかる．なお図の上半分ではイジェクションは（$\overline{u}_1>0$，$\overline{u}''_2<0$），スイープは（$\overline{u}_1<0$，$\overline{u}''_2>0$）で記述され，これらは共に$\overline{u}_1\overline{u}''_2$が負の値となり乱流せん断応力に寄与している．

図２･１１は平板に平行なx_2-x_3平面内の流れで，壁にごく近い位置（$x_1^+=10.8$）での一例である．平均流れは図の右向きとなる．図２･１１(a）では$\overline{u}_1$を等速度線図で，（$\overline{u}''_2$，$\overline{u}_3$）をベクトルで表している．図２･１１(b）のように判別されるイジェクションとスイープが随所にみられる．両者が隣り合って起こり，スイープで流れ込んだ流体がイジェクションで巻き上がり互いに流れを供給しているところでは乱れのエネルギやレイノルズ応力が特に大きく乱流生成が活発である．図２･１１(c）の主流方向速度の乱れの分布には可視化実験[23]で観察されたものと同様の縞構造が現れている．後に$\overline{u}''_2$の自己相関により定量化するが，この構造の壁指標でみる横断方向の幅λ_3^+は100～120となっていることがわかる．図２･１１(d）の圧力分布は速度分布のように主流方向に長く引き伸ばされた構造になっていないが，このことは実験的に知られている事実と一致する．図２･９(d），図２･１１(d）にみられるように，圧力分布が速度変動の局所的な構造に必ずしも対応しない理由は，圧力が理論的にはポアソンの式の積分解とみることができ，遠方の速度変動の影響も反映する場となっているからであると解釈できる．スイープとイジェクションが隣り合う場所では，図２･１１(e）の渦度$\overline{\omega}_2$の分布から縦渦が形成されていることがわかるが，そこでは図２･１１(f）のレイノルズ応力が非常に大きい．流路中央におけるx_2-x_3断面の流れを図２･１２に示す．この位置では壁近傍の縞構造は消滅している．しかし流路中央においても，速度の乱れの分布が主流方向に引き伸ばされた形になっており，非等方性は大きい．このことからも，本計算は比較的低レイノルズ数乱流を扱うため壁の影響

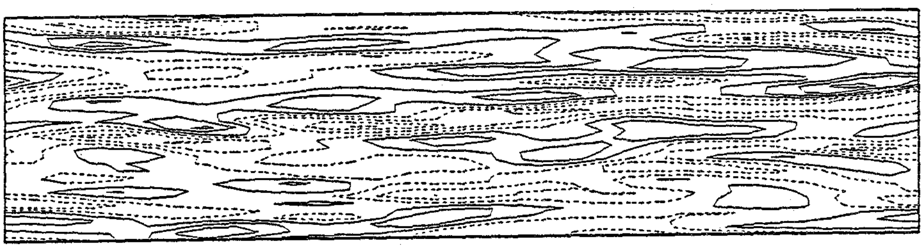
が流路中央に及んでいることがわかる.



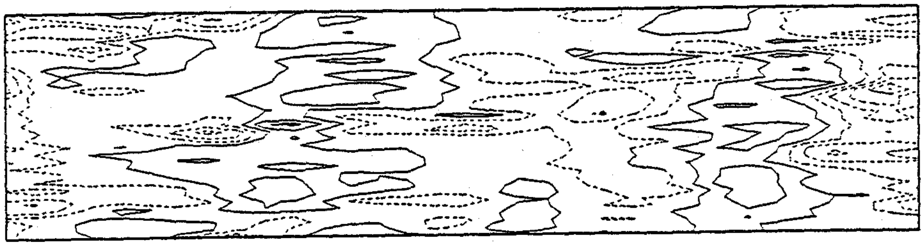
(a)　乱れ速度分布　　等速度線図 $\bar{u}_1$ ($\delta=0.26$)
ベクトル　($\bar{u}''_2$, $\bar{u}_3$)



(b)　スイープとイジェクション

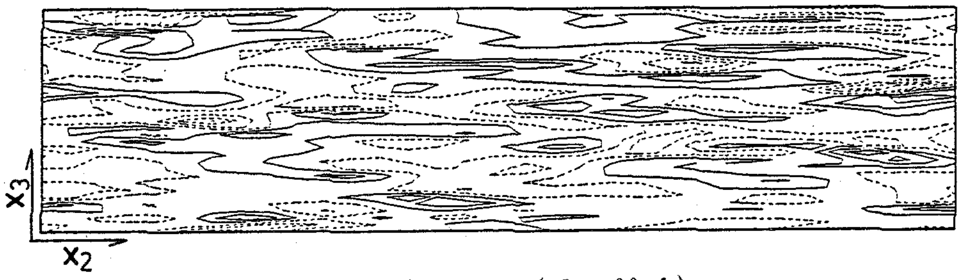


(c)　主流方向速度　$\bar{u}''_2$ ($\delta=1.52$)

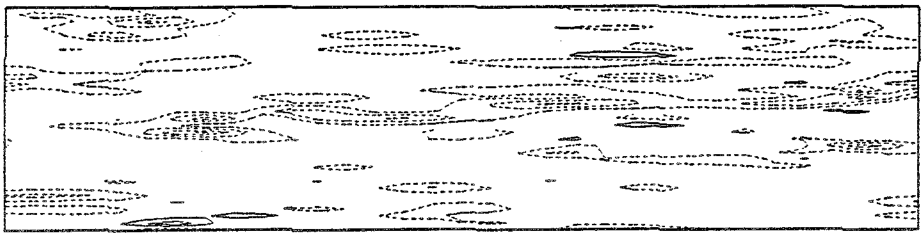


(d)　圧力　$\bar{p}''$　($\delta=1.41$)

図2・11　大規模乱流渦 (large eddy) の x_2-x_3 断面の例 (続く)
(壁付近　$x_1=0.022$,　$x_1^+=10.8$)

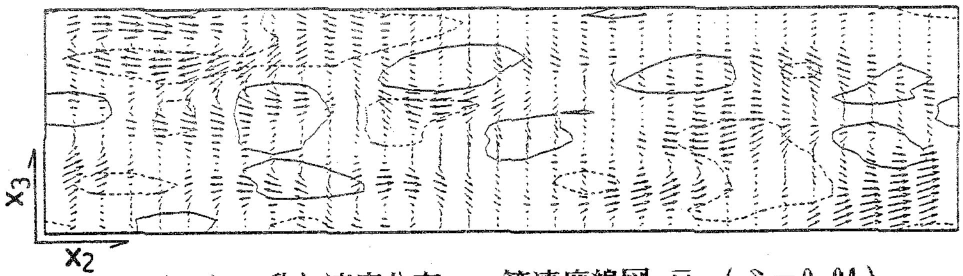


（e） 渦度（縦渦） $\overline{\omega}_2$ （$\delta=29.4$）

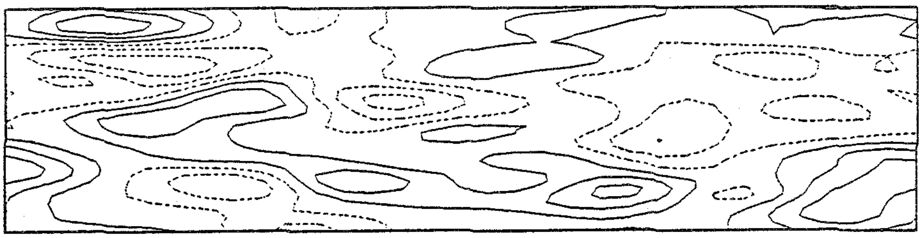


（f） レイノルズ応力 $\overline{u}_1\overline{u}''_2$ （$\delta=0.50$）

図2・11 大規模乱流渦（ large eddy ）のx_2-x_3 断面の例（続き）
（壁付近 $x_1=0.022$, $x_1^+=10.8$）



（a） 乱れ速度分布 等速度線図 $\overline{u}_1$（$\delta=0.94$）
ベクトル （$\overline{u}''_2$, $\overline{u}_3$）



（b） 主流方向速度 $\overline{u}''_2$（$\delta=0.79$）

図2・12 大規模乱流渦（ large eddy ）のx_2-x_3 断面の例
（流路中央 $x_1=0.5$, $x_1^+=250.$）

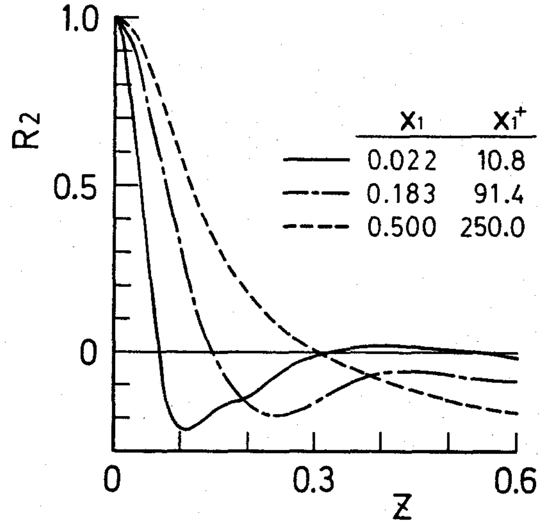


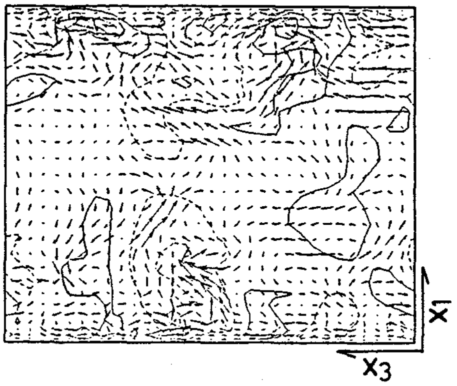
図２・１３　主流方向速度乱れの横断方向自己相関

図２･１３は主流方向速度乱れの横断方向への自己相関

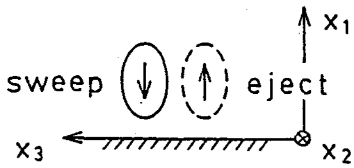
$$R_2(z)=\frac{\langle\langle \overline{u}''_2(x_1,x_2,x_3)\,\overline{u}''_2(x_1,x_2,x_3+z)\rangle\rangle}{\langle\langle \overline{u}''^2_2\rangle\rangle} \qquad (2\cdot44)$$

を，横断方向の計算領域の半分$H_3/2$までとったものである．実線は図２･１１，破線は図２･１２の位置に対応する．壁近傍ではz～0.1 で明瞭な極小値を示す．図２･１１(c) の観察と合わせて判断すると，この距離は縞構造の横断方向のスケールの半分に相当する．壁指標では 100～120 で，実験的に知られている規模λ_3^+〔24〕と同程度となっている．壁から離れるに従いこのような極小値が不明瞭になっていることから，この構造は崩れ，大規模な乱流渦に移行していることがわかる．

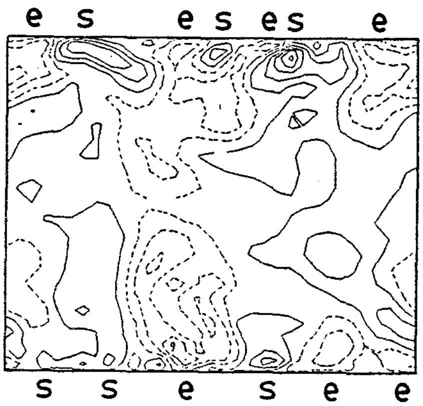
図２･１４は平均流に直交するx_1-x_3 断面内の乱れを示す．上辺と下辺が壁に相当する．図２･１４(a) は$\overline{u}''_2$を等速度線図，（$\overline{u}_1$，$\overline{u}_3$）をベクトルで表している．下側のx_1＝０の壁近くのスイープおよびイジェクションは



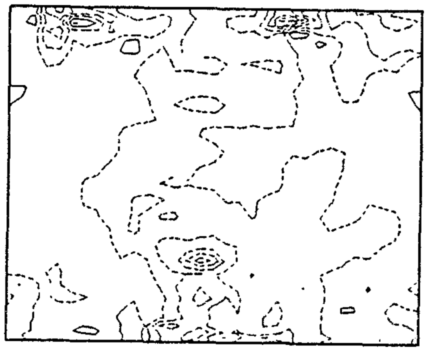
（a） 乱れ速度分布
等速度線図 $\overline{u}''_2$ （ δ =3.0 ）
ベクトル （ $\overline{u}_1, \overline{u}_3$ ）



（b） スイープとイジェクション

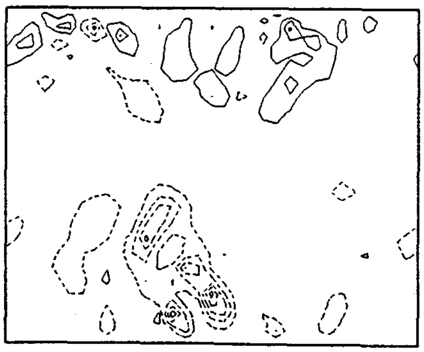


（c） 主流方向速度
$\overline{u}''_2$ （ δ =1.5 ）



（d） 圧力
$\hat{p}''$ （ δ =1.0 ）

（e） 渦度（縦渦）
$\overline{\omega}_2$ （ δ =40. ）

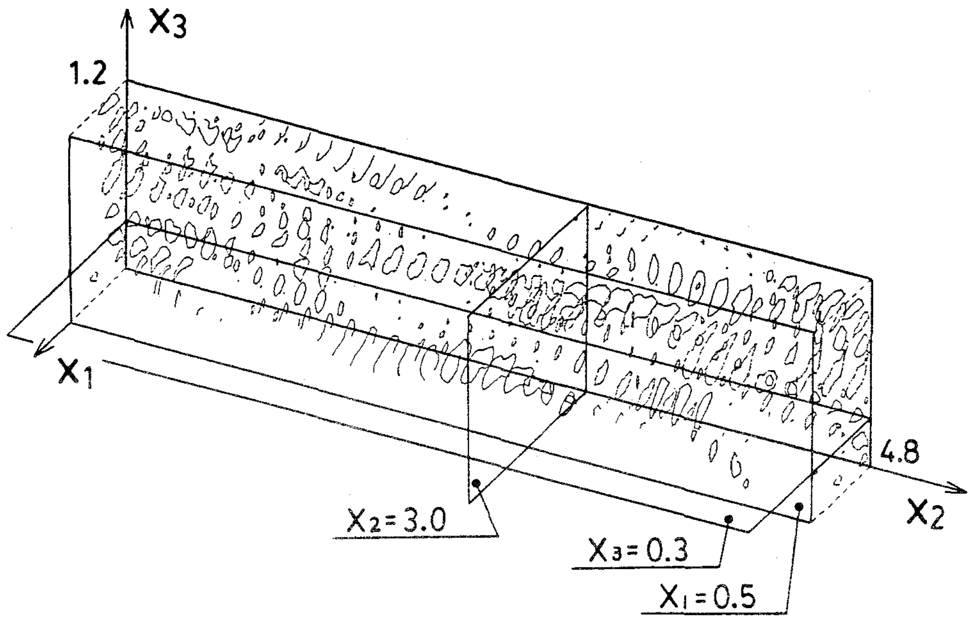


（f） レイノルズ応力
$\overline{u}_1\overline{u}''_2$ （ δ =1.5 ）

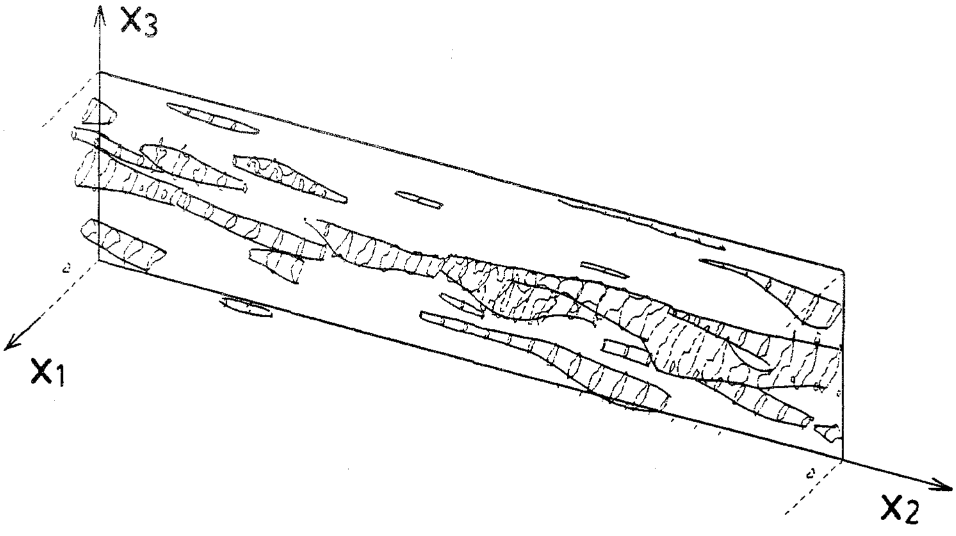
図2・14 主流に垂直な x_1-x_3 断面の大規模乱流渦（ large eddy ）
の例 （ x_2 =3.0 ）

図２·１４(b) のように判別される．紙面に垂直な主流方向速度の乱れの図２·１４(c) には，スイープ（ｓ）とイジェクション（ｅ）の位置を示した．スイープとイジェクションが隣り合う部分では旋回する流れが観察され，縦渦の存在が確認できる．しかしこのような大規模な旋回流れは図２·１４(e) の渦度$\overline{\omega}_2$ の分布をみると，渦度が特に大きいわけではない．図２·１４(d) の断面でも圧力変動は壁から垂直に発達している状況がわかる．

図２·１５はx_1-x_3 断面の$\overline{u}''_2$の等速度線図をx_2 方向にN_2＋１枚連ねて，流れ場の全容の表示を試みたものである．図２·１５(a) にはこれまでに示した各断面位置を図示した．（図２·９は$x_3=0.3$ ，図２·１２は$x_1=0.5$ ，図２·１４は$x_2=3.0$ ） 煩雑になるのを避けるため，流れ場の半分（$x_1<0.5$ ）だけを示した．さらに図２·１５(b) では低速部（$\overline{u}''_2<-2.5$ ）のみを抽出し，輪郭を結んで低速流体塊を表示した．壁に沿って主流方向に長く引き伸ばされた構造が観察される．この図ではかなり強い変動のみが取り出されているので空白部も多いが，図２·１１にみられるようにこの領域も細かい渦で満たされている．流れ場の各断面を観察すると，その形状は様々な歪んだ形をしており，整構造は決定論的に進行するといってもその過程で大きく変形を受けていることがわかる．



（ａ）　$0 < x_1 < 0.5$ の領域の大規模渦（ $\delta = 5.0$ ）



（ｂ）　低速流体塊（ $\bar{u}''_2 < -2.5$ ）

図２・１５　大規模渦（ large eddy ）

2・5　乱流生成機構

大スケールの乱れ速度の二重相関$\overline{u}''_i\,\overline{u}''_j$の保存式は次のように表される．

$$\frac{\partial \overline{u}''_i\,\overline{u}''_j}{\partial t} = -\left\{ \overline{u}_1\overline{u}''_i \frac{\partial \langle \overline{u}_j \rangle}{\partial x_1} + \overline{u}_1\overline{u}''_j \frac{\partial \langle \overline{u}_i \rangle}{\partial x_1} \right\}$$

$$-\overline{u}_k \frac{\partial \overline{u}''_i\,\overline{u}''_j}{\partial x_k} - \left(\overline{u}''_i \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_j} + \overline{u}''_j \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} \right)$$

$$+\left(K_H + \frac{1}{Re^*} \right) \frac{\partial^2\, \overline{u}''_i\,\overline{u}''_j}{\partial x_k\, \partial x_k} - 2\left(K_H + \frac{1}{Re^*} \right) \frac{\partial \overline{u}''_i}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{u}''_j}{\partial x_k}$$

$$+\ C_{ij} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2\cdot45)$$

右辺は順に生成，対流，速度と圧力の相関，拡散，および消散の各項である．C_{ij}には小スケール渦や式(2･41)のレナード応力〔7〕による対流項が含まれ，次のように表される．

$$C_{ij} = -\left(\overline{u}''_i \frac{\partial L_{jk}}{\partial x_k} + \overline{u}''_j \frac{\partial L_{ik}}{\partial x_k} \right)$$

$$+\left(\frac{\partial \overline{u}''_i\,\overline{u}''_j}{\partial x_k} + \overline{u}''_i \frac{\partial \overline{u}''_k}{\partial x_j} + \overline{u}''_j \frac{\partial \overline{u}''_k}{\partial x_i} \right) \frac{\partial K_H}{\partial x_k}$$

$$-\ \frac{1}{3}\left(\overline{u}''_i \frac{\partial R_{kk}}{\partial x_j} + \overline{u}''_j \frac{\partial R_{kk}}{\partial x_i} \right) + \left(\overline{u}''_i\, A_j + \overline{u}''_j\, A_i \right)$$

$$A_i = \delta_{i2} \left\langle \overline{u}_k \frac{\partial \overline{u}''_2}{\partial x_k} + \frac{\partial L_{12}}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_1} K_H\, \overline{D_{12}''} \right\rangle$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2\cdot46)$$

大スケール速度変動のエネルギ

$$\overline{q}^2 = \frac{1}{2}\, \overline{u}''_i\, \overline{u}''_i \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2\cdot47)$$

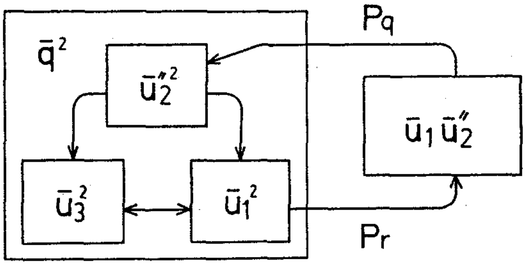


図２・１６　乱流生成のサイクル

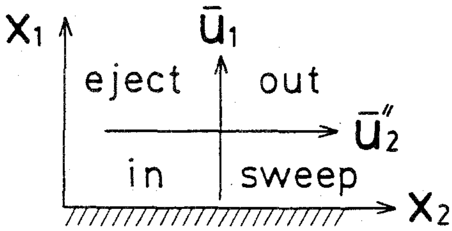


図２・１７　$\bar{u}_1, \bar{u}''_2$の符号による分類

の生成項P_qとレイノルズ応力$\bar{u}_1\bar{u}''_2$の生成項P_rはそれぞれ

$$P_q = -\bar{u}_1\bar{u}''_2 \frac{\partial \langle \bar{u}_2 \rangle}{\partial x_1} \quad \cdots\cdots (2\text{-}48)$$

$$P_r = -\bar{u}_1{}^2 \frac{\partial \langle \bar{u}_2 \rangle}{\partial x_1} \quad \cdots\cdots (2\text{-}49)$$

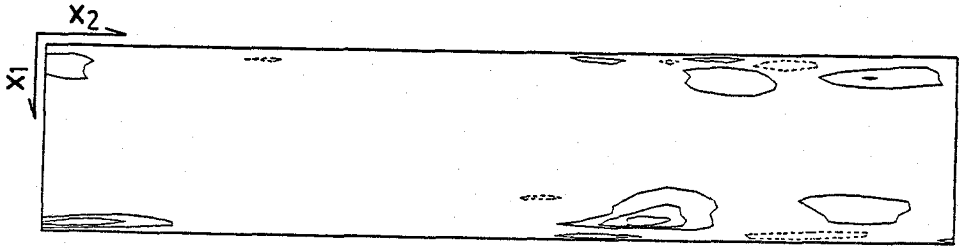
である．これらは局所的な乱れが平均速度勾配から受け取る乱れのエネルギとレイノルズ応力を表している．生成項を中心とした乱れの生成サイクルを図２･１６に示す．q^2 枠内の各方向のエネルギの分配は主として速度と圧力の相関項による．生成項P_q，P_rによるサイクルの促進が，拡散や消散による損失を上回るとき，乱れは活発になる．

２・５・１　スイープとイジェクションの構造

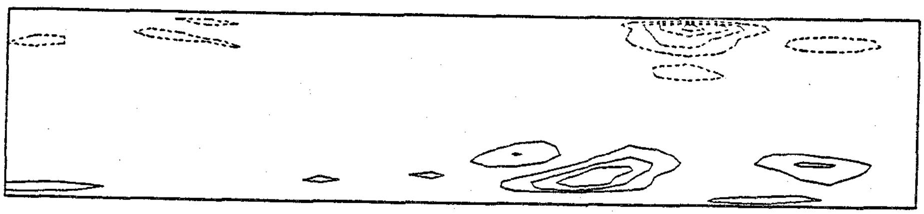
本節では便宜上x_1＝０側の壁面を中心に述べる．$\bar{u}_1$と$\bar{u}''_2$の符号により

図2·17のように分類すれば，スイープは（$\bar{u}_1<0$，$\bar{u}''_2>0$），イジェクションは（$\bar{u}_1>0$，$\bar{u}''_2<0$）の象限に属する．その他は内向き，外向きのインターアクション〔28〕である．

図2·18，図2·19にはそれぞれ図2·9，図2·14と同じ断面での

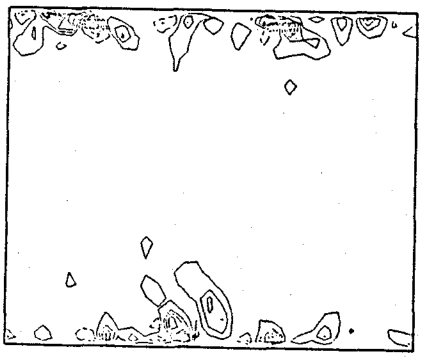


（a） 乱れのエネルギの生成 Pq（$\delta=70.$）

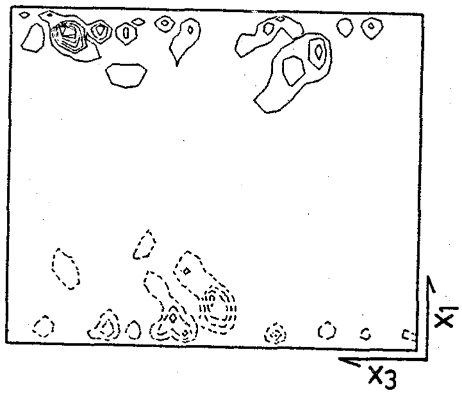


（b） レイノルズ応力の生成 Pr（$\delta=20.$）

図2・18 乱れの生成（x_1-x_2 断面）



（a） 乱れのエネルギの生成 Pq（$\delta=70.$）



（b） レイノルズ応力の生成 Pr（$\delta=20.$）

図2・19 乱れの生成（x_1-x_3 断面）

乱れのエネルギ$\overline{q}^2$およびレイノルズ応力$\overline{u}_1\overline{u}''_2$の生成項$P_q$，$P_r$の分布を示す．他の断面における観察もあわせて次のような結果を得た．

（１）　いずれの分布も非常に間欠的である．

（２）　レイノルズ応力の生成は，スイープではその中心で，イジェクションでは壁の近くで著しい．

（３）　乱れのエネルギの生成はレイノルズ応力の生成の中心よりも壁の近くで顕著である．

そこでスイープとイジェクションの構造を図２·２０にまとめた．

これらの過程は以下のように説明できる．

（１）　スイープ　　壁に近づく流れが生じたとすると，その流体塊は速度の小さい領域へ向かうので相対的に高速となり，乱れのエネルギをもつので図２·１６のサイクルが開始する．$\overline{u}_1\overline{u}''_2<0$のため$P_q$はこれを促し，$\overline{u}_1$（＜０）と$\overline{u}''_2$（＞０）はますます発達してスイープ現象となる．壁の近くでは$\overline{u}_1$は壁にさえぎられるのでP_rは小さくなるが，P_qは持続する．このため大きな横断方向速度$\overline{u}_3$をもってはねかえることがある．Moinら[43]のいうスプラッティングはこのような機構によるものであろう．

（２）　イジェクション　　一方，壁のごく近くで低速流体が壁から離れようとする流れ（リフトアップ）ができる．この原因は圧力勾配[44]あるいは連続の条件[31]から説明されている．あるいはスイープが壁に衝突してはねかえる

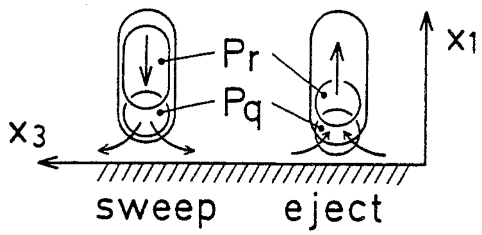


図２・２０　スイープとイジェクションの構造
（x_1-x_3 断面内）

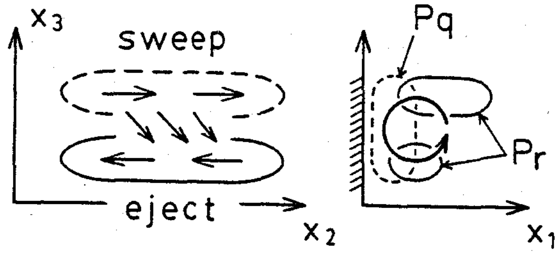
場合もイジェクションの始まりとなりうる．いずれの場合も発端は$\overline{u}_1{}^2$ や$\overline{u}_1\overline{u}''_2$は小さくても，壁の近くで平均速度勾配が大きいため，生成P_q，P_r は相当大きい．すなわち壁から離れる低速流体において図２·１６のサイクルは促進され，イジェクションに発達する．

このように図２·１７のスイープ，イジェクションの象限に属する運動は，局所的な環境から正のフィードバックを受けるようにして，それ自身成長する傾向をもっている．これに対してインターアクションはP_q が図２·１６のサイクルを抑制するように作用するため乱れが発達しにくい．

２・５・２　縦渦と横渦

乱流の生成には縦渦が中心的な役割を果たすとする説(27)(44)(73)と横渦が重要であるという説(10)(31)(74)がある．これらに対して，前節ではスイープ，イジェクションは自ら発達する性質をもっていることを述べた．ここでは数値シミュレーションによる流れの観察結果から縦渦・横渦の解釈を示し，乱れの生成との関連について考察する．

図２·１１には高速のスイープと低速のイジェクションが隣り合った縞構造がみられる．そこでは図２·２１のような縦渦が形成され，スイープとイジェクションが互いに流体を補給し合って持続するので，乱れの生成の中心と



x_2-x_3 断面　　x_1-x_3 断面

図２・２１　縦渦（渦対）の構造

なる．しかし縦渦はスイープやイジェクションの発達した結果として生ずるものであって，縦渦がバーストを引き起こすのではない．

条件付サンプリングの結果，渦対がその間の低速流体を壁から遠ざける流れを起こすという渦対モデルがある〔26〕〔29〕．渦対モデルは平均化したモデルとしては妥当であると考えられる．ところが各断面図にみられるように渦構造は多様で，そのような渦対が瞬時流れとして流れ場に整然として存在するのではないようである．

横渦については，スイープやイジェクションを推進するような強い渦を見い出すことは困難である．本計算で確認できる横渦は，低速流体塊がイジェクションに発達する過程にみられるようなもので， Brodkeyら〔10〕〔31〕の指摘する大規模なものとは異なる．

なお最近になってMoinら〔75〕は渦度場の各断面の観察を通して，馬蹄形渦が瞬時的な流れ場にも存在することを示しているが，この構造と乱流生成機構の関係については明らかにしていない．

２・６　結論

ＬＥＳにより平行平板間の乱流の数値解析を行い，流れ場を三次元的に表示した．また実験的には直接測定が困難な渦度，乱れエネルギやレイノルズ応力，およびそれらの生成を求め，統計量だけでなく分布として示すことにより，流れ場を詳細に観察した．以下に結果をまとめる．まず，

（１）　レイノルズ数が$Re^{*}=500$（R_e ～10000 ）程度であれば，32×32×32の比較的少ない格子数でも壁近傍の重要な構造を解析することができる．

（２）　平均速度や乱れの強さの分布などを測定値と比較し，やや低レイノルズ数乱流の傾向がみられるが，妥当な結果が得られた．

（３）　実験的に知られている壁近傍の縞構造と同程度のスケールの流れ場がシミュレートされた．

以上のことから，本計算結果は現実の乱流を再現しているものと判断できる．また乱流渦の観察によって次のような知見が得られた．

（４）　壁に向かう高速流体や壁から離れようとする低速流体は自らスイープやイジェクションに成長する性質を有しており，推進力としての縦渦，横渦を必要としない．

（５）　スイープとイジェクションが隣り合う部分では，両者の間で流体の補給があるためにこれが持続し，しばしば縦渦が形成され，乱れの生成の中心となる．

また本計算では

（６）　数値解法についてはタイム・マーチングの連立方程式の係数行列を簡略化し，計算の高速化・高精度化を図った．

小スケール乱れの Smagorinskyモデルは一様な乱れに関しては妥当性が確認されているが，強いせん断流れで，格子を十分に細かくとれないときにはモデ

ルの普遍性は確立していない．小スケール渦は平均速度や乱れの強さなど比較的低次の統計量には影響が小さいが，高次の相関量への作用は無視できないので，２方程式モデルや応力方程式モデルの設定や試験にＬＥＳを用いるのは現状では無理がある．ＬＥＳにはこのような問題が残されているが，本計算の結果からみて，現象の物理的な解釈を与えることができるレベルに達していると考えてよい．

第３章　回転流路の乱流の数値解析

3・1　序論

回転する流路における乱流せん断流では，コリオリ力がせん断応力や乱れの強さに影響を及ぼすとともに，二次流れを引き起こすことが知られている．この流れは，体積力の影響する乱流の代表例として関心がもたれており[11]，また遠心羽根車の流路に現れる流れであることから工学的にも興味深い．そのため測定の困難さにもかかわらず，いくつかの実験結果の報告がある．例えばJohnstonら[76][77]は十分に発達したチャンネル乱流，児山ら[78][79]は回転する壁面上に成長する乱流境界層を測定している．これらの実験によると，回転流路の圧力側では，摩擦応力が増すとともに乱れのエネルギーが増加し，また Taylor-Goertler型の渦のような三次元構造が現れる．逆に負圧側では摩擦応力が小さくなり，流れは安定化するという特徴が明らかにされている．

一方レイノルズ平均を扱う乱流モデルによる解析の試みとして，Johnstonら[76]（混合長モデル），Koyamaら[80]（１方程式モデル），Wilcoxら[81]，Howardら[82]（$k-\varepsilon$モデル），益田ら[83]（応力方程式モデル）などの報告がある．

本研究の目的のひとつはＬＥＳを回転流路の乱流に適用して流れ場を予測することである．まず圧力壁面側の二次流れ，負圧壁面側の再層流化などの回転場に特徴的な現象を乱流渦のシミュレーションで再現し得るか，また小スケール乱れのモデルがこのような流れにも適用できるかを検討する．もうひとつの目的は，第２章で示した乱流機構のモデルに基づいて，乱流生成に対するコリ

オリ力の効果を考察することである．回転場では，実験装置内で理想的な流れが実現できるとは限らず，測定も困難である．これに対して数値シミュレーションは条件を任意に設定できる一種の実験であり，その情報量の豊富さから，これまでの実験の成果を補完する知見が期待できる．またレイノルズ方程式に基づく計算に比較して経験的な仮定が少なく，流れの予測には効果的であると考えられる．まず，平均速度，レイノルズ応力，乱れのエネルギーの分布をなどの流れ場の統計平均量に対するコリオリ力の効果を解析する．また混合長，変動速度の自己相関から流路の回転による乱れのスケールの変化を調べる．さらに数値シミュレーションの利点を活用して，乱れの時間的な平均量だけではなく乱流渦に注目し，その挙動に対するコリオリ力の影響を調べる．

なお回転流路の乱流については本研究とは独立に Kim(84)がＬＥＳにより解析を行っているが，著者は本章の研究の終了後に会議の出席者を通して入手し得た．そのため本文中では引用していないが，結果を比較して第３・３節の末尾に示す．

３・２　基礎方程式

図３・１のような一定角速度で回転する無限平行平板間の非圧縮性流体の十分に発達したポアズイユ流れを考える．　座標系は平板と共に回転し，平板に垂直方向に x_1 ，平均流方向に x_2 座標をとり，回転軸は x_3 方向とする．絶対流れを v_i ，相対流れを u_i ，角速度を ω，回転軸からの距離を r で表す．（$v_i = u_i + r\omega$）

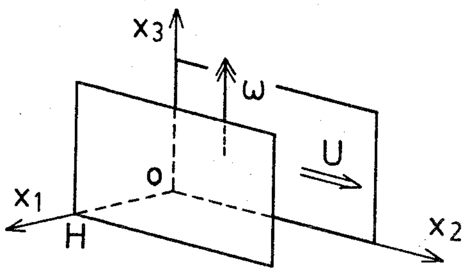


図３・１　回転流路と座標

３・２・１　大スケールの流れ場の支配方程式

図３・１の流路における大スケールの相対流れ $\overline{u}_i$の Navier-Stokesの運動方程式は式(3·1)，連続の式は式(3·2) となる．

$$\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{\overline{u}_i\ \overline{u}_j + R_{ij}}\right) = 2\omega\left(\delta_{i1}\overline{u}_2 - \delta_{i2}\overline{u}_1\right) - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\overline{p} - \frac{r^2\omega^2}{2}\right) + \frac{1}{Re^*}\frac{\partial^2 \overline{u}_i}{\partial x_k \partial x_k} \qquad \cdots\cdots (3\cdot1)$$

$$\frac{\partial \overline{u}_k}{\partial x_k} = 0 \qquad \cdots\cdots (3\cdot2)$$

座標x_iは流路幅Hで無次元化されている．回転時には両壁面上の摩擦応力が異なるので，速度$\bar{u}_i$の無次元化パラメータとしては両壁面（x_1 ＝０，１）での摩擦応力τ_0, τ_1の平均値に対する摩擦速度

$$u^* = \left(\frac{|\tau_0| + |\tau_1|}{2\rho} \right)^{1/2} \qquad (3\cdot3)$$

を用いる．それぞれの壁面上の摩擦速度をu_0^*，u_1^*で表すことにする．

またRe^*は次式で定義されるレイノルズ数である．

$$Re^* = \frac{H u^*}{\nu} \qquad (3\cdot4)$$

さらに時間tはH/u^*，角速度ωはu^*/H，圧力pはρu^{*2}でそれぞれ無次元化されている．

3・2・2　小スケール乱れのモデル

小スケール渦には静止流路に対して用いたものと同様のモデルを設定する．すなわち小スケール乱れを式(2･17)とおき，渦粘性係数K_H, K_Iを式(2･19)，式(2･23)で与える．ただし式(2･21)(2･24)におけるx_w^+には，近い方の壁面までの距離x_wを，その壁面の摩擦速度により$x_w u_0^*/\nu$あるいは$x_w u_1^*/\nu$で無次元化したものを用いる．大スケール渦は流れ場の種類によって変化するが，小規模渦は普遍的な性質を持っていることが知られている．そこで，このモデルを流れ場の特色（この場合はコリオリ力の効果）に応じて変更する必要はないと考え，静止流路の計算例で良好な結果が確認されているSmagorinskyモデル[36]を基礎とする第２章のモデルをそのまま用いた．

3・2・3　コリオリ力の効果

大スケールの乱れ速度によるレイノルズ応力$\langle \bar{u}''_i \bar{u}''_j \rangle$の輸送方程式における（回転の効果を含めた）生成項に注目し，コリオリ力の影響について検討

する〔76〕．レイノルズ剪断応力 $\langle \bar{u}_1 \bar{u}''_2 \rangle$ の生成項 $\langle P_r \rangle$ は

$$\langle P_r \rangle = -\langle \bar{u}_1{}^2 \rangle \frac{\partial \langle \bar{u}_2 \rangle}{\partial x_1} + 2\omega \langle \bar{u}''_2{}^2 - \bar{u}_1{}^2 \rangle \qquad \cdots\cdots (3\cdot5)$$

で，各方向のレイノルズ垂直応力 $\langle \bar{u}''_k \bar{u}''_k \rangle$（縮約をとらない）の生成項 $\langle P_k \rangle$ はそれぞれ

$$\langle P_1 \rangle = 0 + 4\omega \langle \bar{u}_1 \bar{u}''_2 \rangle \qquad \cdots\cdots (3\cdot6a)$$

$$\langle P_2 \rangle = -2 \langle \bar{u}_1 \bar{u}''_2 \rangle \frac{\partial \langle \bar{u}_2 \rangle}{\partial x_1} - 4\omega \langle \bar{u}_1 \bar{u}''_2 \rangle \qquad \cdots\cdots (3\cdot6b)$$

$$\langle P_3 \rangle = 0 + 0 \qquad \cdots\cdots (3\cdot6c)$$

となる．また乱れのエネルギ

$$\langle \bar{q}^2 \rangle = \frac{1}{2} \langle \bar{u}''_i \bar{u}''_i \rangle \qquad \cdots\cdots (3\cdot7)$$

の生成項 $\langle P_q \rangle$ は

$$\langle P_q \rangle = -\langle \bar{u}_1 \bar{u}''_2 \rangle \frac{\partial \langle \bar{u}_2 \rangle}{\partial x_1} + 0 \qquad \cdots\cdots (3\cdot8)$$

である．式(3·5)(3·6)(3·8) の右辺第２項は回転の影響を表す．式(3·5) の第

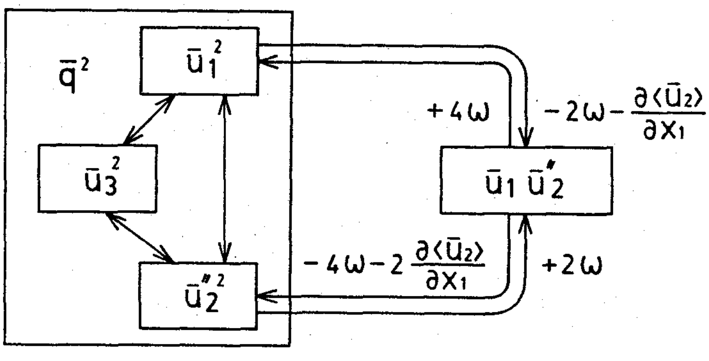


図３・２　回転流路における乱れの生成

２項は乱れに非等方性があるときに回転により付加されるレイノルズ応力である．式(3·8) には角速度ωの項は直接入らないが，レイノルズ応力の増減に応じて，式(3·8) の第１項により乱れのエネルギが変化する．また式(3·6a),(3·6b)の第２項はコリオリ力により乱れの各方向成分間のエネルギのバランスが変化することを表す項である．図３·２は以上の関係を表したもので，乱れのエネルギの各方向成分間の収支は主として速度と圧力の相関によっている．

３・３　流れ場におよぼすコリオリ力の影響

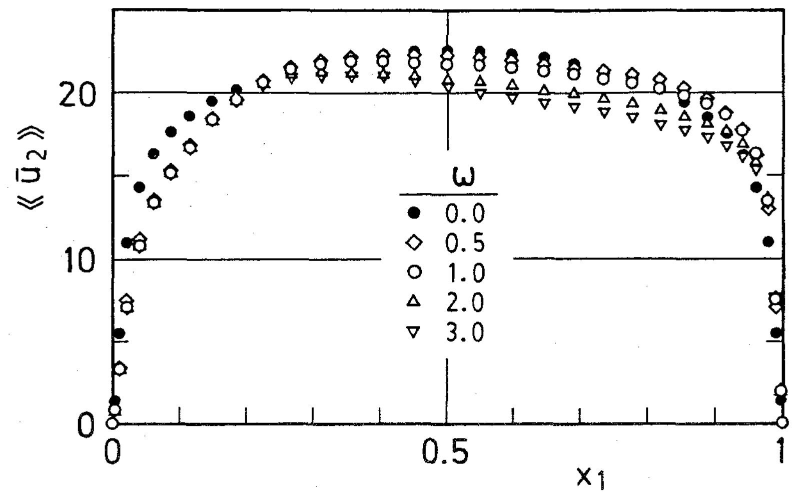
式(3·4) の壁面摩擦速度に基づくレイノルズ数 Re^* を 500に設定し，角速度 ω＝０～３の範囲で計算を行った．数値計算スキームおよび差分格子設定は第２章の静止流路の場合と同様である．ただし運動方程式(3·1) において，コリオリ力の項を非線形項に含めて扱い，これには Leap-frog法を用いる．静止流路のデータを初期値として角速度を与えて計算を開始し，平均速度や乱れ強さの分布などが落ち着くまで続ける．それを初期値としてさらに大きい角速度の計算へと移る．

各角速度について，初期値の状態から平均値が時間的に定常に達するまで時間ステップを進行させた（ 1000 ステップ）．計算領域に匹敵する大きさをもつ乱流渦が現れるので，x_2-x_3 平面内の平均 $\langle u \rangle$ は時間とともに多少変動する．そこで以下では，流れが十分に発達したところで，これをさらに十分長い時間（ 2000 ステップ）で時間平均（ 50 ステップ毎に 40 回の平均）をとった値を平均値とし，《u》の記号を付して示す．

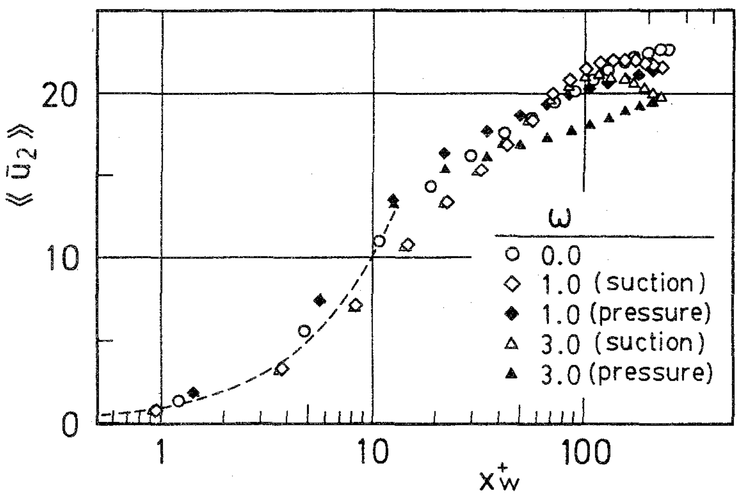
３・３・１　速度分布，乱れの強さと壁面摩擦応力

平均速度分布《u_2》を図３·３に示す．本計算では ω＞０で行われているので，平均コリオリ力は x_1 方向に働き，x_1 ＝０の面が負圧側，x_1 ＝１の壁面が圧力側となる．負圧側では $0 < x_1 < 0.2$ で速度勾配が小さくなり，圧力側壁面のごく近くでは速度勾配が増す．壁面近傍での速度分布は $0 < \omega < 1$ で大きく変化し，$\omega > 1$ ではほとんど変わらない．流路中央付近（ $0.3 < x_1 < 0.8$ ）では，角速度の増加と共に流量は減少し，最大速度の位置は負圧壁側に移る．なお，全流路幅での平均流速 U_{2m} に基づくレイノルズ数

$$Re_m = \frac{H \cdot U_{2m}}{\nu} \qquad (3\cdot9)$$



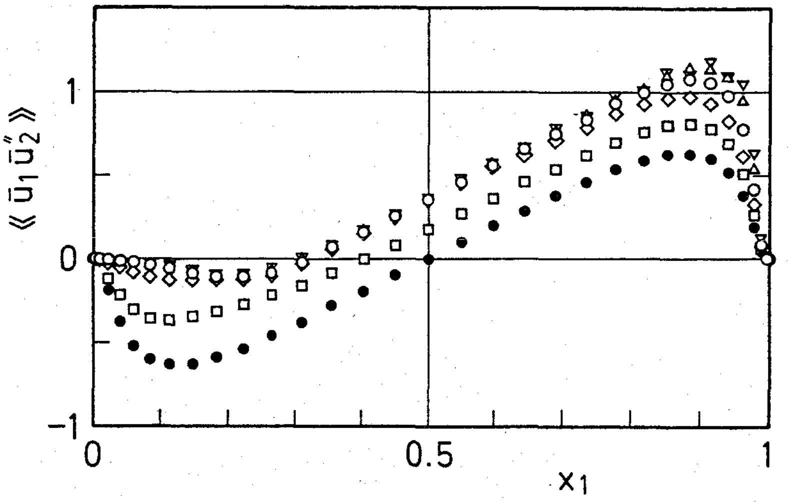
（ａ）　横軸はx_1



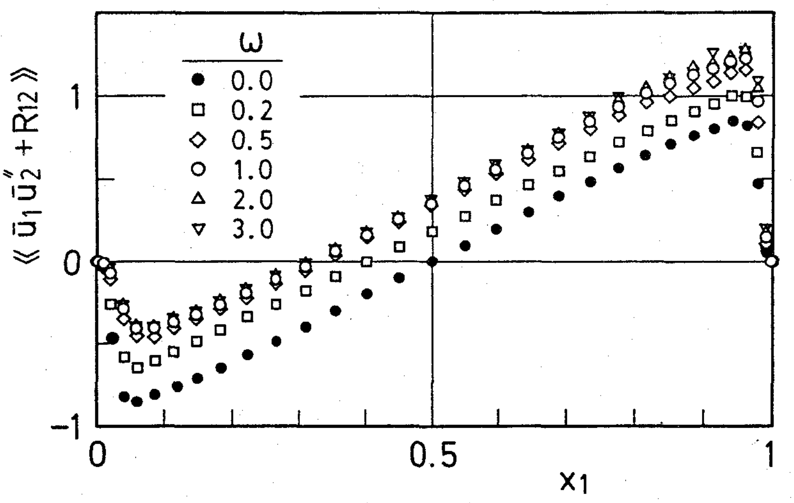
（ｂ）　横軸は Log x_w^+

図３・３　平 均 速 度　《$\bar{u}_2$》

はω＝０のとき 9900 ，ω＝３のとき 9100 となった．図３・３(b) は平均速度分布を横軸をx_w^+ として片対数で示したものである．圧力側ではωの増加とともに粘性底層が薄くなるので，これを解析するための格子数が十分でなくなる．Remが 10000以下のため静止時でやや低レイノルズ数乱流の傾向が見られる．回転を与えると負圧側で対数域が消失するが，圧力側では対数則の領域



（ａ） 大スケール乱れの乱流せん断応力　《$\overline{u}_1\overline{u}''_2$》



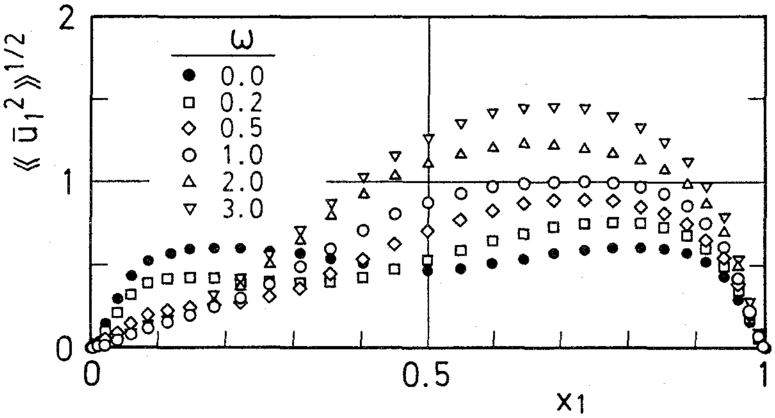
（ｂ） 全てのスケールの乱れによる乱流せん断応力
《$\overline{u}_1\overline{u}''_2+R_{12}$》

図３・４　せん断応力

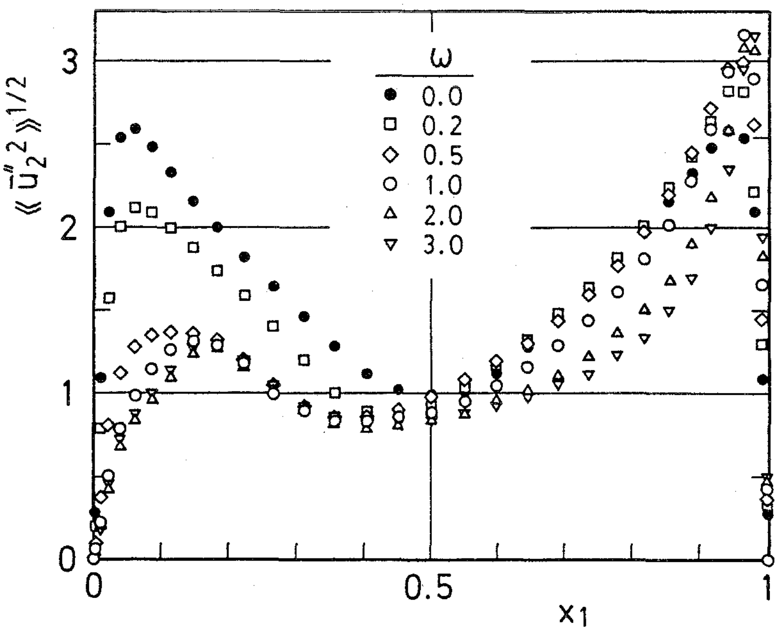
が明瞭になり高レイノルズ数乱流の性質が強くなる．

次にレイノルズ応力分布《$\overline{u}''_i\ \overline{u}''_j$》を示す．図３·４はレイノルズせん断応力で，図３·４(a) は大スケールのみ《$\overline{u}_1\overline{u}''_2$》，図３·４(b) は小スケールの寄与《$R_{12}$》も含めたものである．回転の影響は式(3·5) の第２項か

ら説明できる．すなわち流路全域において主流方向の速度乱れが壁垂直方向の乱れよりも大きい（$\overline{u}''^2_2 > \overline{u}_1^2$）から，レイノルズ応力はωの符号方向（ここでは正方向）へシフトする．このため壁面せん断応力が圧力側では増加し，負圧側では小さくなる．



（a）　垂直方向速度　《$\overline{u}_1^2$》$^{1/2}$



（b）　主流方向速度　《$\overline{u}''^2_2$》$^{1/2}$

図３・５　速度の乱れの強さ

図３・５にはレイノルズ垂直応力の代わりに主流方向と壁に垂直方向の乱れの強さをｒｍｓで示す．壁のごく近くでは速度勾配が大きく，乱れの増減については式(3·6) の第１項が支配的である．圧力側では流路の回転よるレイノルズ応力の増加［図３・４(a)]から，乱れの生成が大きくなる．逆に負圧側では，レイノルズ応力の減衰のために，乱れが著しく減少する．以上のように流路の回転はレイノルズ応力を介して，圧力側では乱れのエネルギを増し，負圧側では流れを安定化させる．

また式(3·6) の第２項は速度の乱れの強さの各方向成分のバランスの変化を示す．例えばレイノルズ応力が正の値ならば，乱れの壁面に垂直方向成分を増加させ，主流方向成分を減少させる．この効果は図３・５では $0.3 < x_1 < 0.8$ で顕著に表れている．角速度が増すと，流路中央付近では壁垂直方向と主流方向速度の乱れの強さが逆転する．そのとき式(3·5) の第２項の符号が交替してレイノルズ応力の上方へのシフトが抑制される．ωが１以上で流れがあまり変化しなくなるのは，このような理由による．

図３・６は圧力$\hat{p}''$ の乱れの強さである．ただし圧力は

$$\hat{p} = \overline{p} - \frac{r^2\ \omega^2}{2} + 2x_2 + \frac{1}{3}R_{kk} \qquad (3\cdot10)$$

のようにR_{kk}を含んでいる．圧力の乱れは圧力側では角速度の増加とともに強くなる．高角速度では流路中央よりやや圧力壁寄りにおいて圧力変動が大きくなる．これは後に図３・１８に示すようにこの位置に生じる大規模渦に伴うものと考えられる．また負圧側では一旦弱くなるが，$\omega > 1$では一転して増加する．これは２・４節で述べたように，圧力は速度変動から求められる量を右辺とするポアソンの式の積分解であるから，大規模渦による圧力変動の影響が流路中央から負圧側までおよんだものであろう．後述のように$\omega > 2$において負圧側では本計算結果は再層流化が実現されておらず，適切でないが，圧力変動

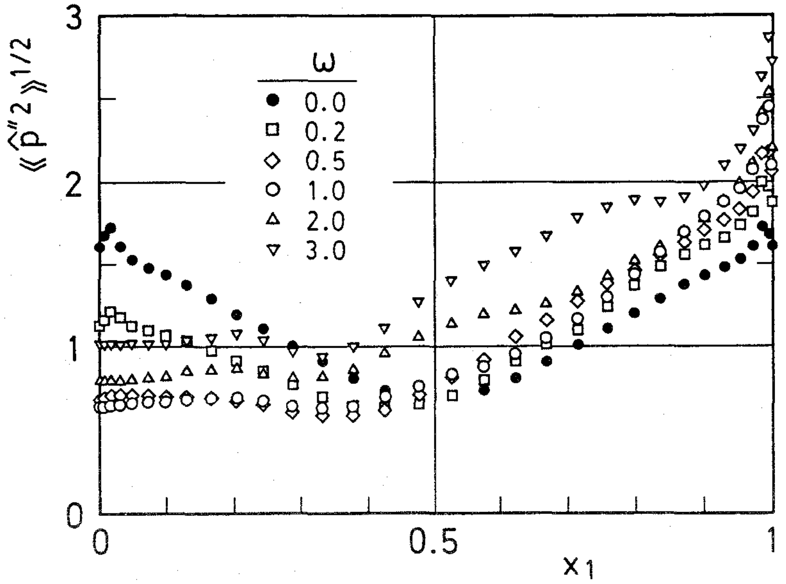


図３・６　圧力の乱れの強さ　《$\hat{p}''^{2}$》$^{1/2}$

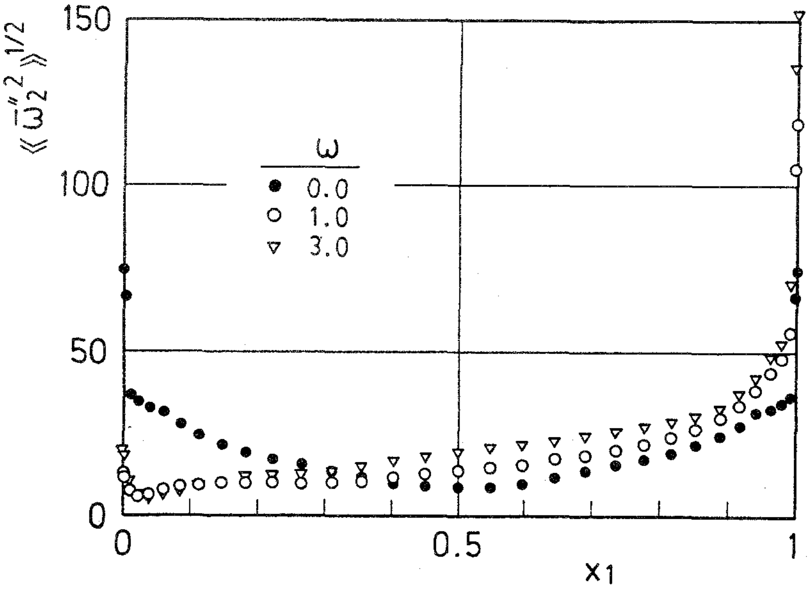


図３・７　渦度の乱れの強さ　《$\overline{\omega}_2$》$^{1/2}$

に関するこのような傾向は定性的に正しいと考える．

図３·７の主流方向の軸をもつ渦度$\overline{\omega}_2$の乱れの強さである．圧力側では活

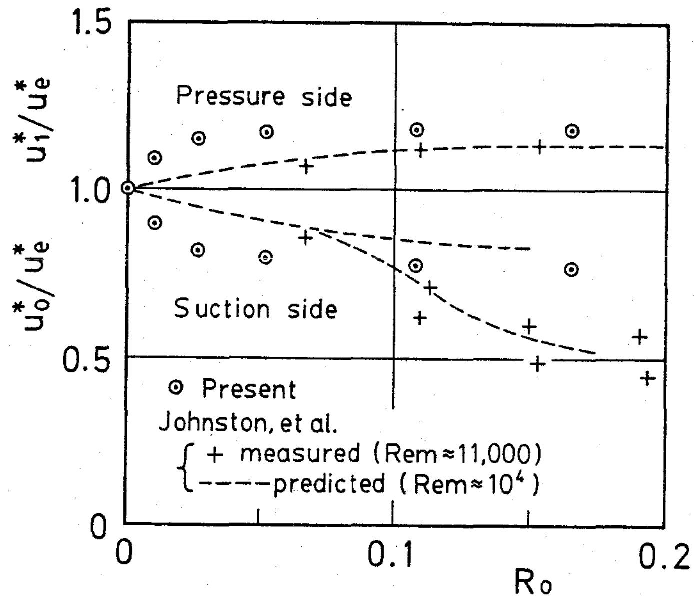


図３・８　壁面摩擦速度に対する流路の回転の影響

発な渦度変動は壁近傍に集中している．後に示す大規模な二次流れの中心は x_1 = 0.6〜0.7 に現れるが，図３・７から判断すると，この部分で渦度が特に大きいわけではない．

回転流路における両側の壁面の摩擦速度と静止時の摩擦速度との比を図３・８に示す．測定値と比較するために，ここでは横軸を平均速度 U_{2m} で無次元化した角速度 R_o

$$R_o = \frac{\omega H}{U_{2m}} \qquad (3\cdot11)$$

とした．図中の破線はレイノルズ数 R_{em}〜10000 のときのJohnstonら[76]による測定値を結ぶ予測線で，負圧側では完全な乱流の場合と層流に遷移する場合が示されている．R_o が 0.1付近では測定値と比較して良好な結果が得られている．それ以上の角速度では，Johnstonらのデータには負圧側で層流化による摩擦応力の著しい低下が見られるが，本計算結果は乱れは減衰するが摩擦応力の変化は小さい．この原因はＬＥＳモデルの式(2·17)の右辺第２項にあると考

えられる．乱れが減衰すると，小スケールの渦粘性係数のうち，式(2·19)の変動速度によるK_Hは非常に小さくなるが，式(2·23)の平均速度勾配に起因するK_Iは存在する．この小規模渦の消散作用に釣り合う大スケール渦が必要なため，完全な層流とはならない．換言すればSmagorinskyモデルは，主流が乱流であることを前提としているために，層流となる流れには対応できないことになる．逆遷移を生ずる程度の低レイノルズ数に対して式(2·24)による修正はなお不十分であると考えられ，今後の検討が必要である．

また本解法では流路の回転の影響が小さい角速度で現れる傾向がある．この理由は，主流方向乱れと壁に垂直方向の乱れの強さの差が大きいことから，式(3·5)の第２項によるレイノルズ応力の上方へのシフトが低角速度で起こるためである．両方向の乱れのエネルギの差が大きいことの原因には，第一には，本計算は比較的低レイノルズ数の乱流で行われていることがあげられる．すなわち図２·６にみられるように壁近傍の非等方性が流路中央付近まで達しているために，式(3·5)の第２項の効果が現れやすい．第二に，とくに壁面近くで，乱れのエネルギの壁に垂直な方向の成分が主流方向成分に比べて小さいことは，ＬＥＳの計算結果にみられる共通した傾向でもある[43]．これは，非等方性のある乱れに対して式(2·17)のように小規模乱れのエネルギを３方向に等配分したため，壁垂直方向には与えすぎとなった結果，同方向の大スケール乱れが小さく算出されるからであると考えられる．

ここで本計算法の適用範囲について検討する．圧力側壁面近くでは速度勾配が増し，また主流方向速度の乱れが回転の増加とともに極大値の位置は壁に近づく．このため境界壁近傍では非常に密な格子が必要になる．また図３·４のレイノルズ応力分布を見ると$\omega=3$では圧力側では解が乱れ始める．従ってレイノルズ数$Re^*=500$のとき，数値計算の精度の観点からは本スキームの適用は$|\omega|<3$に制限される．また図３·８にみられるようにR_oが0.1以上で

生じる負圧側の再層流化を適切に予測できないことから，従来のＬＥＳモデルを修正なしで用いた場合の適用範囲は｜ω｜＜２である．

３・３・２　乱れのスケール

図３·９は回転時と静止時の混合長の比 l/l_0 である．横軸にはBradshaw〔11〕の示した，Richardoson数

$$R_i = 2\omega \frac{\partial\langle u_2\rangle/\partial x_1 + 2\omega}{(\partial\langle u_2\rangle/\partial x_1)^2} \qquad (3\text{-}12)$$

を用いた．図には比較のために Richardoson数による混合長の補正モデル〔11〕

$$\frac{l}{l_0} = \frac{1}{1+\beta R_i} \qquad (3\text{-}13)$$

あるいは

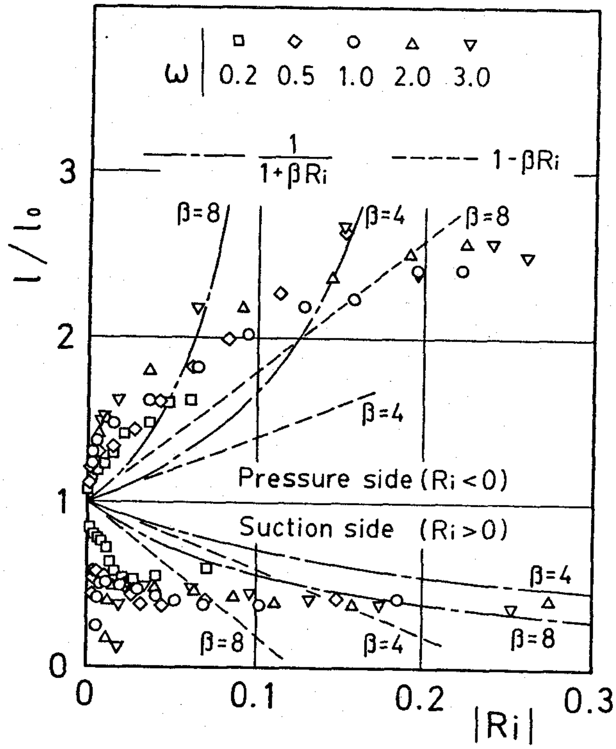
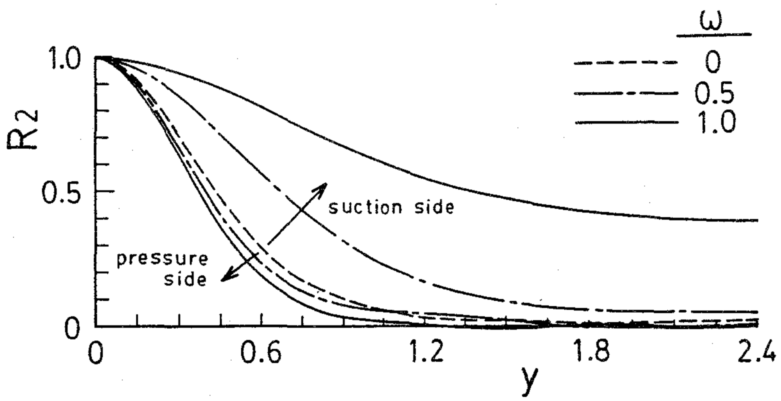


図３・９　回転時と静止時の混合長比

$$\frac{l}{l_0} = 1 - \beta R_i \qquad \text{(3·14)}$$

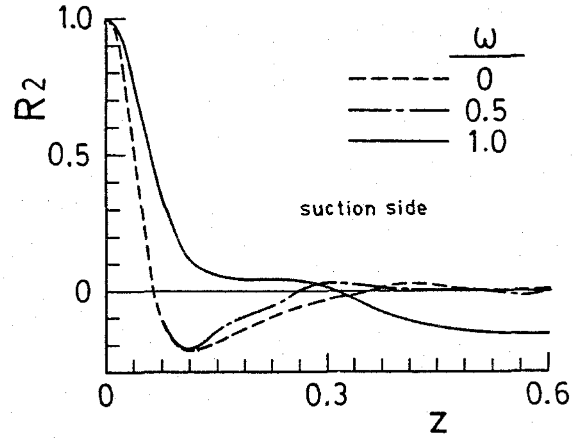
を加えた．Johnstonら〔76〕によれば，この補正は｜R_i｜＜ 0.25 の範囲で，壁領域の流れが完全な乱流である場合に限定され，Monin-Obkhov定数βは６±２とされている．圧力側では混合長が増し，渦粘性が大きくなっている．負圧側では逆に渦粘性が小さくなり層流に近くなるが，完全な再層流化はシミュレートされていないので０とはならない．計算で得られたl／l_0 ～R_i の関係は壁近傍で立ち上がりが大きく，式(3·13)の線よりも変化が大きくなっている．これは，本計算結果は低レイノルズ数乱流の傾向があり，３·３·１節に述べたように回転の影響が現れやすいことに対応している．このため計算結果から式(3·13)の是非を判断することは無理があるが，低レイノルズ乱流数では同式に何らかの修正が必要であることが推察される．

ここでは主流方向と横断方向に変動速度の自己相関をとり，乱れのスケールや周期性に対する流路の回転の影響を調べる．図３·１０(a) は主流方向にyだけ隔たった２点の主流方向乱れ速度の自己相関

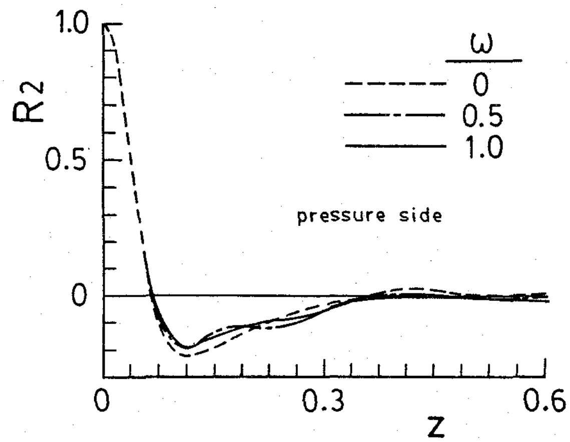


（ａ）　主流方向への２点相関　R_2（y）

図３・１０　主流方向速度の自己相関係数（続く）



（b） 横断方向への２点相関 $R_2(z)$ （負圧側）



（c） 横断方向への２点相関 $R_2(z)$ （圧力側）

図３・１０ 主流方向速度の自己相関係数（続き）

$$R_2(y)=\frac{\langle\langle \bar{u}''_2(x_1,x_2,x_3)\,\bar{u}''_2(x_1,x_2+y,x_3)\rangle\rangle}{\langle\langle \bar{u}''^2_2\rangle\rangle} \qquad (3\cdot15)$$

を，圧力側と負圧側のそれぞれの壁面から 0.022離れた位置で求めたものである．なお横軸の目盛りは格子幅で刻まれている．回転が加わると圧力側では相関曲線が速やかに０に近づき，乱れのスケールが小さくなっていることがわかる．逆に負圧側では相関の下がり方が緩やかで，また渦粘性が非常に小さく

なっていることから，層流に近い弱くて大きな変動となっていることがみとめられる．

また横断方向にzの距離の２点の主流方向乱れ速度の自己相関

$$R_2(z)=\frac{\langle\langle \overline{u}''_2(x_1,x_2,x_3)\,\overline{u}''_2(x_1,x_2,x_3+z)\rangle\rangle}{\langle\langle \overline{u}''^2_2\rangle\rangle} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3\cdot16)$$

を圧力側と負圧側に分けて図３・１０(b),(c) に示した．壁からの距離は図３・１０(a) と同じである．この最初の極小値の位置$z\sim0.1$ は縞構造[23]の横断方向スケールの半分に対応する．圧力側では，高レイノルズ数乱流の様相となるので縞構造のスケールはやや小さくなるが，壁付近のこの構造は変化しない．一方負圧側において$\omega=1$では静止流路で見られたような相関曲線の著しい極小値は消える．この縞構造の消失はバーストの発生率の著しい低下の結果とみられる．したがって完全な再層流化は実現されていないものの，ほとんど層流に近い状態となっていることが確かめられる．

序論（３・１節）で述べたように，本研究とは独立に Kim[84]も回転流路の乱流にＬＥＳを適用している．ここで本研究の結果との差異を簡単に示す．Kim は本計算（$Re^*=500$, 32×32×32）よりも高レイノルズ数で大規模な計算（$Re^*=1280$, 64×64×128 の格子）を行っている．その結果によると，$R_o<0.1$ で摩擦応力の変化は実験と比較して良好で，混合長の補正式(3・14)の適合性についても肯定的である．この差異は，本研究では低レイノルズ数の影響を文中でも述べているが，レイノルズ数の差によるものであると考えられる．また Kimの結果では$R_o>0.1$ のデータは示されておらず，負圧側の再層流化の問題には言及されていない．なお，次節の乱流生成機構についての議論は本研究独自のものである．

3・4　乱れの構造と乱流生成に対するコリオリ力の効果

乱流渦の挙動を考える上では，局所的なレイノルズ応力や乱れのエネルギの変化を調べることが重要である．

ここで大スケールの乱れ速度による局所的なレノルズ応力$\bar{u}''_i \bar{u}''_j$の輸送方程式における（回転の効果を含めた）生成項を考える．レイノルズせん断応力$\bar{u}_1 \bar{u}''_2$の生成項P_rは

$$P_r = -\bar{u}_1^2 \frac{\partial \langle \bar{u}_2 \rangle}{\partial x_1} + 2\omega (\bar{u}''^2_2 - \bar{u}_1^2) \quad \text{(3・17)}$$

で，各方向のレイノルズ垂直応力$\bar{u}''_k \bar{u}''_k$（縮約をとらない）の生成項P_kはそれぞれ

$$P_1 = 0 + 4\omega \bar{u}_1 \bar{u}''_2 \quad \text{(3・18a)}$$

$$P_2 = -2\bar{u}_1 \bar{u}''_2 \frac{\partial \langle \bar{u}_2 \rangle}{\partial x_1} - 4\omega \bar{u}_1 \bar{u}''_2 \quad \text{(3・18b)}$$

$$P_3 = 0 + 0 \quad \text{(3・18c)}$$

となる．また乱れのエネルギ

$$q^2 = \frac{1}{2} \bar{u}''_i \bar{u}''_i \quad \text{(3・19)}$$

の生成項P_qは

$$P_q = -\bar{u}_1 \bar{u}''_2 \frac{\partial \langle \bar{u}_2 \rangle}{\partial x_1} + 0 \quad \text{(3・20)}$$

である．式(3・17)(3・18)(3・20)の右辺第２項は回転の影響を表す．前章ではx_2-x_3断面でこれらの平均をとった式で，流路の回転による流れ場の平均量の変化について述べた．

3・4・1　4象限分解による解析

図3・11のように，流れ場を乱れ速度$\bar{u}_1$と$\bar{u}''_2$の符号により4つの運動に分けて考える〔28〕．圧力壁面（$x_1=1$）側では，　第1象限に入る運動は壁向きの高速流れ（スイープ），第3象限は壁から離れる低速の流れ（イジェクション）で，両者は$\bar{u}_1\bar{u}''_2>0$であるからレイノルズ応力に対して正の寄与をする．また第2，第4象限はそれぞれ外向き，内向きのインターアクションで，レイノルズ応力には負の寄与をする．一方負圧壁面（$x_1=0$）側では第2象限はスイープ，第4象限はイジェクションで第1，3象限はインターアクションとなる．

静止流路の乱れの生成は，2・5節で述べたように，壁に向かう高速の流体，壁から離れる低速流れが局所的な環境から正のフィードバックを受けてその乱れ運動が促進されるという機構である．すなわちスイープ部とイジェクション部では，式(3・17)(3・20)の右辺第1項の符号から，レイノルズ応力や乱れのエネルギの生成が増加し，この流れがますます発達して乱流生成の中心となる．

回転時には，変動速度（$\bar{u}_1$，$\bar{u}''_2$，$\bar{u}_3$）に対してコリオリ力（$2\omega\bar{u}''_2$，$-2\omega\bar{u}_1$，0）が作用する．両壁面側でのスイープとイジェクションについて，x_1-x_2面内で変動速度（u''）とそれに加わるコリオリ力（c''）の

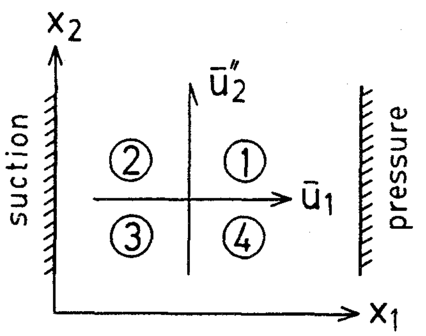


図3・11　$\bar{u}_1$, $\bar{u}''_2$の符号による分類

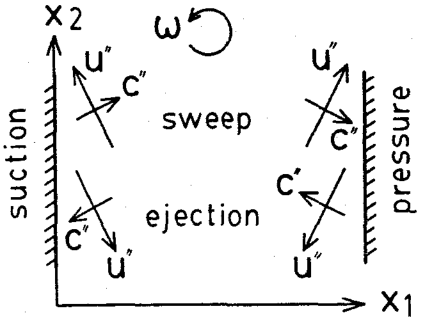
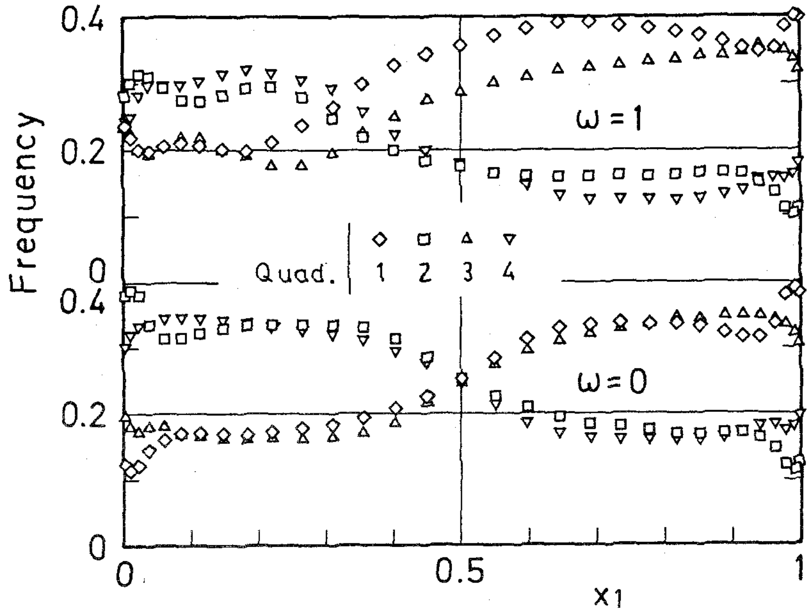


図3・12　速度変動とコリオリ力

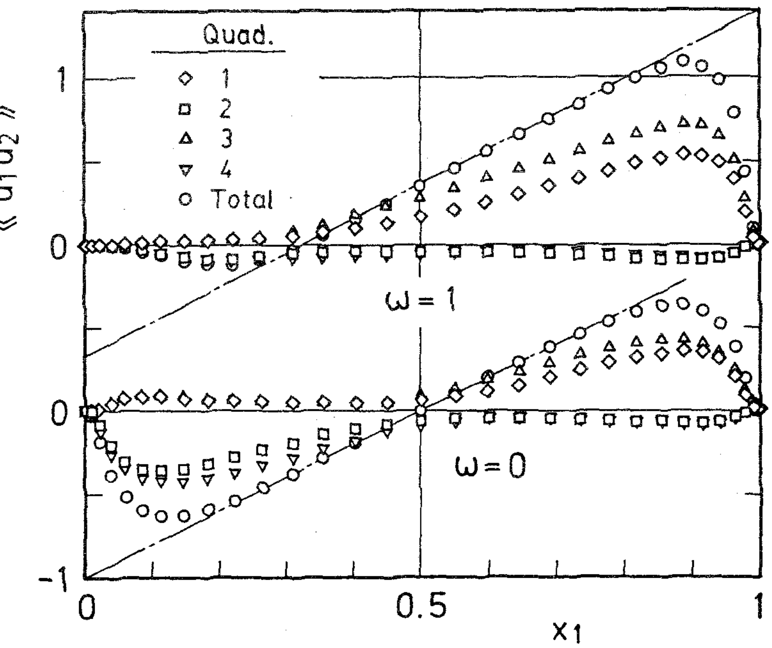
方向を図3・12に示す．圧力側では，図3・12あるいは式(3·18)からわかるように，レイノルズ応力に正の寄与をもつスイープとイジェクションに対しコリオリ力は壁垂直方向の乱れの促進の作用をする．$\overline{u}_1{}^2$ が増加した結果，式(3·17)の右辺第1項が大きくなり，レイノルズ応力はますます増大する．さらに式(3·20)により乱れが活発になる．すなわち回転場の圧力壁面側の乱れの増大機構は，コリオリ力による高速流体の壁への叩き付けと，これに伴う低速流体の壁からの押し出し効果である．

一方負圧側ではコリオリ力は，スイープとイジェクションに対しては壁垂直方向の乱れ速度を抑制し，レイノルズ応力の生成を小さくする．コリオリ力はインターアクションに対しては壁垂直方向の速度を増加させるが，この流れはレイノルズ応力に負の寄与をするので，式(3·20)の符号から乱れの生成には貢献しない．従って負圧側ではレイノルズ応力，乱れのエネルギは減少する．

Brodkeyら[28]の実験に用いられた4象限分解の方法を本数値解析にも適用する．静止流路（$\omega=0$），回転流路（$\omega=1$）の場合について，各象限に属する運動が現れる頻度を図3・13(a) に，大スケールの速度変動のレイノルズ応力$\overline{u}_1\overline{u}''_2$を4象限分解した結果を図3・13(b) に示す．これらは，x_2-x_3 断面内の各格子点の位置の乱れ速度の属する象限を判別し，各象限毎にその運動が生じた回数と速度相関$\overline{u}_1\overline{u}''_2$の和をとって，面内の格子数（32



（ａ）　各象限の流れが現れる頻度



（ｂ）　レイノルズせん断応力の４象限分解

図3・13　４ 象 限 分 解

×32）で除し，さらに時間平均をとったものである．

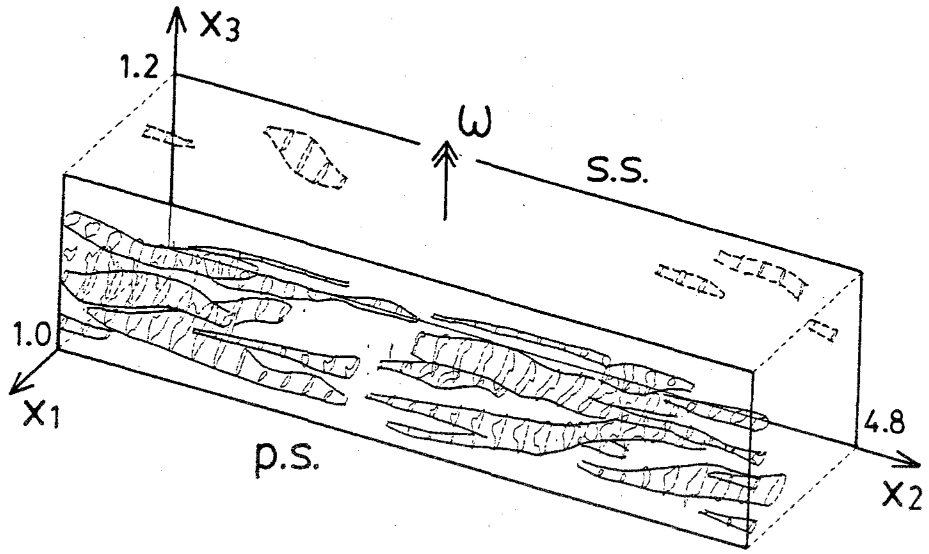
静止流路の場合，スイープとイジェクションの発生機会はほぼ均衡するが，レイノルズ応力への寄与はイジェクションの方が大きい．またインターアクションによるレイノルズ応力への逆の寄与は非常に小さい．

回転流路の圧力側では，レイノルズ応力に対するスイープ，イジェクションの正の寄与は増加するが，インターアクションによる負の寄与はあまり変化せず，レイノルズ応力は大きくなっている．図３・１３(a) では回転時に $0.4 < x_1 < 0.9$ で第１象限の圧力壁向きの高速流の発生率が４割近くと，他に比べて特に大きくなる．しかし，図３・１３(b) によれば，第３象限の低速流体の圧力壁からの噴き出しの方がレイノルズ応力への寄与は大きい．すなわち流路中央から圧力壁にかけての流れ場は，壁からの低速流体の非常に強い噴出が散在する間を，わずかに圧力壁に移動する高速流体が満たしている構造となっている．コリオリ力により壁に叩き付けられたスイープ流体は，その位置での流れに同化するが，入れ替わりに低速流体を壁から遠ざける方向へ強く押し出す．このようにして生じたイジェクションは，高乱れの流体を流路中央部に運搬する．これが図３・１３(b) の圧力側のイジェクション部におけるレイノルズ応力の著しい増加の原因である．一方負圧側では，各象限の発生割合が均一化し，レイノルズ応力への寄与も小さくなって，前章で示したように乱流構造が崩れる．

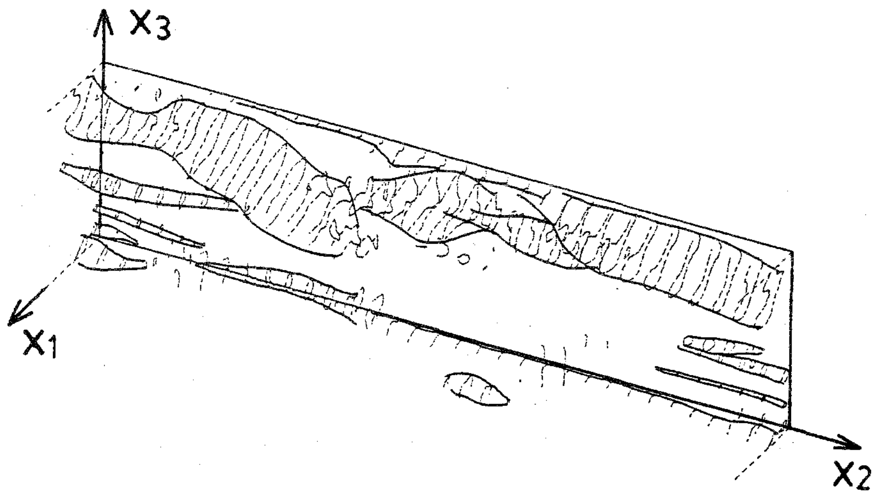
３・４・２　乱流渦の観察

本章では，これまでに議論した回転場における乱流構造および乱流生成機構を乱流渦の観察を通して検証する．

まず$\omega=1$のときのある瞬間の流れ場の全容を図３・１４示す．



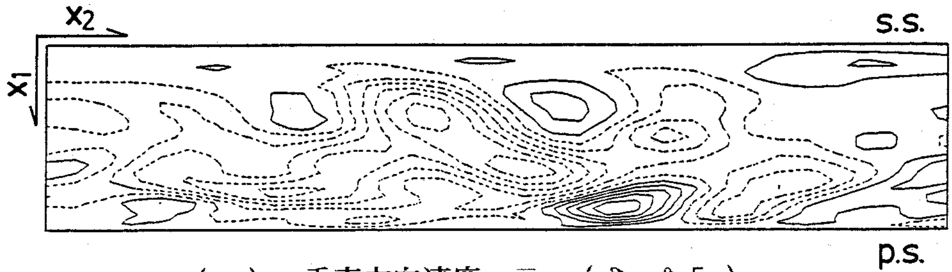
（a） 低速流体塊（$\bar{u}''_2 < -3.0$）



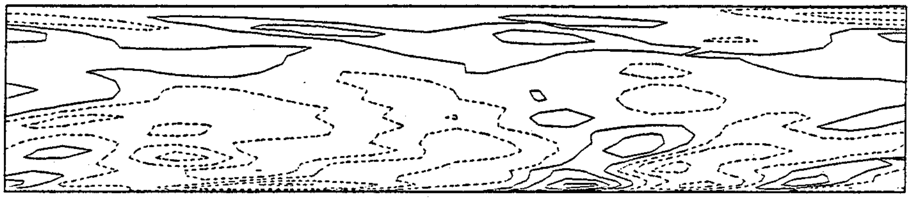
（b） 負圧側の低速流体塊（$\bar{u}''_2 < -1.5$）

図３・１４ 大 規 模 渦 （$\omega = 1$）

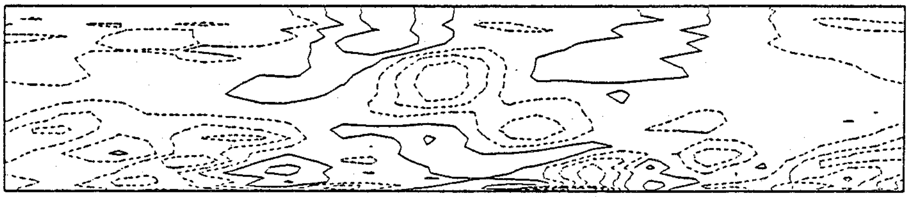
図３・１４(a)は，x_1-x_3 断面内で主流方向乱れ速度の等速度線図（$\bar{u}''_2 = -3$の線）を各断面位置で描き，これをx_2 方向に連ね，さらにその輪郭を結んだもので，低速流体塊を表している．煩雑を避けるため低速部のみを示した．圧力壁（ｐ．ｓ．）側ではいくすじもの縞模様が現れ，乱流渦が活発であ



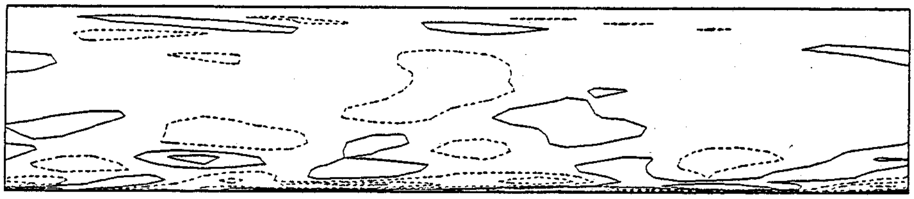
（a）　垂直方向速度　$\overline{u}_1$　（δ = 0.5 ）



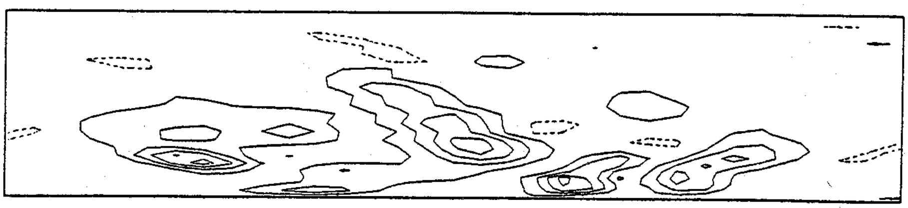
（b）　主流方向速度　$\overline{u}''_2$（δ = 1.5 ）



（c）　圧力　$\hat{p}''$　（δ = 1.2 ）



（d）　渦度（縦渦）　$\overline{\omega}_2$　（δ = 45. ）



（e）　レイノルズ応力　$\overline{u}_1\overline{u}''_2$　（δ = 2.0 ）

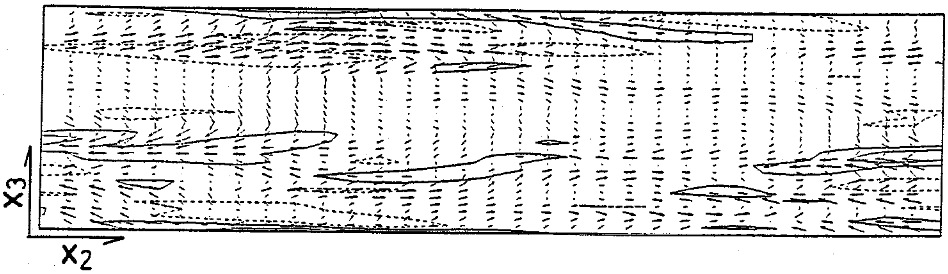
図3・15　大規模乱流渦（ large eddy ）の$x_1 - x_2$ 断面の例
（x_3 = 0.375 ,　ω = 1 ）

ることがわかる．これに対して負圧壁（ｓ．ｓ．）側では，強い乱れはわずかに散見されるのみである．しかし図３・１４(b) のように，$\overline{u}''_2=-1.5$ の等速度線図からは負圧側にも大規模の弱い渦構造があることがわかる．

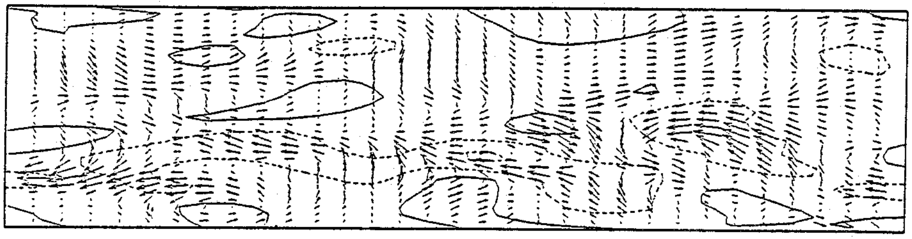
次にいくつかの断面内で大スケール渦を示す．等高図では，正の値を実線で，負の値を破線で表し，等高線の刻み幅をδで示す．

図３・１５は$\omega=1$のときのx_1-x_2 断面での瞬時的な乱れの分布の一例である．平均流は図の右向きで，上辺は負圧側壁面（ｓ．ｓ．），下辺は圧力側壁面（ｐ．ｓ．）を示す．図３・１５(a)(b)はそれぞれ乱れの速度の壁に垂直な方向，平均流れ方向の成分の等速度線図で，圧力壁面に沿っていくつかのスイープとイジェクションがみられる．図３・１５(e) のレイノルズ応力の分布には，圧力側のスイープ・イジェクションの位置に大きな正の値が現れている．これに対して負圧側の応力は低レベルである．図３・１５(c) は圧力変動の等圧力線図である．ただし本計算スキームでは$\overline{p}''$ を純粋に取り出すことはできないので，小スケール項R_{kk}を含む$\overline{p}''$ の分布を示す．この乱れの模様は速度乱れのように主流方向に引き伸ばされてはいない．図３・１５(d) に示す渦度$\overline{\omega}_2$ の分布では変動が圧力側壁近傍に集中していることがわかる．

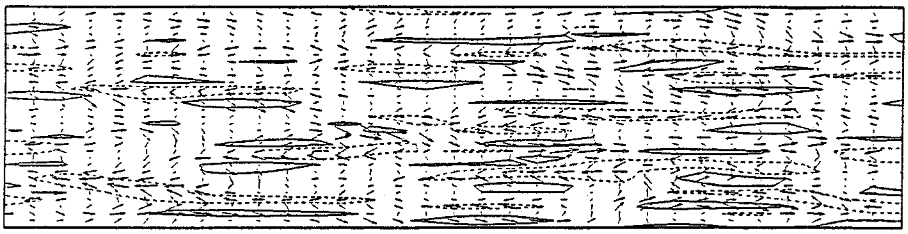
図３・１６は壁面に平行なx_2-x_3 断面の乱れ速度の分布を (a)負圧壁面近傍，(b)流路の中程，(c)圧力壁近傍のそれぞれの位置において，紙面に垂直な$\overline{u}_1$ を等速度線図で，平面内の（$\overline{u}''_2$，$\overline{u}_3$）をベクトルで表したものである．負圧側では弱い大規模な渦，圧力側では細かい活発な渦がみられる．流路中程では，渦の横断方向のスケールが壁近傍にくらべてはるかに大きくなる．また図３・１７(a)～(c) は主流方向速度の乱れの等速度線図を，それぞれ図３・１６(a)～(c) と同じ断面で表したものある．x_2-x_3 断面においては，ベクトルの長さや等速度線の刻み値δは各断面位置で別個に決められている．すなわち図３・１７では負圧側壁面付近では大規模な乱れの構造が見ら



（a）　負圧側壁面近傍
（x_1 =0.022 ，x_1^+ =8.5 ，　δ = 0.06 ）



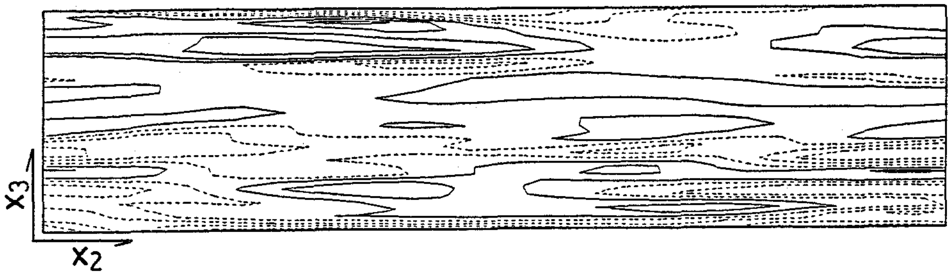
（b）　流　路　中　央
（x_1 =0.691 ，x_1^+ =181.，　δ = 1.92 ）



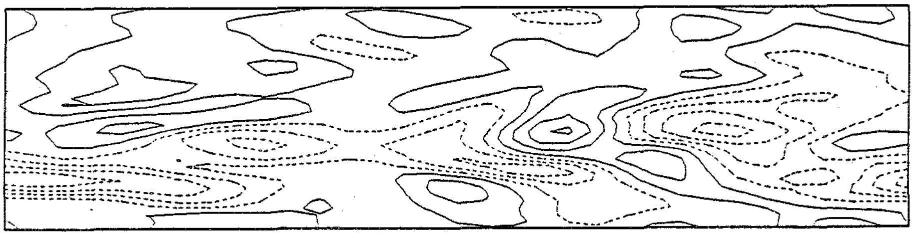
（c）　圧力側壁面近傍
（x_1 =0.978 ，x_1^+ =12.6，　δ = 0.46 ）

図３・１６　大規模乱流渦（ large eddy ）のx_2-x_3 断面の例（ω＝1）
〔 $\overline{u}_1$…等速度線図，　（$\overline{u}''_2$，$\overline{u}_3$）…ベクトル 〕

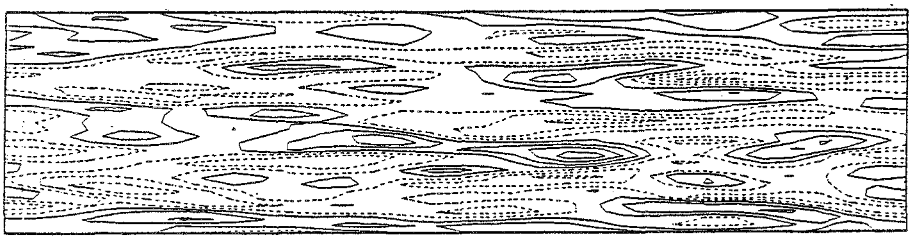
れるが，δ = 0.71 と，圧力側のδ = 2.50 と比べて小さいので，乱れは極めて弱い．x_1 ～0.7 の位置では破線の低速部の方が乱れは強く，４象限分解の結果が確かめられる．図２・１３(c) の静止流路の場合の乱れ速度分布と比較すると，回転流路の圧力側の方が渦は細かくなる．しかし圧力側では壁面摩擦が大きくなるので，ν/u^* を単位とする尺度λ^+ で測るストリーク構造のスケールは主流方向，横断方向とも回転によりほとんど変化しない．



（a） 負圧側壁面近傍
（ x_1 ＝0.022 ， x_1^+ ＝8.5 ， δ＝ 0.53 ）



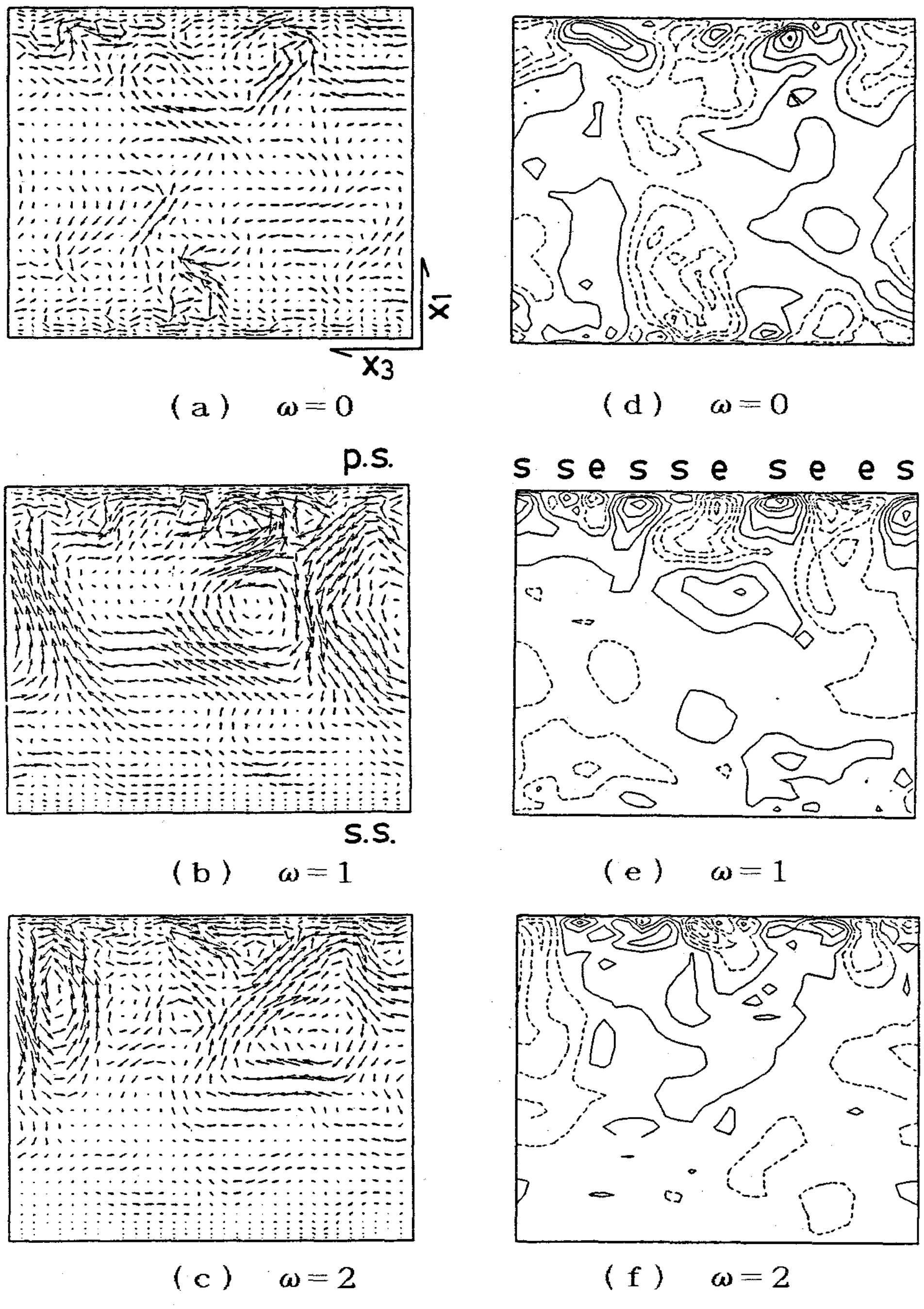
（b） 流 路 中 央
（ x_1 ＝0.691 ， x_1^+ ＝181.， δ＝ 1.08 ）



（c） 圧力側壁面近傍
（ x_1 ＝0.978 ， x_1^+ ＝12.6， δ＝ 2.28 ）

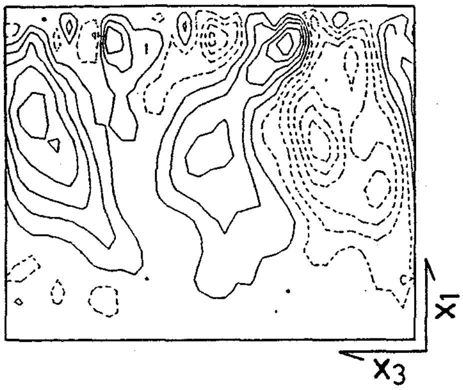
図3・17 大規模乱流渦（ large eddy ）のx_2-x_3断面の例（ω＝1）
〔 $\overline{u}''_2$の等速度線図 〕

図3・18はω＝0，1および2の角速度で，主流に垂直なx_1-x_3断面内の乱流渦を示した例である．面内の流れを速度ベクトルで図3・18(a)～(c)に，また主流方向の乱れ速度を等速度線図で図3・18(d)～(f)に示す．回転流路では，例えば図3・18(e)にみられるように，圧力側壁面に沿って多数の細かいスイープ（s）とイジェクション（e）が生じ，乱れが活発になっている．これとは別に，図3・18(b)(c)には壁から離れたところに

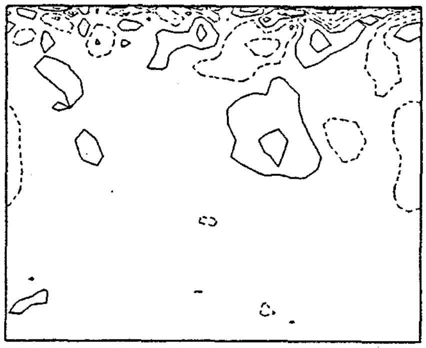


乱れ速度ベクトル　($\bar{u}_1, \bar{u}_3$)　　主流方向速度の乱れ　$\bar{u}''_2$ ($\delta=1.5$)

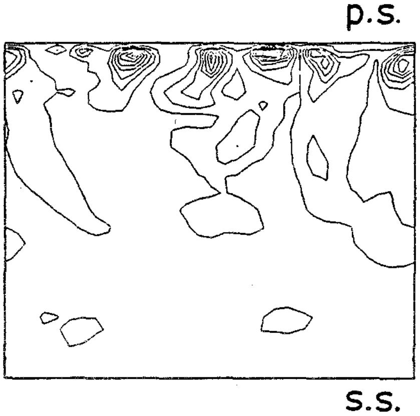
図3・18　主流に垂直な x_1-x_3 断面の大規模乱流渦 (large eddy) の例　($x_2=3.0$)



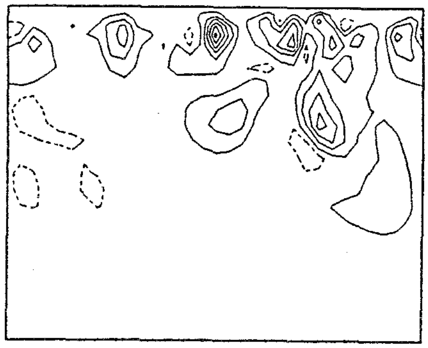
（a） 壁垂直方向速度 $\overline{u}_1$
（$\delta=0.5$ ）



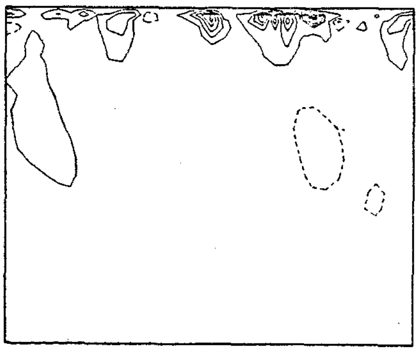
（b） 渦度（縦渦） $\overline{\omega}_2$
（$\delta=45.$ ）



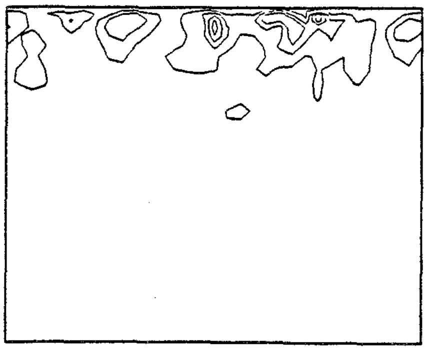
（c） 乱れのエネルギ $\overline{q}^2$
（$\delta=4.0$ ）



（d） レイノルズ応力 $\overline{u}_1\overline{u}''_2$
（$\delta=2.0$ ）



（e） 乱れのエネルギの生成 P_q
（$\delta=150.$）



（f） レイノルズ応力の生成 P_r
（$\delta=70.$ ）

図３・１９ 主流に垂直な x_1-x_3 断面の大規模乱流渦（ large eddy ）
の例 （$\omega=1$，$x_2=3.0$ ）

大規模な渦がみられる．渦の中心は$x_1 = 0.6 \sim 0.7$ で，角速度が大きくなると圧力壁に寄る．$\omega = 1$の場合についてのみ，その他の量の分布を図３・１９に示す．図３・１９(a) の壁に垂直な速度$\bar{u}_1$ の分布には，圧力側壁面から流路中央に向かって強く噴き出した模様がみられる．図３・１９(b) の縦渦の変動強さは圧力側壁面に集中し，図３・１８(b) の大規模渦の位置での渦度はそれほど大きくはない．図３・１９(c)(d)の乱れのエネルギおよびレイノルズ応力の分布は非常に間欠的で，圧力側のスイープとイジェクションの部分で特に大きい．図３・１９(e) は乱れのエネルギの生成項〔式(3・20)〕，図３・１９(f) はレイノルズ応力の生成項〔式(3・17)〕の分布である．乱れは図３・１８(e) の圧力側壁面近傍の細かい高・低速縞の位置で盛んに生成されている．

以上の乱流渦の観察によって，前章に述べた回転場における乱れの機構，すなわち

（１）圧力側ではコリオリ力によるスイープとイジェクションの助長と，それに伴う乱れの増大，

（２）負圧側ではストリーク構造の消失による乱れの鎮静化，

が確かめられた．

図３・１８(b)(c)にみられた圧力側の壁からやや離れた位置の大規模な渦は，Johnstonら[76]や児山ら[79]により指摘された Taylor-Goertler型の二次流れと同じ性質のものと考えられる．実験によれば，そのＴＧ型渦対の横断方向のスケールは流路幅の程度である．これを数値シミュレーションで計算領域の影響を受けることなく解析するには，横断方向に少なくともこの渦のスケールの数倍の計算領域をとらなければならない．本計算では流路幅の 1.2倍の領域であるから，この渦について定量的に評価することには無理がある．また実験[76][79]で使用されたダクトの縦横比も側壁の影響を完全に排除できるほど大きいとは思われない．

図３·１６(b) をみると，大規模渦は主流方向に長く安定して存在するものではないので平均渦度を把握するのは容易でなく，さらに乱れの生成に対するこの渦の寄与を定量的に求めるのは困難である．図３·１９(e)(f)をみる限り乱れの大部分は壁近くの微視的な構造において生成されている．これに対して大規模な渦構造は，熱や物質の輸送に大きな関連をもつと思われるが，乱流生成に関してはあまり重要な意味をもたないようである．

3・5　結論

ＬＥＳにより回転する平行平板間の乱流の数値シミュレーションを行い，コリオリ力による流れ場の構造の変化をシミュレートして次のような結果を得た．

（１）　コリオリ力による乱れの安定・不安定の効果や摩擦応力の変化などについて妥当な結果を得た．すなわち流路に回転が加わると，乱れの非等方性のためにレイノルズ応力が変化する．これにより，乱れのエネルギーとその各方向成分間のバランスが変わる．その結果，圧力側で壁面摩擦応力と乱れの強さが共に増加し，負圧側で減少する．

（２）　圧力側では，平均速度分布において対数域が明瞭になり，主流方向に変動速度の相関が減少することから，乱れのスケールが小さくなった高レイノルズ数乱流の性質がみられる．一方負圧側では，対数速度域が判然としなくなり，渦粘性が減少するとともに，変動速度の自己相関から弱くて大きなスケールの乱れに変わり縞構造が消失することがわかる．

（３）　コリオリ力の作用するせん断乱流にＬＥＳを適用した結果，小スケール渦への平均速度勾配の寄与に対して Smagorinskyモデルを修正なしで用いると，層流への逆遷移があるような流れには対応できないことがわかった．

また，乱流の構造および乱れの生成機構に対するコリオリ力の効果を調べた．以下にその結果をまとめる．

（４）　回転流路では，圧力側壁面の近傍で細かい縞構造がみられ，この部分で乱れの生成が非常に大きい．負圧側では大きな渦が存在するが乱れは非常に弱く，乱流生成はほとんど行われていないことがわかり，前述の乱れの生成機構に対するコリオリ力の効果が確認できた．

（５）　回転流路の圧力側では，コリオリ力は高速流体を壁に叩き付け，こ

の結果低速流体が壁から強く押し出される．このようにしてレイノルズ応力に正の寄与をもつスイープ，イジェクションが活性化されるため乱流の生成は増大する．負圧側では，コリオリ力はスイープ，イジェクションに対して壁に垂直方向の速度を抑えるように作用するので，乱れの生成は抑制され流れは安定化する．

（６）　回転流路の圧力壁寄りには二次流れに似た大規模な渦構造が発生する．この渦は熱や物質の輸送に関しては重要であると思われるが，この部分で乱れが盛んに生成されているのではない．

（７）　流路の回転が乱れの生成に及ぼす微視的な効果は大きく，ＬＥＳは現実の乱流渦をシミュレートするので，本研究のような考察は有用であることが確かめられた．

第４章　遷移レイノルズ数域の流れの直接シミュレーション

4・1　序論

エネルギの散逸に関与する最小のスケールの格子で時空を分割し流れの支配方程式を数値積分して解を得ようとすることは，現在の計算機性能からみて，近い将来にも実現する見込みはない[3]．現状ではこのような直接シミュレーションが可能な流れは，エネルギの大部分を保有するスケールと消散スケールの間に大きな隔たりのない低レイノルズ数の場合に限定される．

層流乱流遷移のシミュレーションにはＤＮＳが用いられている[46][47]．遷移の最終段階に至る過程においても，数値シミュレーションの結果は実験的に観察されている流れ場[48]をよく模擬しており，馬蹄形の渦構造が数値的に再現されている[49][50]．しかしこれらの計算では，ひとつの渦構造がちょうどおさまるような計算領域を設定しているため，見い出された構造は予め決められた大きさや周期性の制約を受けたもので，いわば平均化されたモデルのシミュレーションとなっている．現実の乱れ渦の大きさや形状は多様で，時間的・空間的な分布も考慮されなければならない．

また遷移から十分に発達した乱流に達するまでは，格子以下のスケールの乱れを省略するＤＮＳでは実際の乱れを模しているという保証はない．その理由は，流れの非線形性により次々と生成される高波数成分すなわち小規模渦の効果をモデル化することが必要となるが，ＤＮＳにはこれが欠けているためである．本研究では平行平板間の十分に発達したクエット流れを，遷移レイノル

ズ数域を中心に，上流差分[51]を用いた直接シミュレーションで計算を行った．この目的は，低レイノルズ数乱れを再現しそのモデルを得ること，人為的な付加項を含む数値シミュレーションの結果と実際の流れとの対応を調べることである．さらに乱流境界層の壁近傍の流れの構造に関する第２章の議論を補足し，また低レイノルズ数で非等方的な流れ場におけるＬＥＳモデルについて検討を加える．

対象とする流れは工学的には潤滑膜が乱流となる場合などに相当する．この流れについてはたとえば混合長モデル[85]や$k-\varepsilon$モデル[86]により予測を試みた例がある．しかしレイノルズ平均を扱うモデルでは低レイノルズ数のためにいくつかの修正[87]を加えなければならず，このような場合には経験的な仮定の少ない直接シミュレーションが有効であろう．なお平行平板間のクエット流れは，ジャーナル軸受のような二重円筒間の流れにくらべて理想的な流れ場を実験的に実現することが困難で，あまり測定されていない．

本計算では上流差分を用いているが，その数値粘性が流れの重要な構造におよぼす影響を調べ，一般に計算が現実の乱れ渦をシミュレートしていることを実証するためにどのような手続きが必要となるかを考察する．

乱流境界層の壁近傍の乱流渦の組織的な構造[9][10][57][58]の研究についても数値シミュレーションが有効であることは第２章で示したとおりである．現在明らかにされていない点のひとつに，このような壁付近の構造と境界層外層の大規模な渦との関連がある．遷移レイノルズ数域のクエット流れは，外層の大規模渦の代わりに平板が粘性底層および遷移層を引っ張る，ひとつの境界層のモデルとみなすことができる．この状況で生じる渦を調べることは組織的構造の解明の上で重要と考える．

高レイノルズ数乱流における小スケール渦は，大規模な流れの種類にかかわらず普遍的な性質をもち，エネルギを消散する作用があることが実験的に知ら

れている．したがってこれに対するモデルは一般性をもつことが期待できる．ＬＥＳでは，格子以下の渦の消散作用を大スケール乱れに対する渦粘性におきかえる Smagorinskyモデルが多用されており，妥当な結果が得られている．しかし境界壁付近の粘性の強い領域では，高レイノルズ数域における小スケール渦のような構造は存在せず，格子以下の乱れのモデルには経験的な van Driest 型の関数などによる修正が加えられる．このようにレイノルズ平均を扱う場合と同様の手法を用いている現状では，普遍性という数値シミュレーションの有利性が十分に発揮されているとは言い難い． Smagorinskyモデルは低レイノルズ数乱流には適用できず，たとえば第３章で示したように，再層流化がおこるような流れを再現することはできない．そこで本研究では直接シミュレーションの結果にフィルタをかけて大小のスケールに分離し，直接計算された小スケール乱れとＬＥＳモデルとを比較し，モデルの問題点を検討する．

4・2　基礎方程式および数値解法

無限平行平板間の非圧縮性流体のクエット流れを考える．図4・1のように平板に垂直な方向にx_1軸をとり，$x_1=0$を固定壁とし，$x_1=H$の壁を速度Uでx_2方向に平行移動させる．

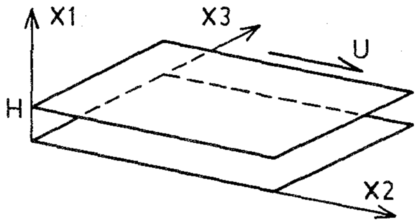


図4・1　流路と座標

4・2・1　基礎方程式

ナビエ・ストークスの運動方程式

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{Re}\nabla^2 u_i \qquad (4\cdot1)$$

と連続の式

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \qquad (4\cdot2)$$

において，無次元化のパラメータとして，x_iには平板間隔H，速度u_iには移動壁速度U，時間tにはH/U，圧力pにはρU^2を用いる．ここでReは

$$Re = \frac{HU}{\nu} \qquad (4\cdot3)$$

で定義されるレイノルズ数である．

また乱れのエネルギ

$$q^2 = \frac{1}{2} u''_i u''_i \qquad (4\cdot4)$$

のバランスを検討する際に用いられる収支式は次のようになる．

$$\frac{\partial \langle q^2 \rangle}{\partial t} = -\langle u_1 u''_2 \rangle \frac{\partial \langle u_2 \rangle}{\partial x_1}$$

$$- \frac{\partial}{\partial x_j} \langle u''_j \, (p + q^2) \rangle$$

$$+ \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x_j} \langle u''_i D_{ij}'' \rangle - \frac{1}{Re} \langle \frac{\partial u_i''}{\partial x_j} D_{ij}'' \rangle$$

$$(4\cdot5)$$

ただし，$D_{ij}'' = \frac{\partial u_i''}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j''}{\partial x_i}$

ここで $\langle u \rangle$ は平板に平行な x_2-x_3 平面内の平均，u'' はそれからの変動を表す．右辺第１項は生成項，第２項は乱流拡散項，第３項は粘性拡散項，さらに第４項は消散項である．

4・2・2　数値解法

本計算では５種類の差分格子を用いている．各方向の格子数 N_i ，計算領域 H_i ，格子間隔 h_i は表４・１に示すとおりである．平板に垂直な x_1 方向には格子点が壁近傍で密になるように

$$x_1(\mathrm{I}) = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{\alpha} \tanh \left\{ \left(-1 + 2\frac{\mathrm{I}-1}{N_1} \right) \tanh^{-1} \alpha \right\} \right]$$

$$\mathrm{I} = 1, 2, \cdots\cdots, N_1 + 1 \qquad (4\cdot6)$$

で不等間隔に与える．α は壁近傍での格子の密度を制御する定数でここでは $\alpha = 0.9$ とした．また x_2, x_3 方向には等間隔格子とする．

表4・1　差分格子

格子	格子数 N_1	N_2	N_3	計算領域 H_1	H_2	H_3	格子間隔 h_1	h_2	h_3	時間刻み Δt
Case. Ⅰ	16	32	32	1	32	8	0.023～0.101	1.0	0.25	0.02
Case. Ⅱ	24	64	64	1	32	8	0.015～0.068	0.5	0.125	0.01
Case. Ⅲ	32	64	64	1	32	8	0.011～0.051	0.5	0.125	0.01
Case. Ⅳ	24	64	64	1	16	4	0.015～0.068	0.25	0.063	0.005
Case. Ⅴ	24	32	32	1	32	8	0.015～0.068	1.0	0.25	0.02

時間進行差分において，運動方程式(4・1) は次式のように，非線形項と粘性項（L_i）は Leap Frog法とし，圧力は陰的に扱う．

$$\frac{u_i^{(n+1)} - u_i^{(n-1)}}{2\Delta t} = -\frac{\partial p^{(n+1)}}{\partial x_i} + \left[-u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{1}{Re}\nabla^2 u_i \right]^{(n)} \qquad \cdots\cdots (4\cdot7)$$

また連続条件は陰的に処理される．

$$\frac{\partial u_i^{(n+1)}}{\partial x_i} = 0 \qquad \cdots\cdots (4\cdot8)$$

式(4・7)(4・8)は，時刻t（$=n\cdot\Delta t$）までの流れ場が得られているとき，$t+\Delta t$へ進行するための連立方程式である．これは２・３・４節で述べたように，x_2-x_3平面内で離散フーリエ変換して解かれる．

空間差分は非線形項を除いて２次精度の中心差分とする．非線形項には次式に示すような３次精度の上流差分スキーム[51]を用いる．

$$\left. f\frac{\partial u}{\partial x}\right|_i = f\,\frac{-u_{i+2}+8u_{i+1}-8u_{i-1}+u_{i-2}}{12\Delta x} + |f|\,\frac{u_{i+2}-4u_{i+1}+6u_i-4u_{i-1}+u_{i-2}}{4\Delta x} \qquad \cdots\cdots (4\cdot9)$$

上式は高波数の変動による消散を数値拡散に置き換えることによって安定を得ようとするものである．乱れのエネルギの大部分を保有し，重要な構造に関連する低波数域の乱れに対し，この数値粘性の与える影響についてはこれまで詳しく調べられていないので，本論文ではこの評価を試みる．

層流の速度分布に正弦波状の乱れあるいは弱い乱数を重ね合わせたものを初期値として与える．

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \alpha_1 \{\cos(\beta_1 x_1) - 1\} \sin(\beta_2 x_2) \sin(\beta_3 x_3) + \gamma_1 \cdot Ra \\
u_2 &= x_1 + \alpha_2 \sin(\beta_1 x_1) \cos(\beta_2 x_2) \sin(\beta_3 x_3) + \gamma_2 \cdot Ra \\
u_3 &= \alpha_3 \sin(\beta_1 x_1) \sin(\beta_2 x_2) \cos(\beta_3 x_3) + \gamma_3 \cdot Ra \\
&\qquad \beta_i = 2\pi m_i / H_i
\end{aligned}
\tag{4·10}
$$

なおRa は一様乱数（$-1 < Ra < 1$）である．正弦波成分については振幅α_i と周期m_i を調節することにより連続の式を満足するような初期値を与えることができる．乱数は連続条件を満たさないので弱い乱れに限られる．本計算では表４·２のような３種類の初期値を与える．

壁面上ではすべりなし（$u_i = 0$）の境界条件を与える．x_2方向には計算領域への流入口と流出口で流れが同じという周期条件，またx_3方向にも周期条件を課す．

表４・２　初期乱れのパラメータ

	周期 m_1	m_2	m_3	正弦波の振幅 α_1	α_2	α_3	乱数の強さ γ_1	γ_2	γ_3
Type. １（正弦波）	1	4	2	0	0.16	-0.08	0	0	0
Type. ２（乱　数）	1	4	2	0	0	0	0.03	0.10	0.05
Type. ３（混　合）	1	4	2	0	0.16	-0.08	0.03	0.10	0.05

4・3　遷移レイノルズ数域のクエット流れの構造

数値計算が現実の流れをシミュレートしていることを実証するために必要な手続きとして，２・４節では，（ａ）乱れの各統計量が測定値とよく合うこと，（ｂ）可視化実験などで観察される流れと同じ構造が再現されていること，（ｃ）その構造を解析するために十分な格子が設けられていること，を示すことを述べた．さらに上流差分など，乱れエネルギに対して人為的な効果を付加しているようなスキームでは，格子スケールより小さい高波数成分は欠落していても

（ｄ）　乱れの重要な構造に関わる波数域の構造が計算スキームの影響を受けていないこと

を調べなければならない．

ここでは，これらの点に配慮しながら数値計算で得られた流れの性質を検討し，遷移レイノルズ数域のクエット流れの構造について考察する．

計算は主として R_e = 5000 の場合について行われている．

4・3・1　初期値の影響

本計算は，初期値の依存性や層流乱流遷移をシミュレートするものではなく，十分に発達した流れを対象としている．しかし計算開始時に式(4·10)のような人為的な乱れを与えているので，十分に時間が経過した後にこの影響が残らないことを確認する必要がある．そこで R_e = 5000 として，Case.Ⅰと Case.Ⅱの格子について表４・２の３種類の初期値を与えて，t =100 までの平均速度や乱れの発達などを調べた．図４・２は壁面摩擦応力の時間的変化で，ここでは応力の代わりに平均摩擦応力 τ_w による摩擦速度 u^* に基づくレイノルズ数

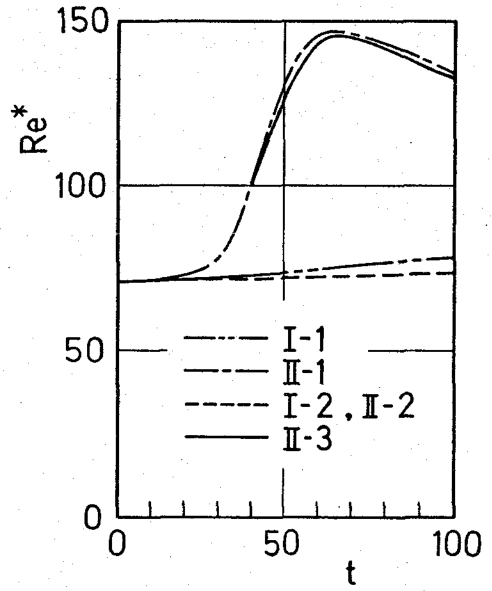


図4・2　壁面摩擦の発達におよぼす
初期乱れ分布と差分格子の影響

$$Re^* = \frac{Hu^*}{\nu} \qquad \cdots\cdots\cdots (4{\cdot}11)$$

の変化を示す．粗い格子（ Case.Ⅰ）では数値粘性が大きいためか乱れの発達がきわめて遅い．また乱数で与えた乱れは発達しにくい．これは，乱数が連続条件を満たさないので強い乱れを与えにくいこともあるが，白色雑音状の乱れはすでに高波数成分を有しており，これに数値粘性が強く作用するためであると考えられる．正弦波は高波数成分がないので数値粘性が働かず，急速に乱れが増すが，非線形作用により次々と高波数成分が生成され，やがて平衡状態に移行する．

つぎに乱れの構造の変化をみる．図4・3は Case.Ⅱの格子による，x_1＝0.114 の位置での t＝100 における主流方向速度の乱れ u_2の横断方向の2点の自己相関

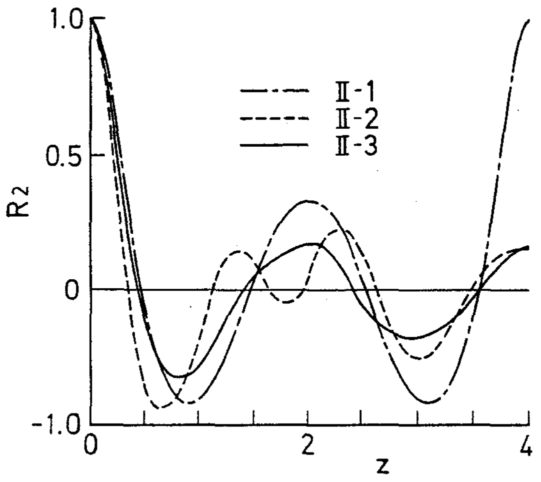


図4・3　乱れの構造に対する初期乱れの影響

$$R_2(z)=\frac{\langle u''_2(x_1,x_2,x_3)\,u''_2(x_1,x_2,x_3+z)\rangle}{\langle u''^2_2\rangle} \qquad (4\cdot12)$$

である．初期乱れが Type.２の乱数の場合は，$t=0$では相関は０であるが，$t=100$ ではいくつかの極値が現れ渦構造が形成されつつあることがわかる．一方 Type.１ではx_3 方向に長さ４の波長をもつ波を与えているが，$t=100$ で新たに半波長の成分が現れている．しかし当初の周期性がはっきり残っており，速度変動が不自然である． Type.３のように弱い乱数を重ねることにより，このような不自然さは解消される．以上の結果から，さらに計算を続ければ Type.１と Type.３は同様の構造におちつくと予想され，初期値の影響をあまり残さない十分に発達した乱れが得られるものと考えられる．すなわち早く十分発達した流れになるように計算を進行させるためには，初期値として与える乱れは適度な大規模構造の上に不規則な乱れを重ねたものがよい．$t=100$ 以降は Type.３の初期値を与えた場合について， Case.Ⅱの格子で計算を継続した．

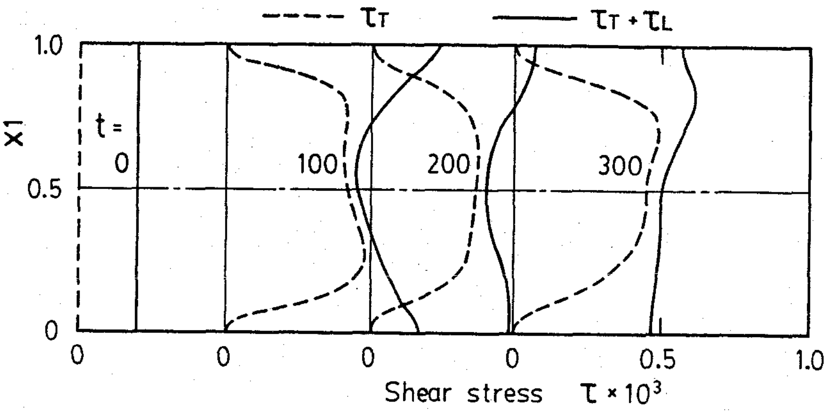


図4・4　摩擦応力分布の時間的変化

図4・4はせん断応力分布の時間的変化である．破線はレイノルズ応力

$$\tau_T = -\langle u_1 u''_2 \rangle \qquad (4\cdot13)$$

のみ，実線はこれに分子粘性応力

$$\tau_L = \frac{1}{R_e} \frac{\partial \langle u_2 \rangle}{\partial x_1} \qquad (4\cdot14)$$

を加えた全せん断応力（$\tau_T + \tau_L$）である．$t=0$において $\tau_T = 0$の状態から，時間の経過とともに乱れが発達し，平均速度も壁付近で勾配が増し中央部で平坦な分布に変化する．瞬時的には平衡が保たれていなくて，x_2-x_3面内平均には時間的な変動がみられる．

4・3・2　差分格子の影響

図4・5に摩擦速度に基づくRe^*と全流れ場での乱れのエネルギの平均

$$E = \frac{1}{V} \iiint q^2 \, d \quad v \qquad (4\cdot15)$$

の時間的変化を示す．計算開始直後の急激な変化は$t=100$ あたりで鎮静化するが，その後も変動を繰り返す．これは計算領域が大規模渦の数倍程度となっているために平均値がひとつの強い渦に左右されて生じるものであるが，遷移

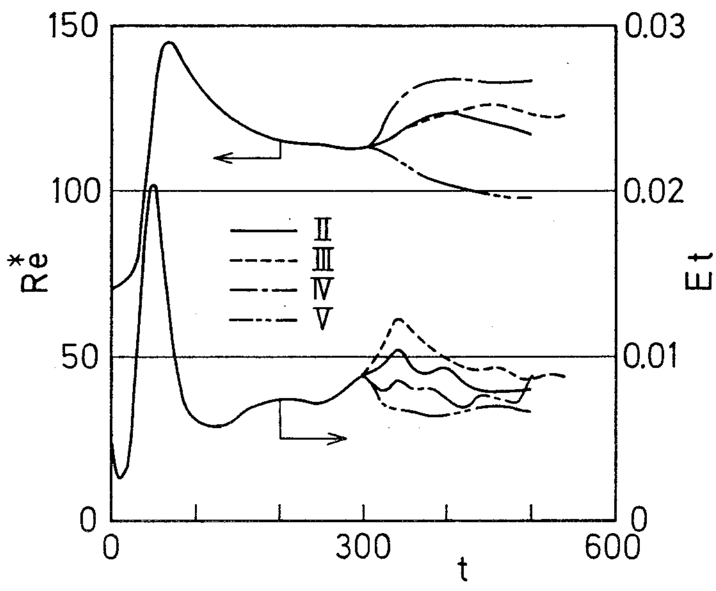


図４・５　壁面摩擦と乱れのエネルギの時間的変化

レイノルズ数領域特有の不安定も影響しているものと考えられる．十分に長い時間においてさらに平均すればいわゆる時間平均が得られるが，これには膨大な計算量を必要とする．$t=300$ の状態から Case.Ⅲ，Ⅳ，Ⅴの格子でも計算を行っている．

平行平板間のクエット流れは，ポアゾイユ流れや二重円筒間のクエット流れの場合に比較して実験的には理想的な流れが得にくく，あまり測定が行われていない．ここでは壁面上の平均摩擦応力τ_w から求める摩擦係数

$$C_f = \frac{8\ \tau_w}{\rho U^2} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (4\cdot16)$$

をいくつかの実験結果と比較したものを図４・６に示す．図中の①は層流，②はReichardt[88]のデータに合うMissimerら[89]の理論曲線，③は乱流の測定値を結ぶ

$$C_f = 2\left\{\frac{0.19}{\log(R_e/4)}\right\}^2 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (4\cdot17)$$

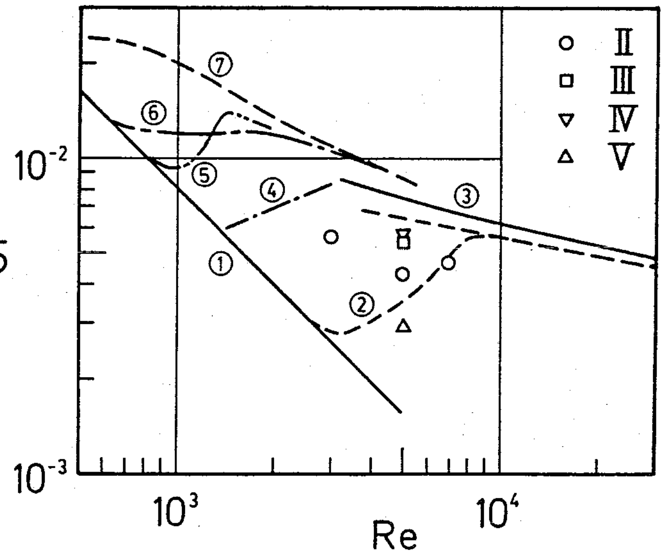


図4・6　レイノルズ数と壁面摩擦係数の関係
① 層流　② Missimer, et al.
③ Robertson　④ Couette　⑤ Smith, et al.
⑥ 青木ら　⑦ 加藤ら

で表される曲線[90]である．④はCouette[91]，⑤はSmithら[92]（半径すきま比 0.00293），⑥は青木ら[85]（同 0.00445），および⑦は加藤ら[86]（同 0.0133）による，いずれも二重円筒間クエット流れの測定値を結ぶ曲線である．これらは曲がり流路のため，二次渦の影響で低レイノルズ数において層流から乱流に遷移する．本計算はR_e = 5000 については４種類の格子で行われ，R_e = 3000 とR_e = 7000 の場合は Case. Ⅱが用いられている．いずれも t = 500 における壁面平均摩擦応力から求められたもので，摩擦係数は層流と乱流の曲線の間にあり，おおむね妥当な結果が得られている．それぞれの場合の格子の解像度h_i^+ と計算領域H_i^+ を表４・３に示す．h_i^+ が小さく細かい乱れ渦までシミュレートできる方がより乱流に近づく傾向にあり，格子の解像度によって別々のC_f ～R_e 曲線が得られることになる．遷移レイノルズ数域では実験的にも条件のわずかな違いによって異なった流れが得られることがあり得る．数値計算において格子の違いで異なる流れが得られたことは

表4・3　格子の解像度

格子	R_e	解像度 h_1^+	h_2^+	h_3^+	計算領域 H_2^+	H_3^+
Case. II	3000	1.11～5.19	38.2	9.6	2447	612
Case. II	5000	1.68～7.89	58.2	14.5	3724	931
Case. II	7000	2.18～7.89	75.3	18.8	4818	1205
Case. III	5000	1.30～6.28	61.6	15.4	3941	985
Case. IV	5000	1.94～9.09	33.5	8.4	2145	536
Case. V	5000	1.39～6.49	95.7	23.9	3602	766

このような遷移域の特色に対応するものと思われる．またこの結果によると，上流差分を用いれば格子が粗くても現実の乱れ渦をシミュレートしうるとは言えない．

以下は全てレイノルズ数 $R_e = 5000$ のときの結果である．

図4・7は $x_1 = 0.11$ の位置で求めた u''_2 の横断方向の２点間の自己相関 $R_2(z)$ である．最初の極小値の位置は３種類の格子でそれほど差異はない．Case.IVの結果は計算領域の半分の距離でも相関値の減衰が十分でなく，解像度を向上する代わりに計算領域を小さくとったことの影響があらわれている．また Case.Vでは，格子が粗いので細かい渦までシミュレートできないので，ランダム性が小さく相関値が大きい．Case.IIは中庸な格子設定で，$R_e = 5000$ については計算機容量の制約下では Case.IIか Case.IIIが妥当と考えられる．

図4・8は３種類の格子について x_2 方向の波数 k_2 に対して速度乱れ u''_2〔図4・8(a)〕と消散項〔図4・8(b)〕のスペクトルを求めたものである．低レイノルズ数では，高レイノルズ数乱流の場合のようなエネルギを保有する波数と消散のピークを示す波数とが離れた構造になっていない．格子以下のスケールの乱れの影響は高波数側にあらわれる．本計算では十分にスペクトル曲線は高波数側で右下がりとなり，消散スペクトルにおいて低波数域の 1/1000

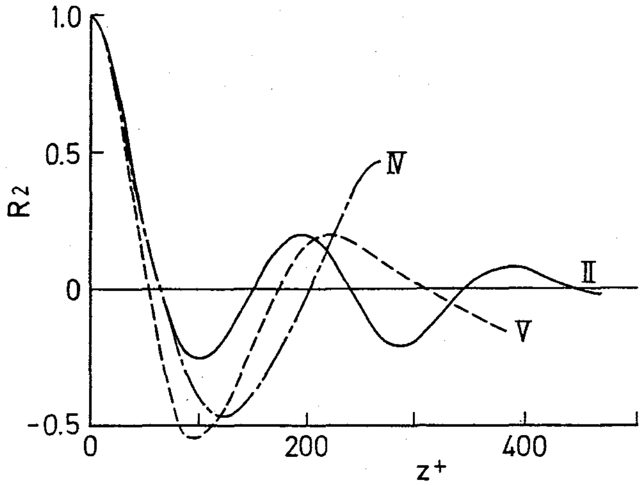
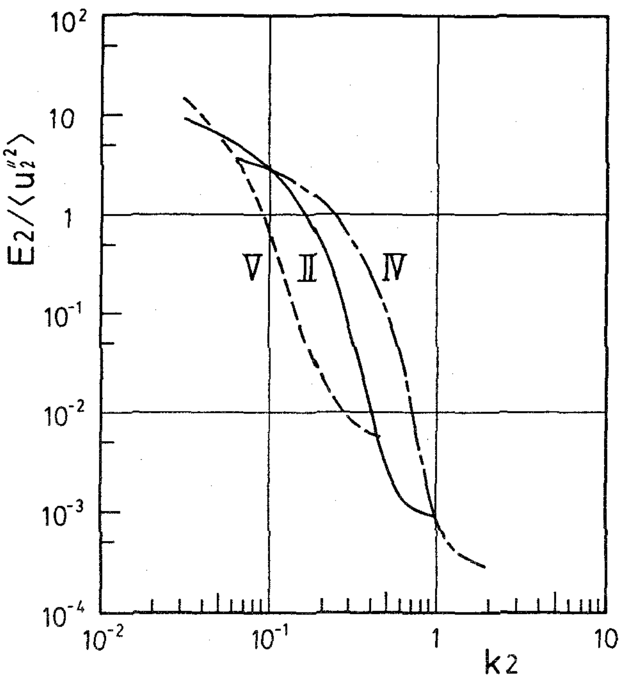


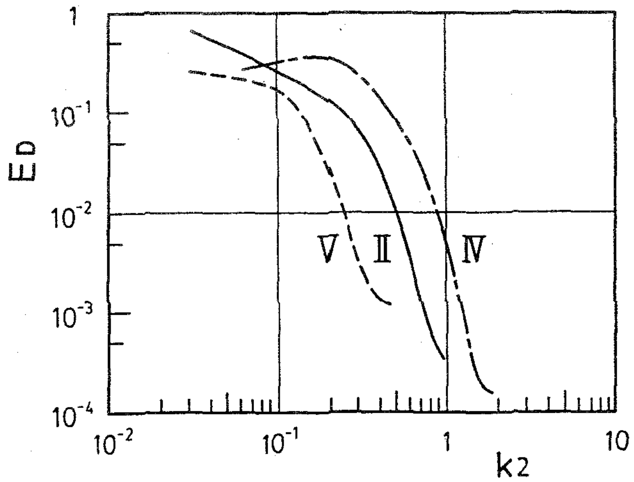
図4・7　x_2方向乱れ速度の横断方向自己相関
（計算領域と格子の解像度の影響）

のレベルまで格子で計算されているので，格子以下の影響が乱れの重要な大規模（低波数）構造に深刻な影響を及ぼしていない．したがって低レイノルズ数乱れでは，格子以下の乱れによる消散作用に精度のよいモデルを与える必然性はなく，上流差分で代用することで十分と考える．また図4・8(b) で格子の違いによる消散スペクトルの積分値の差は，どのスケールの乱れまで格子でとらえるかという，シミュレートされる乱れのエネルギの差に対応している．

図4・8(a) をみると，低波数域で3種類の格子による結果はほぼまとまっている．前述のようにx_2 方向の計算領域が若干不足しているので低波数域の詳細な比較には無理があるが，次節で示す流れの断面図の観察とあわせて判断すると，現実の乱れが再現されていると考えてよいであろう．



（ａ）　x_2方向速度のエネルギ・スペクトル



（ｂ）　消散スペクトル

図4・8　乱れのスペクトル

4・3・3　十分に発達した流れ

本節では Case.Ⅲの格子で計算されたレイノルズ数 R_e ＝ 5000 の十分に発達した流れの状態を示す．平均は t＝500 において x_2-x_3面内で計算し，さらに中心線 x_1＝0.5 に対する対称位置でとったもので，時間平均をとってはいない．図４・９は平均速度分布である．x_1^+ ＞10で直線分布（$\langle u_2^+ \rangle = x_1^+$）を離れるが，高レイノルズ数乱流の対数則ほど平坦にはならず，遷移レイノルズ数域の流れの特徴があらわれている．

図４・１０にせん断応力分布を示す．壁の近くでは式(4・14)の分子粘性応力 τ_L が支配的で，流路中央に近づくと速度勾配が緩やかになって τ_L が減るかわりに式(4・13)で表されるレイノルズ応力 τ_T が大きくなる．全せん断応力（$\tau_L + \tau_T$）は流路断面にわたってほぼ一定となるが，わずかに変化するのは，瞬時値であるために時間的変動を含んでいることと，実際の計算では，非線形項は $\partial(u_i u_j)/\partial x_j$ ではなく式(4・8) の形で差分化され

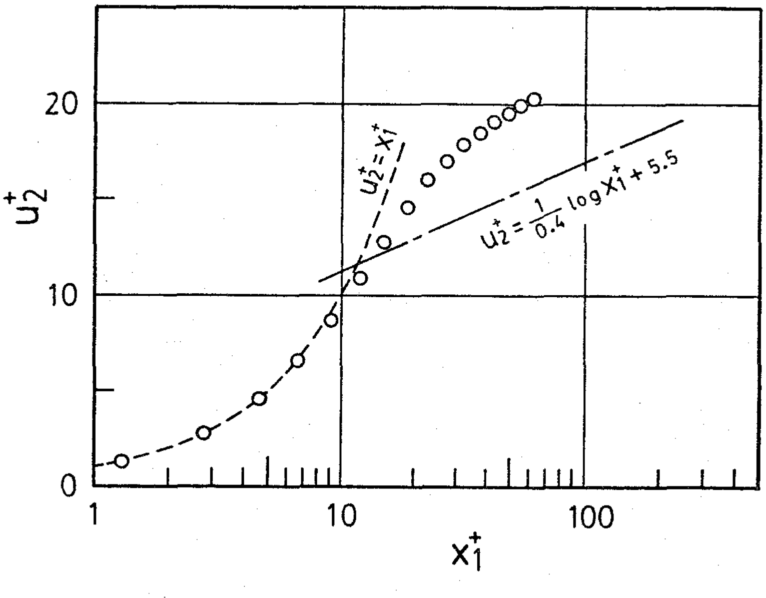


図4・9　平 均 速 度

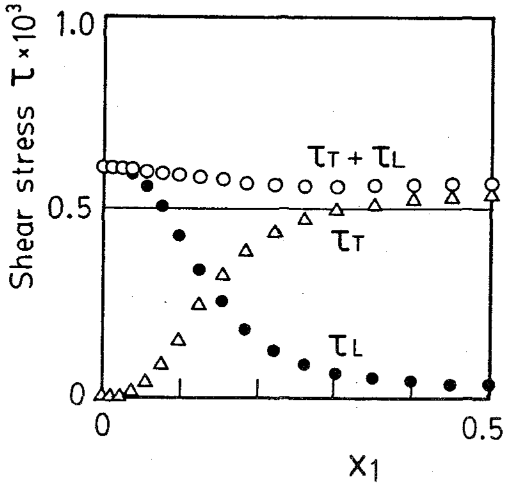


図4・10　せん断応力

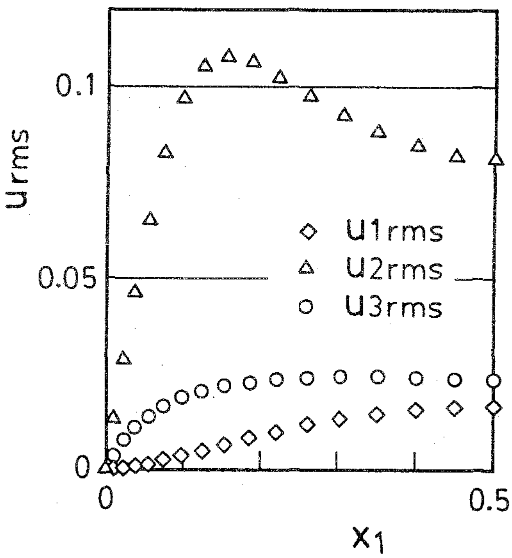


図4・11　乱れの強さ

るので，レイノルズ応力そのものについては力の釣り合いと厳密には対応しないことが原因であると考えられる．

図４・１１は各方向の速度乱れの強さの分布をｒｍｓで表したものである．流路全域にわたってx_2 方向成分が特に大きい．流路中央では，高レイノルズ数乱流では各方向成分はほぼ一様となるが，この流れではレイノルズ数が低い

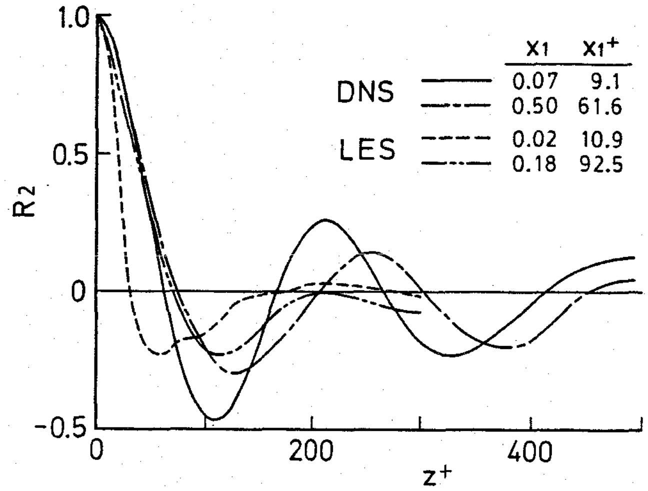
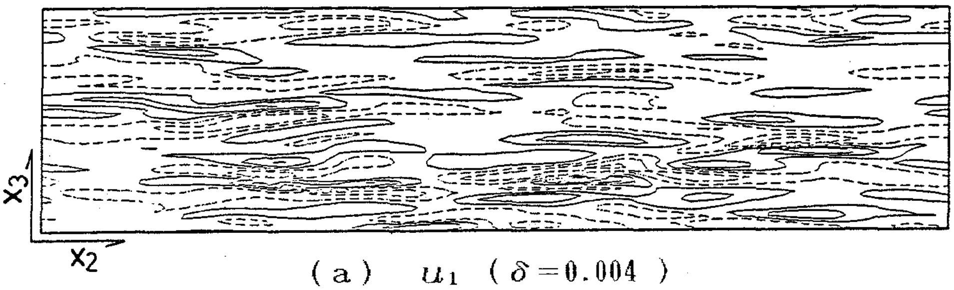


図4・12　x_2方向乱れ速度の横断方向自己相関
（ＬＥＳとの比較）

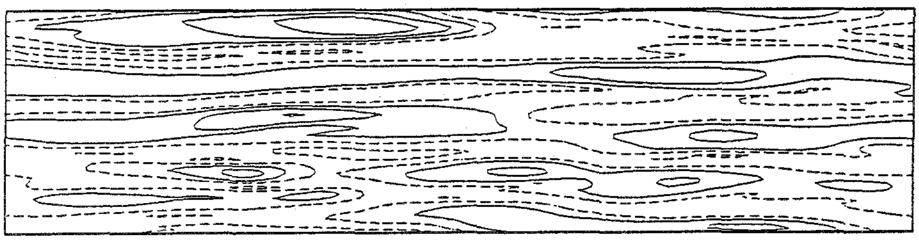
ので壁の制約を強く受けて非等方性が著しい．

図４・１２は式(4・12)の速度乱れu''_2の横断方向の２点の自己相関$R_2(z)$で，壁のごく近くの位置と流路中ほどについて，計算領域H_3の半分の距離まで示した．比較のために第２章で示したＬＥＳの結果を加えた．実線（ＤＮＳ）と破線（ＬＥＳ）の最初の極小値の位置は壁近傍の縞構造の横断方向スケール$\lambda_3{}^+$（$=\lambda_z u^*/\nu$）の半分に相当する．ＬＥＳでは$\lambda_3{}^+=$ 100〜120 となっているが，これに対して低レイノルズ数流れでは，$\lambda_3{}^+=$ 200〜220 と大きく，縞構造の分布が粗になっていること，また相関曲線の減衰が緩やかなことから変動のランダム性が小さいことがわかる．

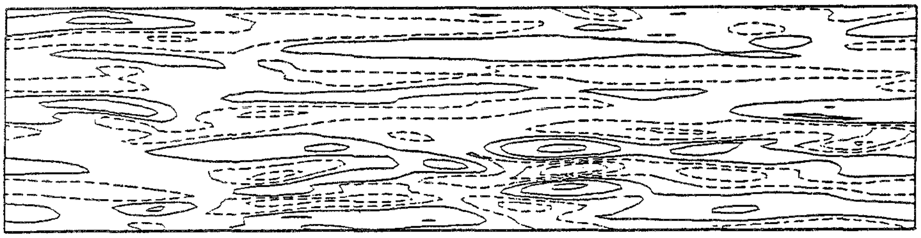
図４・１３は壁付近の$x_1=0.097$ と流路中央の$x_1=0.5$ の位置で平板に平行なx_2-x_3断面内における速度乱れの分布を等速度線図で表示したものである．図４・１３(a)(c)は面に垂直方向のu_1，図４・１３(b)(d)は平板の移動方向のu''_2を示す．δは等高線の間隔で，実線は正，破線は負の値を表す．速度分布の模様には壁近傍だけでなく流路中央においても乱流境界層の壁近傍と同様のx_2 方向に強く引き伸ばされた構造が観察され，さらに流路中央でも



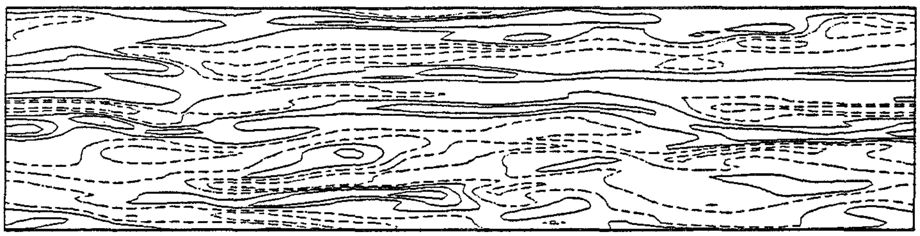
(a)　u_1　($\delta=0.004$)



(b)　u''_2 ($\delta=0.091$)
壁近傍　($x_1=0.097$)



(c)　u_1　($\delta=0.021$)



(d)　u''_2 ($\delta=0.079$)
流路中央　($x_1=0.5$)

図4・13　x_2-x_3断面内の乱れ分布

図４·１２の自己相関曲線の形状が壁付近と流路中央であまり変化しないことから，流路全体がいわゆる壁付近の縞構造で満たされていることがわかる．

図４·１３の断面は64×64に分割されているので，格子の解像度はこの構造を解析するためには十分である．x_3 方向の計算領域 H_3 の内に４～５周期分が含まれているので，周期条件の影響は小さいとみなすことができる．
x_2 方向には H_2 は u''_2 の図ではやや不足しているようにみえる．このことは図４·８のスペクトルで低波数側が十分でないことからもわかる．しかし，このように瞬時的には領域は不足しているが，$x_2 = H_2$ から流出した渦が $x_2 = 0$ から計算領域に流入しており，時間を追って渦を観察できることを考慮に入れれば，渦構造のシミュレーションには不都合はないと思われる．

乱流境界層の壁近傍の組織的構造および乱流生成との関連が重要な研究課題となっている[9][10][57][58]．第２章ではＬＥＳの結果から，乱れの生成に関しては推進力としての大規模な渦構造は必要ではなく，レイノルズ応力に正の寄与をもつ速度変動はそれ自身成長し，渦構造はその結果として生ずるものであるというモデルを示した．また本章で示した流路中央部まで壁の影響が強く作用する低レイノルズ数流れのシミュレーションの結果，境界層外層の大規模渦が存在しない場合にも乱流境界層の壁付近と類似の縞構造が観察されている．この構造の成因は第２章で述べたようなレイノルズ応力に寄与する流れは自ら発達する機構から説明できる．したがって推進力としての大規模な渦を必要としないというモデルの妥当性が実証されたものと考える．

図４·１４はエネルギ·バランスで，式(4·5) の各項を個別に計算して分布を示したものである．生成（production），粘性消散（図では v.dissipation と略記），乱流拡散（同 t.diffusion），および粘性拡散（同 v.diffusion）の４項の和は０とはならずに正の値をもち，乱れの強さがほぼ平衡に達していることに反する．この差は主として上流差分による数値的な拡散によるものと

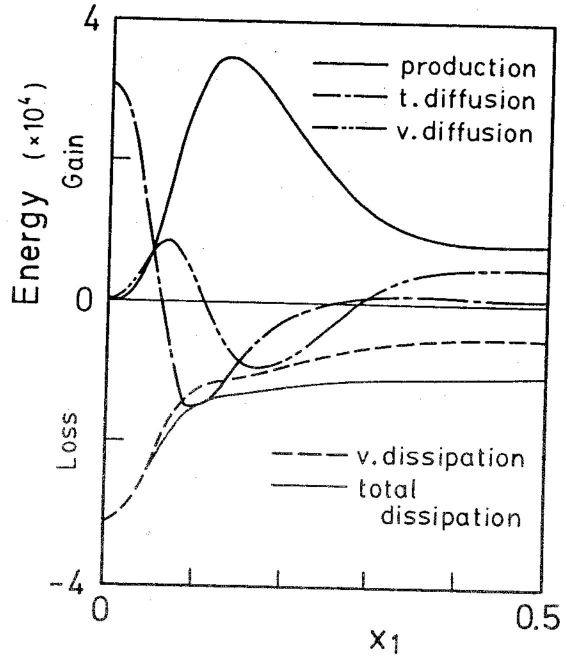


図4・14　エネルギ・バランス

考えられる．消散項にこれを加えたものを，厳密な根拠はないが，全消散と称して図中に細線で示した．このようにして補正されたエネルギ・バランスは全体として概ね妥当と思われる．ただし格子の粗さ・配置や上流差分スキームを変更したときに分布形状が変化する可能性もある．数値的な消散は，平均速度勾配の大きい壁付近よりもむしろ，乱れが大きくかつ格子が粗い流路中央部において顕著である．

4・4　LESモデルの検討

LESにおける小スケールのモデルとしては2・2節で述べたように勾配拡散型の Smagorinskyモデル[36]がひろく用いられている．このモデルは高レイノルズ数で等方的な乱れにはよく合うが，境界壁近傍では経験的な関数による補正が必要である．このモデルは一様な乱流場においては詳しく調べられている[38]〜[40]が，壁乱流で特に低レイノルズ数の場合にはあまり検討されていない．

そこで本研究では，直接シミュレーションで得られた流れ場（u）に第2章で用いたフィルタをかけて大スケール流れ（$\bar{u}$）と小スケール変動（u'）に分離し，小スケールのレイノルズ応力

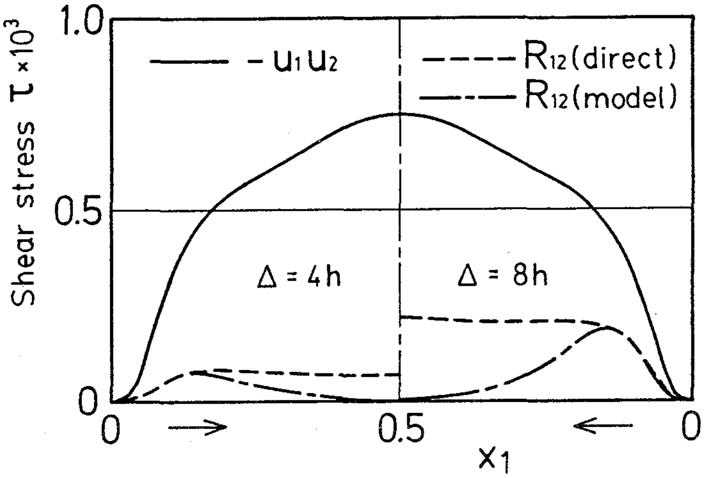
$$R_{ij} = \overline{\bar{u}_i \, u'_j} + \overline{u'_i \, \bar{u}_j} + \overline{u'_i \, u'_j} \qquad \text{(4·18)}$$

を実際に計算して，モデルによる値と比較する．このような比較は直接シミュレーションが現実の流れを忠実に再現していることが前提となる．計算領域がやや不足している難はあるが，前節に示した結果はほぼ妥当なものであり，定性的な検討には支障はないであろう．なおここでは，格子スケール程度の乱れを比較の対象とするので，計算領域よりも解像度を重視して，直接シミュレーションによるデータには Case.Ⅳの結果を用いた．

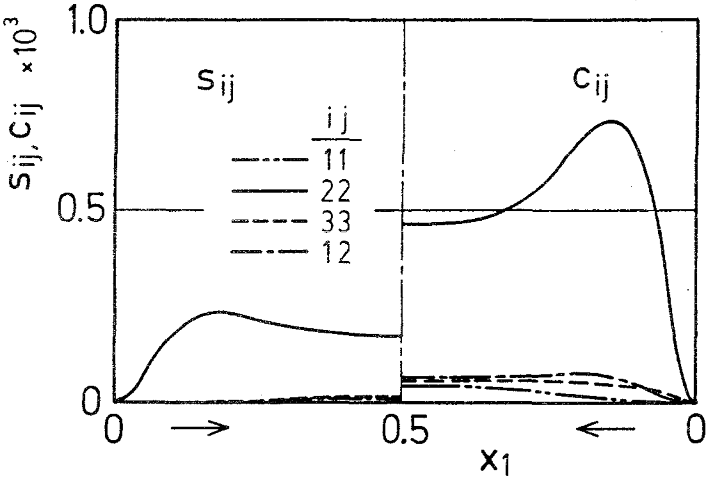
図4・15(a) はせん断成分の平均値について直接計算した〈R_{12}〉とモデルによる

$$\left\langle K_H \left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \bar{u}''_2}{\partial x_1}\right) + K_I \frac{\partial \langle \bar{u}_2 \rangle}{\partial x_1} \right\rangle \qquad \text{(4·19)}$$

を比較したものである．K_H, K_I は小スケールの渦粘性係数で，それぞれ式(2·19)と式(2·23)から求められる．フィルタ幅を差分格子間隔の4倍と8倍にした場合について計算した．フィルタ幅が大きいほど，それ以下のスケールの



（ａ）　小スケール乱れのせん断応力の比較



（ｂ）　小スケール乱れのレイノルズ応力の比較

図４・１５　ＬＥＳモデルの検討

レイノルズ応力に対する寄与 R_{12} の割合が増す．直接計算の結果とモデルは壁近傍（ $x_1^+ < 20$ ）においてよく一致しているが，流路中央ではモデルは現実の流れに合わない．この結果は，$x_1^+ < 20$ では低速で乱れの非等方性が強いが，平均速度分布はおおむね直線分布（ $\langle u_2^+ \rangle = x_1^+$ ）でレイノルズ数に関わらず普遍性をもっているので，経験的な補正関数を用いることによ

り種々の流れに対応できることを示している．また流路中央部における不一致から，大規模流れが非等方で低レイノルズ数のときモデルが不適合であることがわかる．この領域ではＬＥＳモデルの方が実際の小スケール乱れよりも渦粘性が小さく見積もられている．逆に始めから乱流を前提として構成されている Smagorinskyモデルで計算すれば，より高乱れの流れとなることが予測される．このことは，たとえば回転流路の負圧側で乱れが安定化して再層流化がおこる流れに対し Smagorinskyモデルを用いたＬＥＳではこれを再現できないという，第３章の結果を裏づけている．

図４･１５(b) はフィルター幅が格子幅の４倍のときの小スケールのレイノルズ応力の各成分を直接計算し，

$$s_{ij} = \langle \overline{u'_i u'_j} \rangle \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (4\cdot20)$$

$$c_{ij} = \langle \overline{\bar{u}_i \; u'_j} + \overline{u'_i \bar{u}_j} \rangle \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (4\cdot21)$$

のように２項に分けて表したものである．（ただし s_{12}，c_{12}については絶対値で示した．）非常に大きい幅のフィルターをかけた場合には c_{ij}は小さくなり，いわゆるレイノルズ平均ではこの項は０となる．図のようにフィルター幅が大きい場合には c_{ij}がむしろ s_{ij}よりも大きくなる．高レイノルズ数乱流でかつ格子を細かくとることができる場合には，小規模乱れは等方的であるから，式(2･17)のモデルのように垂直応力成分 R_{kk}を各方向に等配分するのは問題はない．しかし大規模流れが非等方的な低レイノルズ数乱流では図のように小スケール乱れにも非等方性が強く，このモデルには問題が多い．したがって勾配拡散型のモデルは各方向の乱れエネルギに対する小スケール渦の寄与のバランスを不合理に与え，その結果大規模乱れの構造が影響を受けることもあり得る．

以上の結果から，大規模流れが低レイノルズ数のとき，小スケール渦の作用を渦粘性で表してその係数に Smagorinskyモデルを用いる方法では，レイノル

ズ数のみによる非等方性を考慮しない補正を加えるだけでは対応できないことがわかる．また低レイノルズ数では乱れの重要な構造に関して十分な解像度をもつ格子を設定できる場合が多いので，モデルを含むシミュレーションよりむしろ直接シミュレーションが適していると考えられる．

４・５　結論

遷移レイノルズ数域の平行平板間クエット流れを上流差分を用いた直接シミュレーションによって計算し，以下のような知見を得た．

（１）　数値計算が現実の流れを再現していることを実証するために必要な手続きを考察し，これにしたがって本計算により妥当な結果が得られていることを示した．

（２）　上流差分の効果について検討し，ある程度細かい格子を設定すれば，このスキームは乱れの重要な構造に対して影響を及ぼさないことが確かめられた．

（３）　数値シミュレーションにより遷移レイノルズ数域の流れに特徴的な乱れの分布などを再現できた．

（４）　遷移レイノルズ数域では流路中央の流れも壁付近とほとんど変わらない縞構造を示しており，いわゆる乱流境界層の壁近傍の構造で満たされていることがわかった．

（５）　このような大規模な渦構造が存在しない場での乱れの成因は，第２・５節で議論したように，レイノルズ応力に寄与する乱れがせん断流れ場の中で正のフィードバックを受けて発達する機構によって説明できる．

（６）　小スケール渦のモデルの妥当性を直接シミュレーションにより調べた結果，低レイノルズ数乱流で消散スケールの渦まで格子で捕捉できる場合には，高レイノルズ数で等方的な乱流を前提とした Smagorinskyモデルを用いるＬＥＳよりも，経験的な過程の少ない直接シミュレーションが有効であることがわかった．

付録　計算時間

ここで乱流の数値シミュレーションに要した計算時間を示す．計算時間は使用する計算機に大きく依存する．本研究の進行中にも計算機性能が飛躍的に向上した．例えば，第２，３章の32×32×32の格子を用いたＬＥＳの計算で１タイム・ステップを進行させるのに，大阪大学計算機センターの NEC ACOS-1000 で 7.1秒，同 HFP では 2.2秒を要したが，京都大学計算機センターで使用可能となった FACOM VP-100 を使いベクトル計算機向きにプログラムを改良した結果， 0.22秒で計算された．なお本計算では時間進行差分がひとつのループを形成しているが，この部分は完全にベクトル化されている．国産の最新のスーパーコンピュータはさらにこの数倍の性能をもつといわれており，例えば 30 分以内という現実的な計算時間で 10000ステップ以上の十分長い時間の平均をとることができ，同時により大規模な計算も可能となっている．なお第３章の直接シミュレーションには， Case.Ⅱの24×64×64の格子の場合，１ステップあたり FACOM VP-100 で 0.57秒の計算時間を要した．

第5章　オゼーン近似の基本解を用いた境界要素法

5・1　序論

境界要素法により流れを解析するためには，支配方程式が線形で，グリーン関数が得られることが前提となる〔93〕．ナビエ・ストークスの式をストークス近似やオゼーン近似のように線形化できる場合については，基本解が知られている〔94〕から境界要素法が可能で，ストークス流れに適用された例〔95〕があるが，線形近似の成立する範囲は極めて小さい．また高レイノルズ数で，流れを非粘性領域と境界層に分けられる場合についても，ポテンシャル流れの特異解が得られており，外部流れについては境界要素法はすでに実用段階にある〔3〕．しかしその中間のレイノルズ数域ではナビエ・ストークス式は非線形性が強いので，その数値解析には主として差分法と有限要素法が用いられているようである．

境界要素法は未知量に関しては固体表面上の面積分でよく，体積積分に比べて有利である．また工学的には，ポテンシャル流れでは表面上の流れ，粘性流れでは応力分布のみが重要な場合が多い．そこで本研究ではこのような境界要素法の利点を非線形流れにも拡張するために，境界要素法を繰り返して用いることによりナビエ・ストークスの式の解を得る方法を考える．非線形性があまり強くない流れの場合には，この方法が有効であると思われる．

そのためにオゼーン近似式に対する境界要素法の定式化を行い，これを拡張して完全ナビエ・ストークスの式を解く方法を導く．ストークス近似を基礎とすることも可能であるが，オゼーン近似の方がやや高いレイノルズ数まで適用が可能で収束が速いと考えた．なおストークス流れに関してはいわゆる直接法に基づく定式化の方法(95)が示されており，またオゼーン流れについてはいわゆる間接法による解析の例がある(96)(97)．しかしオゼーン流れに対する境界要素法の直接法に基づく定式化は見あたらず，さらにこれをナビエ・ストークスの式の解法に拡張した例はない．なお境界要素法による粘性流れの解法としては Wu ら(98)の方法が知られている．この方法は渦度の発展方程式とポアソンの式を交互に解くもので，かなり高レイノルズ数域まで適用が可能である．しかし Wu らの方法は定常流の場合にも大規模な収束演算を必要とし，レイノルズ数がそれほど高くない範囲では本解法が有利であると考える．

具体的な応用の例として二次元平板のまわりの流れを解析した．この流れは高レイノルズ数では境界層近似式を解けばよく，境界層の発達の影響を補正する第二近似まで考えれば $Re=10$ 程度の低レイノルズ数まで解析できる(99)．さらに前後縁近傍の特異性についても吟味が行われており(100)(101)，流れの性質はよく調べられている．本報の方法は，オゼーン近似の基本解をもとに，より高レイノルズ数流れの解を求めようとするものである．なおこの問題に関して Dennis らの解法(102) が知られており，平板に限れば極めて広範囲のレイノルズ数に対して高精度の解が得られる．しかし境界要素法には物体形状の任意性，扱いの簡便さの利点がある．

5・2　境界面積分式

図5・1のような一様な流れの中に置かれた任意形状の物体のまわりの非圧縮性流体の定常流れを考える.

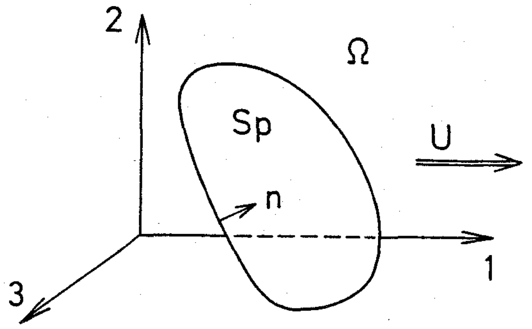


図5・1　一様流中におかれた物体

5・2・1　オゼーン近似式に対する積分式

オゼーン近似を行った運動方程式は次のように表される.

$$U\frac{\partial v'_i}{\partial y_1}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y_i}+\nu\frac{\partial^2 v'_i}{\partial y_j\,\partial y_j}+X_i \quad\cdots\cdots\quad (5\cdot1)$$

ここでUは無限遠の流速，v'_iはそれからの変化で，　$v_i=\delta_{i1}U+v'_i$で表される．pは静圧，X_iは単位質量あたりの外力を示す．応力テンソル

$$\tau_{ij}=-\delta_{ij}p+\mu\left(\frac{\partial v'_i}{\partial y_j}+\frac{\partial v'_j}{\partial y_i}\right) \quad\cdots\cdots\quad (5\cdot2)$$

を用いると式(5·1) は次のようになる.

$$\frac{\partial}{\partial y_j}\left(\delta_{j1}Uv'_i-\frac{1}{\rho}\tau_{ij}\right)=X_i \quad\cdots\cdots\quad (5\cdot3)$$

さてオゼーン近似の基本解として，点$\vec{y}$にk方向の単位集中力が作用するときの点$\vec{x}$における速度$\lambda_{i,k}$，静圧$q_{,k}$を考えると，これらは次式を満足する.

$$U\frac{\partial \lambda_{i,k}}{\partial x_1}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial q_{,k}}{\partial x_i}+\nu\frac{\partial^2 \lambda_{i,k}}{\partial x_j\ \partial x_j}+\frac{1}{\rho}\delta_{ik}\delta(\vec{x}-\vec{y}) \quad \cdots\cdots (5\cdot4)$$

ここでもテンソル

$$T_{ij,k}=-\delta_{ij}q_{,k}+\mu\left(\frac{\partial \lambda_{i,k}}{\partial x_j}+\frac{\partial \lambda_{j,k}}{\partial x_i}\right) \quad \cdots\cdots (5\cdot5)$$

を用いて式(5·5) を書き換えると次式が得られる．

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\delta_{j1}U\lambda_{i,k}-\frac{1}{\rho}T_{ij,k}\right)=\frac{1}{\rho}\delta_{ik}\delta(\vec{x}-\vec{y}) \quad \cdots\cdots (5\cdot6)$$

いま式(5·3) に$\lambda_{i,k}(\vec{x}-\vec{y})$，式(5·6) に$v'_i(\vec{y})$をそれぞれ乗じて両者の差をとって変形すると，

$$\begin{aligned}\delta(\vec{x}-\vec{y})\,v'_k(\vec{y}) &=\frac{\partial}{\partial y_j}\{\lambda_{k,i}(\vec{x}-\vec{y})\,\tau_{ij}(\vec{y})+T_{ij,k}(\vec{x}-\vec{y})\,v'_i(\vec{y})\\ &\quad -\delta_{j1}\rho U\lambda_{k,i}(\vec{x}-\vec{y})\,v'_i(\vec{y})\}\\ &\quad +\rho\lambda_{k,i}(\vec{x}-\vec{y})\,X_i(\vec{y})\end{aligned} \quad \cdots\cdots (5\cdot7)$$

となる．これを流れ場の全領域Ωで積分し，発散定理を用いると，次のような速度分布v'_kを与える式を導くことができる．

$$\begin{aligned}v'_k(\vec{x})=\iint_{S_P} n_j(\vec{y})\,\{\lambda_{k,i}(\vec{x}-\vec{y})\,\tau_{ij}(\vec{y})\\ +T_{ij,k}(\vec{x}-\vec{y})\,v'_i(\vec{y})\end{aligned}$$

$$-\delta_{j1}\rho U\lambda_{k,i}(\vec{x}-\vec{y})\ v'_i\ (\vec{y})\ \}\ dS_y$$

$$+\rho\iiint_{\Omega}\lambda_{k,i}(\vec{x}-\vec{y})\ X_i(\vec{y})\ dV_y \qquad \cdots\cdots \quad (5\cdot8)$$

ただしS_Pは物体の表面，n_jは表面上の内向きの単位法線ベクトルである．

オゼーン流れの基本解はすでに知られている〔94〕ので，上式で$\vec{x}\to\vec{y}$として左辺に物体表面上の速度を与えれば，この式は速度の境界条件を満たすような応力分布f_i（$=n_j\tau_{ij}$）を決定するための境界面積分方程式を与えている．

5・2・2　ナビエ・ストークス式への拡張

ナビエ・ストークスの運動方程式

$$U\frac{\partial v'_i}{\partial y_1}+v'_j\frac{\partial v'_i}{\partial y_j}$$

$$=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y_i}+\nu\frac{\partial^2 v'_i}{\partial y_j\ \partial y_j}+X_i \qquad \cdots\cdots \quad (5\cdot9)$$

の非線形項を流れ場に分布するオゼーン源

$$X'_i=\ -v'_j\frac{\partial v'_i}{\partial y_j} \qquad \cdots\cdots \quad (5\cdot10)$$

とみなし，これを外力に含めて$X_i+X'_i$を式(5・8)の被積分項に用いれば，

$$v'_k\ (\vec{x})=\iint_{S_P}n_j(\vec{y})\ \{\lambda_{k,i}(\vec{x}-\vec{y})\ \tau_{ij}\ (\vec{y})$$

$$+T_{ij,k}\ (\vec{x}-\vec{y})\ v'_i\ (\vec{y})$$

$$-\delta_{j1}\rho U\lambda_{k,i}(\vec{x}-\vec{y})\ v'_i\ (\vec{y})\ \}\ dS_y$$

$$+\rho\iiint_{\Omega}\lambda_{k,i}(\vec{x}-\vec{y})\ \{X_i(\vec{y})+X'_i(\vec{y})\}\,dV_y$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (5\cdot 11)$$

となる．同式の解はナビエ・ストークス式の流れを与えることになる．ただしこれを解く場合にはX'_iは未知量であるから，これを既知量として扱うために繰り返し計算が必要である．まず$X'_i=0$として式(5･11)によるによる速度の境界条件式を解いてf_i（$=n_j\tau_{ij}$）を求めればこれがオゼーン解である．式(5･11)を用いて速度分布u'_iさらに非線形項に対応するオゼーン源分布X'_iが得られる．新たなX'_iを用いて境界条件式を解き，解が収束するまで繰り返せばナビエ・ストークスの式の解が得られる．

5・3　二次元平板のまわりの流れ

5・3・1　境界面積分式

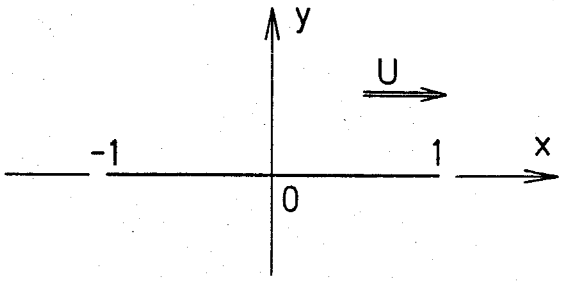


図5・2　平 板 と 座 標

図5・2のような一様流れに平行におかれた二次元平板のまわりの流れを考える．ナビエ・ストークス式に基づく境界面積分式(5・11)において，外力 X_i を0とする．平板上では $n_1=0$，さらに

$$U+v'_1=0, \quad v'_2=0 \qquad (5\cdot12)$$

であることを考えると式(5・11)は

$$v'_k(\vec{x}) = \oint_{-1}^{1} n_2 \{\lambda_{k,i}(\vec{x}-s)\,\tau_{i2}(s) - UT_{12,k}(\vec{x}-s)\}\,ds + \rho\iint_{-\infty}^{\infty} \lambda_{k,i}(\vec{x}-\vec{y})\,X'_i(\vec{y})\,dy_1dy_2 \qquad (5\cdot13)$$

となる．右辺第1項の積分は平板の上下面に対して行うことを示す．平板上の点（s，0）における単位長さ，単位幅あたりの抗力を $\rho m(s)$ で表す．上面では $n_2=-1$，$\tau_{12}=\rho m/2$，下面では $n_2=1$，$\tau_{12}=-\rho m/2$，さらに $n_2(\lambda_{k,2}\tau_{22}-UT_{12,k})$ は上下面で打ち消しあうことから，境界面積分式は次のようになる．

$$u'_k(\vec{x}) = -\rho\int_{-1}^{1}\lambda_{k,1}(\vec{x}-s)\,m(s)\,ds$$

$$+\rho\iint_{-\infty}^{\infty}\lambda_{k,i}(\vec{x}-\vec{y})\,X'_i(\vec{y})\,dy_1dy_2 \quad \cdots\cdots \quad (5\cdot14)$$

上式の右辺第１項は平板上の抗力分布に対応するオゼーン源による速度である．また第２項はナビエ・ストークス式の非線形項〔式(5･10)〕を流れ場に分布するオゼーン源とみなしたとき，これにより誘起される流れと解釈できる．

式(5･14)の$\lambda_{k,i}$は以下に示すような二次元オゼーン近似式の基本解〔94〕である．

$$\lambda_{1,1}=\frac{1}{2\pi\rho U}\left[-\frac{x_1}{r^2}+k\exp(kx_1)\left\{K_0(kr)+\frac{x_1}{r}K_1(kr)\right\}\right] \quad \cdots\cdots \quad (5\cdot15a)$$

$$\lambda_{1,2}=\lambda_{2,1}=\frac{1}{2\pi\rho U}\left[-\frac{x_2}{r^2}+k\exp(kx_1)\frac{x_2}{r}K_1(kr)\right] \quad \cdots\cdots \quad (5\cdot15b)$$

$$\lambda_{2,2}=\frac{1}{2\pi\rho U}\left[\frac{x_1}{r^2}+k\exp(kx_1)\left\{K_0(kr)+\frac{x_1}{r}K_1(kr)\right\}\right] \quad \cdots\cdots \quad (5\cdot15c)$$

ただし，$r=|\vec{x}|$で，K_0，K_1は第２種変形ベッセル関数である．またkは

$$k=\frac{U}{2\nu} \quad \cdots\cdots \quad (5\cdot16)$$

で定義され，これは平板長さLを代表長さとするレイノルズ数

$$R = \frac{UL}{\nu} \qquad \text{(5·17)}$$

の1/4である.

平板上では式(5·14)のv'_kは境界条件式(5·12)を満足しなければならない. 流れの対称性より平板では$v'_2 = 0$であるから, 境界条件式は次のようになる.

$$\rho \int_{-1}^{1} \lambda_{1,1}(x - s)\, m(s)\, ds$$
$$= U + \rho \iint_{-\infty}^{\infty} \lambda_{1,i}(x - \vec{y})\, X'_k(\vec{y})\, dy_1 dy_2 \qquad \text{(5·18)}$$

上式を解いて抗力分布$m(s)$を決定する. まずX'_iを省略して解くと, これがオゼーン解である. これから式(5·14)により速度v'_kの分布, さらに面積力として扱うべき式(5·10)非線形項X'_iの分布を計算する. 新たなX'_i分布を用いて方程式(5·18)を解き, これを収束するまで繰り返す.

5・3・2　数値計算法

本節以降ではこれまでのテンソル記号

x_i , v'_i , X'_i

に代えて

(x, y) , (u', v') , (X', Y')

を用いることにする.

5・3・2a　平板上のオゼーン源による流れ

通常の境界要素法に従えば, 物体表面上をパネル(二次元の場合は線素)に分割し, 各パネル上のオゼーン源の強さを解く連立一次方程式を導くことにな

る．平板では前後縁近傍で流れおよび抗力分布が特異となり，この部分で非常に細かいパネルが必要となる．そこでこの問題を回避するために，抗力分布を適切に表現し得ることがわかっている変形 Glauert級数を用いて$m(s)$を次のように表す[96]．

$$m(s)=A_{-1}\tan\frac{\theta}{2}+A_0\cot\frac{\theta}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin n\theta$$

$$\text{ただし}\quad s=-\cos\theta\quad(0\leqq\theta\leqq\pi) \qquad \cdots\cdots\cdots(5\cdot19)$$

第N項までとることにすれば，平板上のオゼーン源により点z（$=x+iy$）に誘起される速度は次式で表される．

$$u'(z)-iv'(z)=\frac{1}{2\pi U}\sum_{n=-1}^{N}G_n(z)A_n \qquad \cdots\cdots\cdots(5\cdot20)$$

$$G_{-1}(z)=\int_{-1}^{1}g(z-s)\tan\frac{\theta}{2}\,ds \qquad \cdots\cdots\cdots(5\cdot21a)$$

$$G_0(z)=\int_{-1}^{1}g(z-s)\cot\frac{\theta}{2}\,ds \qquad \cdots\cdots\cdots(5\cdot21b)$$

$$G_n(z)=\int_{-1}^{1}g(z-s)\sin n\theta\,ds \qquad \cdots\cdots\cdots(5\cdot21c)$$

$$(n=1,2,\cdots\cdots,N)$$

$$g(z)=\frac{1}{z}-k\exp(kx)\left\{K_0(kr)+\frac{r}{z}K_1(kr)\right\} \qquad \cdots\cdots\cdots(5\cdot22)$$

$$\text{ただし，}\ r=|z|$$

とくに平板上の点（x，0）の速度$u'(x)$を求めるためには式(5·22)の$g(z)$の代わりに

$$h(x)=\frac{1}{x}-k\exp(kx)\{K_0(k|x|)+\mathrm{sgn}(x)K_1(k|x|)\} \qquad \text{(5·23)}$$

を用いて式(5·21)の積分を行えばよい．この積分値を$G_n(z)$の代わりに$H_n(x)$で表すことにする．

5・3・2b　流れ場のオゼーン源による流れ

流れ場を格子で分割して式(5·14)の右辺第２項の面積分を数値的に行う．x軸に関する流れの対称性から上半面（$y\geqq 0$）のみに格子を設ければよく，その総数をMとする．第m番めの格子の代表点をζ_m（$=\xi_m+i\eta_m$），面積をa_mで表す．点ζ_mにおけるオゼーン源を（X'_m，Y'_m）とすれば，これらにより点zに誘起される速度は次のようになる．

$$u'(z)-iv'(z)=\frac{1}{2\pi U}\sum_{m=1}^{M}\{C_{1,m}(z)(X'_m-iY'_m)+C_{2,m}(z)(X'_m+iY'_m)\} \qquad \text{(5·24)}$$

$$C_{1,m}(z)=a_m\left[k\exp\{k(x-\xi_m)\}\{K_0(kr_1)+\frac{r_2}{z_2}K_1(kr_2)\}-\frac{1}{z_2}\right] \qquad \text{(5·25a)}$$

$$C_{2,m}(z)=a_m\left[k\exp\{k(x-\xi_m)\}\{K_0(kr_2)+\frac{r_1}{z_1}K_1(kr_1)\}-\frac{1}{z_1}\right] \qquad \text{(5·25b)}$$

（ただし　$z_1=z-\zeta_m$，$r_1=|z_1|$，
$z_2=z-\overline{\zeta}_m$，$r_2=|z_2|$）

とくに平板上の点（x，０）の速度$u'(x)$は次式のようになる．

$$u'(x)=\frac{1}{\pi U}\sum_{m=1}^{M}\{D_{1,m}(x)X'_m+D_{2,m}(x)Y'_m\} \quad \cdots\cdots (5\cdot26)$$

$$D_{1,m}(x)=a_m\left[k\exp\{k(x-\xi_m)\}\{K_0(kr_3)+\frac{x-\xi_m}{r_3}K_1(kr_3)\}-\frac{x-\xi_m}{r_3{}^2}\right] \quad \cdots\cdots (5\cdot27a)$$

$$D_{2,m}(x)=a_m\frac{\eta_m}{r_3}\left[\frac{1}{r_3}-k\exp\{k(x-\xi_m)\}K_1(kr_3)\right] \quad \cdots\cdots (5\cdot27b)$$

（ただし　$r_3{}^2=(x-\xi_m)^2+\eta_m{}^2$）

5・3・2c　（X',Y'）の計算法

流れ場に分布するオゼーン源X',Y'を求めるためには式(5・20)と式(5・24)で得られるu',v'とその微係数が必要である．それらは式(5・22)の$g(z)$と式(5・25)の$C_{i,m}(z)$の代わりにそのx，y方向の微係数を用いることにより得られる．

5・3・2d　連立方程式

平板上に（$N+2$）個の標点を

$$\theta_k=\frac{k}{N+3}\pi, \qquad k=1,2,\cdots\cdots,N+2 \quad \cdots\cdots (5\cdot28)$$

のように配置する．各標点において境界面積分式(5・18)を適用すると，A_n に関する連立方程式が得られる．

$$\sum_{n=-1}^{N}H_n(x_k)A_n=-2\pi U^2-2\sum_{m=1}^{M}\{D_{1,m}(x_k)X'_m+D_{2,m}(x_k)Y'_m\} \quad \cdots\cdots (5\cdot29)$$

$$(k=1,2,\cdots\cdots,N+2)$$

上式を$U=1$として解けばよい．平板の抵抗Dは

$$D=\rho\int_{-1}^{1} m(s)\,ds \qquad (5\cdot30)$$

で，抗力係数C_Dは次式で表される．

$$C_D\left(\equiv\frac{D}{2\pi U^2}\right)=\frac{\pi}{2}\left(A_{-1}+A_0+\frac{A_1}{2}\right) \qquad (5\cdot31)$$

5・3・2e　計算の手順

まず$X'=Y'=0$として連立方程式(5·29)を解き，オゼーン解を求める．オゼーン流れの速度分布に基づいて平板のまわりに面積分のための格子を生成する．各格子の代表点でu', v'，さらにX', Y'を計算する．　新たなX', Y'分布により連立方程式を解き，これを抗力係数C_Dが収束するまで反復する．

5・3・3　計算結果

図5·3にレイノルズ数$R=10$のときの平板付近の格子配置を示す．前後縁近傍の流れの特異性[100]を考慮して，前縁（$x=-1$）の周囲の最小の格

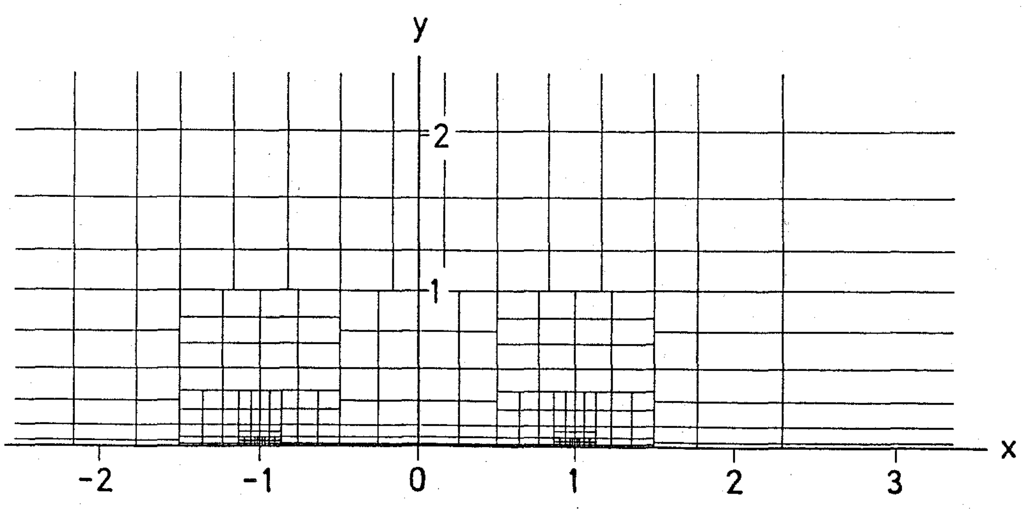


図5・3　面積積分のための格子網（部分）

子Δ_L，後縁（$x=1$）の周囲の最小の格子Δ_T がそれぞれレイノルズ数Rに対して

$$\Delta_L < R^{-1} \quad , \qquad \Delta_T < R^{-3/4}$$

となるように設定されている．例えば$R=10$ の場合には$-5<x<500$，$y<8$の範囲に 436個の格子が生成された．$N=18$ としたとき$R=10$ で7回，$R=100$ で 10 回の繰り返しで抗力係数C_D は3桁まで収束した．

図5·4にレイノルズ数Rと抗力係数C_D の関係を示す．$R\leqq 100$ において Janour[103] の測定値およびDennisら[102] の計算結果とよく一致する．また低レイノルズ数においてはオゼーン解に漸近する．$R>100$ では本解法によるC_D は実験結果に一致せず，$R^{1/2}C_D \fallingdotseq 1.9$ でほぼ一定となる．これは本解法が物体表面上の応力分布や流れ場の非線形項をオゼーン源で表しているからである．オゼーン基本解の一例として$\lambda_{2,2}^*$（$=2\pi\rho U\lambda_{2,2}$）のx軸上の変化を図5·5示す．レイノルズ数が大きくなると原点近傍での変化が激しくなる．オゼーン流れは元来レイノルズ数が非常に小さい流れに対する近似であるから，その挙動は高レイノルズ数においては必然的に不自然となる．したがって本解法は理論的には全レイノルズ数域の完全ナビエ・ストークス式を扱うことが可能であるが，オゼーン基本解を基礎としている以上，高レイノルズ数域での不利は避けられない．同時に，平板の前後縁のように，流れ場そのものに特異性があり，レイノルズ数の増加とともにその領域が集中する場合には，非線形項を表すオゼーン源の分布の特異性も強くなる．このような流れでは，積分値を精度よく求めるにはレイノルズ数の増加とともに非常に密な格子が必要で，そのことが計算の不安定をもたらすことがあるので数値的な取り扱いは容易ではなくなる．

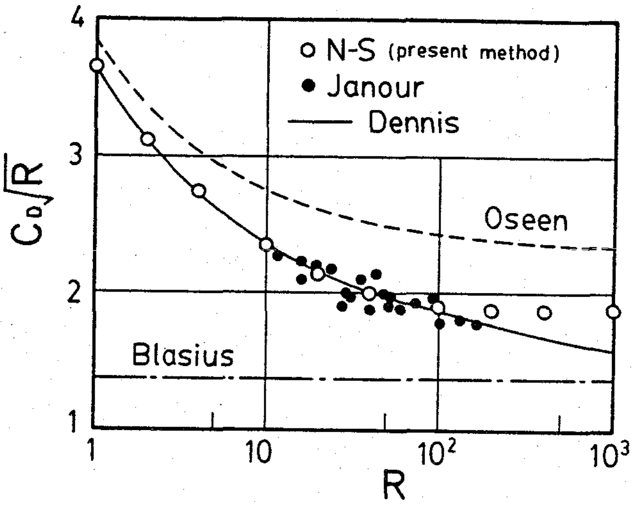


図5・4　レイノルズ数Rと抗力係数C_Dの関係

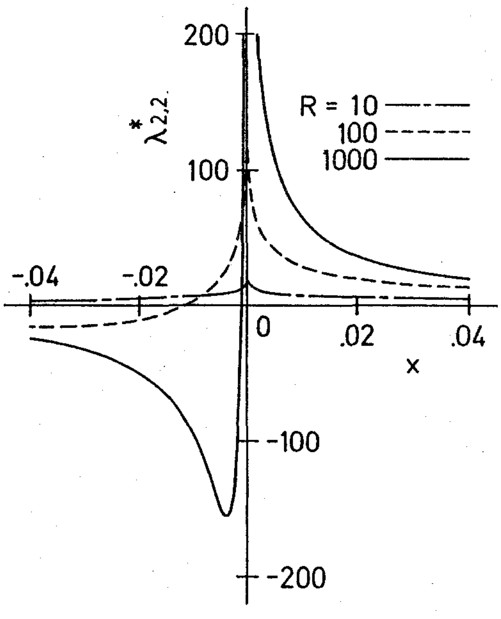


図5・5　オゼーン近似の基本解の例

図5・6は平板上の抗力分布である．平板をパネルで分割する場合には前縁と後縁の特異性のために両端で非常に密にしなければならないが，ここではこの特異性は式(5・19)の変形Glauert級数の第1，2項により表されているので連立方程式の規模は低減されている．図から，オゼーン解と収束解（ＮＳ解）

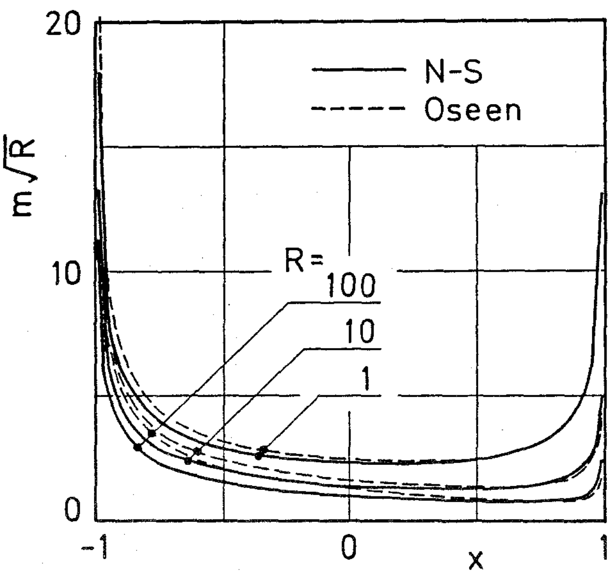


図5・6　平板上の抗力分布

の差は高レイノルズ数になるほど大きく，それはほとんど前半で大きいことがわかる．

図5・7は平板のまわりの流れで，$x=0$（平板中央），$x=\pm 1$（後縁・前縁），$x=\pm 2$（延長上）の位置での速度uのy方向分布を示す．実線はレイノルズ数$R=10$，一点鎖線は$R=100$における収束解，破線はそれぞれの場合のオゼーン解である．低レイノルズ数では粘性拡散が大きいので平板の影響のおよぶ範囲が大きくなり，広範囲に格子を設定しなければならないが，粗い格子でよいので，総数は少なくなる．また図5・8は$R=100$のときの平板中央断面（$x=0$）における速度uのy方向分布について，本解法の収束解（ＮＳ解）とブラジウス解，オゼーン解との比較である．抗力係数の大きさ（図5・4）に対応して平板上の速度勾配の大きさはオゼーン解，ＮＳ解，ブラジウス解の順で，粘性のおよぶ範囲はこの順に小さくなる．これはオゼーン解は渦度のx方向の輸送を過大に評価しているためであるが，低レイノルズ数ではそれによる誤差は顕著ではなく，オゼーン近似は特に平板上の速度勾配に

ついてはナビエ・ストークス式の解に近い解を与える．なお$R=100$ではブラジウス解はよい近似でないことがわかる．

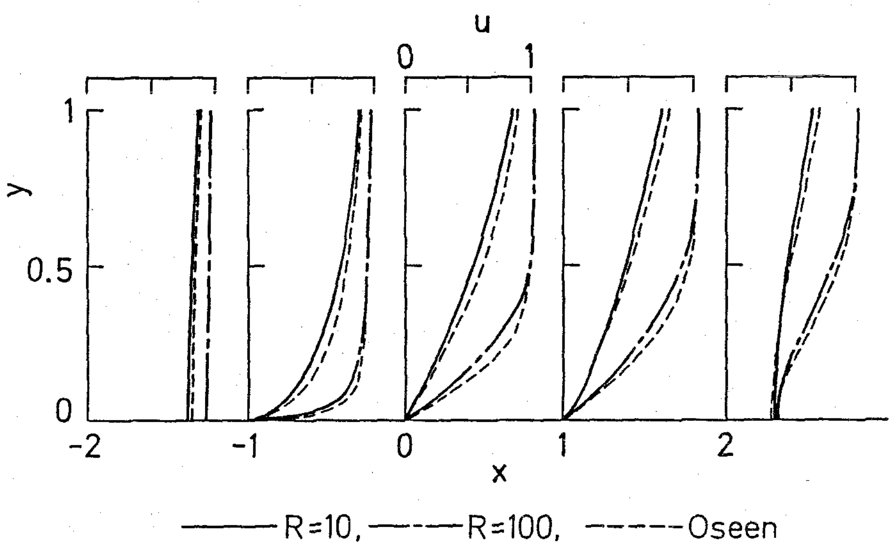


図5・7　平板のまわりの速度（u）分布

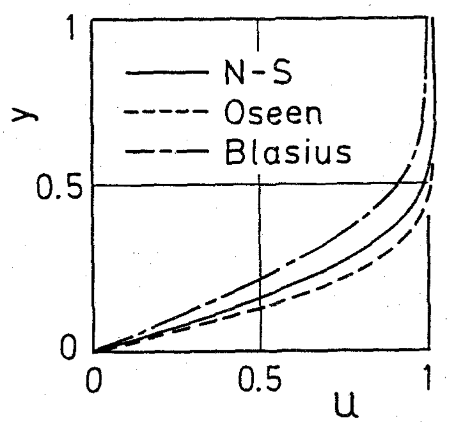


図5・8　収束（N－S）解とオゼーン解，ブラジウス解の比較

5・4　結論

第５章では完全ナビエ・ストークス式を境界要素法を用いて解く方法を示した．主な結果は以下の通りである．

（１）　オゼーン近似に基づく境界面積分式を導き，これを完全ナビエ・ストークス式に拡張して，境界要素法による反復解法を示した．本解法はオゼーン近似では表現し得ない中間レイノルズ数域の流れにも適用できる．

（２）　この解法を一様流れに平行におかれた二次元平板のまわりの流れに適用してその有用性を確かめた．

（３）　平板のまわりの流れについては，100 以下のレイノルズ数域では測定値とよく一致する解が得られたが，高レイノルズ数流れでは精度の低下がみられた．その理由は本解法の基礎となるオゼーン基本解の原点近傍の挙動である．

本解法は理論的には全レイノルズ数域の完全ナビエ・ストークスを扱うことが可能である．計算機の発達により，流れ場の非線形項の体積積分のための格子を密にすることには技術的な障害はなく，より高レイノルズ数側への拡張の余地はある．しかし高レイノルズ数流れを目標として，出発点として低レイノルズ数流れを代表するオゼーン流れ，影響係数としてオゼーン基本解を選べば収束までの演算量は必然的に増大する．それよりも境界要素法の特長に注目して，複雑な形状の物体のまわりの流れに適用する方が有効であろう．近年物体形状によく適合し，変化の激しい部分に解像度が高い差分格子を発生させる技術が発達しており，これを本解法の体積積分に応用すればかなり高いレイノルズ数においても精度の向上が望まれる．

結　言

本研究では広範囲のレイノルズ数域でのナビエ・ストークスの方程式の数値解法の確立を追求した．支配方程式は非線形で時間依存型であり，一般に解析解は不可能であるから，これを解くには数値解によらなければならない．原理的には初期条件と境界条件を与え，直接積分すればなんらかの解が得られるであろう．しかし離散化式の数値積分解が定性的にも原微分方程式と同じ流れを与える保証はなく，とくに乱流の場合には全てのスケールの乱れを含む直接積分は不可能である．そこで対象とする流れの性質に応じてモデルを設定し，また解法を使い分けることが必要である．

本論文は，第１部の乱流域から遷移レイノルズ数域までにおける差分法による乱流渦の数値シミュレーションと，第２部の低レイノルズ数流れの境界要素法を拡張した層流の解析の研究から構成されている．

第１部では，第１章の序論に続いて，第２章で乱流の数値解法として近年有望視されている Large-eddy simulation（ＬＥＳ）の手法を用いて，平行平板間ポアゾイユ乱流を計算した．まず数値計算スキームを高速化・小容量化し，現実的な計算時間内で境界層の壁近傍の渦構造までシミュレートできることを示した．その上で乱流構造の解析を行い，実験的には測定困難なデータを統計量だけではなく分布として示すことにより，従来明らかにされていない乱流の生成機構を考察しそのモデルをたてた．

次に第３章では，工学的にも興味のある流れへのＬＥＳの応用として，回転流路の乱流のシミュレーションを行い，この流れ場に特徴的な乱流の構造などを再現した結果を述べた．また流れが乱流であることを前提としたＬＥＳのモデルでは，層流へ逆遷移するような流れには適応できないことを示した．さら

にコリオリ力の微視的な効果を調べ，これが乱流の生成におよぼす影響を解明した．

続いて第４章では，乱流モデルを設定しにくい低レイノルズ数のせん断流れの例として，遷移レイノルズ数域の平板間クエット流れを上流差分を用いてシミュレートし，この流れの構造を解析した．この結果からＬＥＳにおけるSmagorinskyモデルの低レイノルズ数の非等方乱れへの適用の上での問題点を指摘した．また，人為的な付加項を含むシミュレーションと現実の流れとの対応を調べた．その結果，低レイノルズ数でエネルギの大部分を輸送する渦と消散に関わる小規模渦とのスケールの差が大きくなく，重要な渦が格子で計算できる場合には，経験的な仮定の少ない直接シミュレーションが適していることがわかった．

第１部で示したような，微視的な乱流場の観察と合わせて実測困難なデータからの乱流構造の考察はＬＥＳの最も有効な活用であると考える．計算機性能の不足から，乱流渦の数値シミュレーションは，まだ実験や理論的研究に対して条件設定の任意性などの利点を十分に発揮しているとはいえないが，本研究の結果からも，乱流現象に物理的な解釈を与えることができるレベルに達していると考えてよい．

第２部ではオゼーン近似の基本解を用いた境界要素法による完全ナビエ・ストークス式の反復解法を導いた．具体例として二次元平板のまわりの流れを解析して，オゼーン近似では表し得ないレイノルズ数域まで適用できることを示し，その有用性を確かめた．境界要素法は粘性流れへの適用例が極めて少なく，その可能性には未知の部分が多いが，複雑な形状の三次元物体のまわりの流れには本解法が有利になる場合も多いと考える．

以上，本研究を通して，非圧縮粘性流体の広範囲のレイノルズ数域における数値解法を追求し，計算法の確立の上での見通しを得た．また，二三の計算法

を最も有効と思われる流れに適用して，流れ場の構造を解析した．シミュレーションは非常に普遍性の高い技術であり，広範囲の工学分野や流れの現象の理解の手段としての応用が期待できる．

文　献

〔1〕日本機械学会誌，87-785 (1984) 数値流体力学特集.
〔2〕Roache,P.J., Computational Fluid Dynamics, Hermosa Pub. (1976).
(高橋訳，コンピュータによる流体力学，構造計画研究所)
〔3〕Chapman,D.R., AIAA J. 17-12 (1979) P.1293.
〔4〕Reynolds,W.C., Ann. Rev. Fluid Mech. 8 (1976) P.183.
〔5〕Orszag,S.A. & Israeli,M., Ann. Rev. Fluid Mech. 6 (1974) P.281.
〔6〕Rogallo,R.S. & Moin,P., Ann. Rev. Fluid Mech. 16 (1984) P.99.
〔7〕Leonard,A., Adv. Geophys. 18A (1974) P.237.
〔8〕Ferziger,J.H., AIAA,J. 15-9 (1977) P.1261.
〔9〕Cantwell,B.J., Ann. Rev. Fluid Mech. 13 (1981) P.457.
〔10〕Brodkey,R.S.(中村訳), 日本機械学会誌 83-736 (1980) P.245.
〔11〕Bradshaw,P., J. Fluid Mech. 36-1 (1969) P.177.
〔12〕谷，流体力学の進歩一乱流(谷編)，丸善 (1980) P.1.
〔13〕Deissler,R.G., Rev. Mod. Phys. 56-2, part1 (1984) P.233.
〔14〕吉沢，日本物理学会誌 38-11 (1983) P.845.
〔15〕Reynolds,W.C. & Cebeci,T., Turbulence 2nd ed.,
Springer (1978) P.193
〔16〕大路，流体力学の進歩一乱流(谷編)，丸善 (1980) P.129.
〔17〕大路，日本航空宇宙学会誌 28-313 (1980) P.48.
〔18〕広瀬，日本航空宇宙学会誌 28-313 (1980) P.67.
〔19〕Launder,B.E. & Spalding,D.B., Mathematical Models of Turbulence,
Academic, (1972).
〔20〕Klebanoff,P.S., NACA Tech. Rep. No.1247 (1955).
〔21〕Laufer,J., NACA Tech. Rep. No.1053 (1951).
〔22〕Laufer,J., NACA Tech. Rep. No.1174 (1954).
〔23〕Kline,S.J., et al., J. Fluid Mech. 30-4 (1967) P.741.
〔24〕Kim,H.T., et al., J. Fluid Mech. 50-1 (1971) P.133.
〔25〕Rao,N.K., J. Fluid Mech. 48-2 (1971) P.339.
〔26〕Blackwelder,R.F. & Kaplan,R.E., J. Fluid Mech. 76-1 (1976) P.89.
〔27〕Blackwelder,R.F. & Eckelmann,H., J. Fluid Mech. 94-3
(1979) P.577.
〔28〕Brodkey,R.S., et al., J. Fluid Mech. 63-2 (1974) P.209.
〔29〕Offen,G.R. & Kline,S.J., J. Fluid Mech. 70-2 (1975) P.209.
〔30〕Blackwelder,R.F., Phys. Fluids 26-10 (1983) P.2807.
〔31〕Praturi,A.K. & Brodkey,R.S., J. Fluid Mech. 89-2 (1978) P.251.
〔32〕Chapman,D.R., et al. Astronaut. & Aeronaut. 13-4 (1975) P.22.
〔33〕Graves,R.A.Jr., Astronaut. & Aeronaut. 20-3 (1982) P.20.
〔34〕Moin,P., NASA Tech. Memo. No.84259 (1982).
〔35〕Hinze,J.O., Turbulence, 2nd ed., McGraw-Hill (1975).
〔36〕Smagorinsky,J., Mon. Weather Rev. 91 (1963) P.99.
〔37〕Lilly,D.K., Proc. IBM Scientific Computing Sympo. on
Environmental Sciences, IBM Form No.320 (1951) P.195
〔38〕Clark,R.A., et al., Dept. Mech. Engng., Stanford Univ.
Rep. TF-9 (1977).

〔39〕 Clark,R.A., et al., J. Fluid Mech. 91-1 (1979) P.1.
〔40〕 McMillan,O.J. & Ferziger,J.H., AIAA J. 17-12 (1979) P.1340.
〔41〕 Deardorff,J.W., J. Fluid Mech. 41-2 (1970) P.453.
〔42〕 Schumann,U., J. Comp. Phys. 18 (1975) P.376.
〔43〕 Moin,P. & Kim,J., J. Fluid Mech. 118 (1982) P.341.
〔44〕 Kim,J., Phys. Fluids 26-8 (1983) P.2088.
〔45〕 Kim,J., Phys. Fluids 28-1 (1985) P.52.
〔46〕 Orszag,S.A. & Kells,L.C., J. Fluid Mech. 96-1 (1980) P.159.
〔47〕 Patera,A.T. & Orszag,S.A., J. Fluid Mech. 112 (1981) P.467.
〔48〕 Nishioka,M. & Asai,M., J. Fluid Mech. 150 (1985) P.441.
〔49〕 Biringen,S., J. Fluid Mech. 148 (1984) P.413.
〔50〕 Kleiser,L., Proc. DFVLR Int. Colloquium (1984) P.123.
〔51〕 Kawamura,T. & Kuwahara,K., AIAA-84-0340 (1984).
〔52〕 Kawamura,T. & Kuwahara,K., AIAA-85-0376 (1985).
〔53〕 Ferziger,J.H., Dept. Mech. Engng., Stanford Univ. Rep. TF-16 (1981).
〔54〕 Voke,P.R. & Collins,M.W., Physico. Chem. Hydrodyn. 4-2 (1983) P.119.
〔55〕 Schumann,U., et al., Prediction Methods for Turbulent Flow. A Von Karman Institute Book (1980).
〔56〕 Moin,P., AIAA-84-0174 (1984).
〔57〕 Hussain,A.K.M.F., Phys. Fluids 26-10 (1983) P.2816.
〔58〕 小橋，流体力学の進歩－乱流(谷編)，丸善 (1980) P.85.
〔59〕 Yoshizawa,A., Phys. Fluids 25-9 (1982) P.1532.
〔60〕 吉沢，生産研究，36-4 (1984) P.175.
〔61〕 吉沢，生産研究，36-12 (1984) P.516.
〔62〕 堀内，生産研究，36-12 (1984) P.507.
〔63〕 Deardorff,J.W., Trans. ASME, J. Fluids Engng. 95 I (1973) P.429.
〔64〕 Fischer,G., Mon. Weather Rev. 93-1 (1965) P.1.
〔65〕 Groetzbach.G. & Schumann,U., Turbulent Shear Flows 1, Springer (1979) P.370.
〔66〕 堀内，東京大学学位論文，(1982).
〔67〕 Mansour,N.N., et al., Turbulent Shear Flows 1, Springer (1979) P.386.
〔68〕 Patel,V.C., & Head,M.R., J. Fluid Mech. 38-1 (1969) P.181.
〔69〕 Comte-Bellot,G., Doctoral Thesis, Univ. of Grenoble (1963).
〔70〕 Clark,J.A., Trans. ASME, J. Basic Engng. 90 D (1968) P.455.
〔71〕 Hussain,A.K.M.F. & Reynolds,W.C., Trans. ASME, J. Fluids Engng. 93 I (1975) P.568.
〔72〕 菱田，他２名，日本機械学会論文集 B 46-408 (1980) P.1455.
〔73〕 Bakewell,H.P.Jr. & Lumley,J.L., Phys. Fluids 10-9 (1967) P.1880.
〔74〕 Nychas,S.G., et al., J. Fluid Mech. 61-3 (1973) P.513.
〔75〕 Moin,P. & Kim,J., J. Fluid Mech. 155 (1985) P.441.
〔76〕 Johnston,J.P., et al., J. Fluid Mech. 56-3 (1972) P.533.
〔77〕 Johnston,J.P. & Eide,S.A., Trans. ASME, J. Fluids Engng. 98 I (1976) P.374
〔78〕 児山，他４名，日本機械学会論文集 43-374 (1977) P.3797.
〔79〕 児山，他４名，日本機械学会論文集 B 45-397 (1979) P.1266.
〔80〕 Koyama,H., et al., Trans. ASME, J. Engng. for Power 101 A (1979) P.23.

〔81〕 Wilcox,D.C. & Chambers,T.L., AIAA J. 15-4 (1977) P.574.
〔82〕 Howard,J.H.G., et al., Trans. ASME J. Fluids Engng. 102 I (1980) P.456.
〔83〕 益田，他２名，日本機械学会論文集 B 49-437 (1983) P.81.
〔84〕 Kim,J., Proc. Fourth Symp. on Turbl. Shear Flows (1983) P.6-14.
〔85〕 青木，原田，潤滑，16-5 (1970) P.348.
〔86〕 加藤，堀，潤滑，28-12 (1983) P.907.
〔87〕 Hanjalic,K. & Launder,B.E., J. Fluid Mech. 74-4 (1976) P.593
〔88〕 Reichardt,H., Max-Planck-Inst. fuer Stroemungsforschng Mitt.22 (1959).
〔89〕 Missimer,J.R. & Thomas,L.C., Trans. ASME, J. Lub. Tech. 105 F (1983) P.364.
〔90〕 Robertson,J.M., Proc. 6th Midwestern Conf. on Fluid Mech. (1959) P.169.
〔91〕 Couette,M., Ann. Chem. and Phys. Ser.6 21 (1890) P.433.
〔92〕 Smith,M.I. & Fuller,D.D., Trans. ASME, J. Lub. Tech. 78 F (1956) P.469.
〔93〕 三宅，日本機械学会誌 87-785 (1984) P.322.
〔94〕 今井，流体力学，前編 (1973) 裳華房
〔95〕 Youngren,G.K. & Acrivos,A., J. Fluid Mech. 69-2 (1975) P.377.
〔96〕 村田，他２名，日本機械学会論文集 42-363 (1976) P.3459.
〔97〕 Yano,H., J. Fluid Mech. 97-1 (1980) P.157.
〔98〕 Wu,J.C., Developements in Boundary Element Methodos 2 (Applied Science Pub.) (1982) Chapter 4 P.69.
〔99〕 Kuo,Y.H., J. Math. Phys. 32 (1953) P.83.
〔100〕 Stewartson,K., Mathematika 16 (1969) P.106.
〔101〕 Messiter,A.F., SIAM J. Appl. Math. 18-1 (1970) P.241.
〔102〕 Dennis,S.C.R. & Dunwoody,J., J. Fluid Mech. 24-3 (1966) P.577.
〔103〕 Janour,Z., NACA Tech. Memo., No.1316 (1951).

関 連 発 表 論 文

1. 三宅・梶島，日本機械学会論文集 B 51-469 (1985-9) P.2846.
   “数値シミュレーションによる乱流構造の解析”

2. 三宅・梶島，日本機械学会論文集投稿中 (No.85-0089A)
   〔日本機会学会関西支部第245回講演会(1985.11.20)講演前刷〕
   “回転流路の乱流の数値解析，
   第1報，コリオリ力による流れ場の変化”

3. 三宅・梶島，日本機械学会論文集投稿中 (No.85-0090A)
   〔日本機会学会関西支部第245回講演会(1985.11.20)講演前刷〕
   “回転流路の乱流の数値解析，
   第2報，乱れの生成におけるコリオリ力の影響”

4. 三宅・梶島，日本機械学会論文集投稿中 (No.85-1128A)
   “遷移レイノルズ数域の平板間クエット流れの
   直接シミュレーション”

5. 梶島・村田・三宅，日本機械学会論文集 B 51-467 (1985-7) P.2345.
   “オゼーン近似の基本解を用いた境界要素法による流れの解析”

謝　辞

本研究は，著者が大阪大学大学院工学研究科に在学中に，大阪大学工学部の三宅 裕教授より終始懇切なご指導を賜って遂行し得たものであります．

本論文をまとめるにあたり，大阪大学工学部の森川敬信教授，水谷幸夫教授，高城敏美教授より詳細な校閲と有益なご討論をいただきました．

大阪大学名誉教授，現豊田工業大学の村田 暹教授からは貴重なご提案を賜りました．

大阪大学工学部の水力実験室の皆様からは多大のご支援をいただきました．とくに稲葉武彦講師，板東 潔助手，北田義一技官は種々のご便宜をはかって下さいました．また現日本アイ・ビー・エム㈱の尾花 茂氏，現シャープ㈱の南 久氏からは格別のご協力をいただきました．

各位に謹んで深謝の意を表します．