



Title	The average edge order of triangulations of 3-manifolds with boundary
Author(s)	田村, 誠
Citation	大阪大学, 1997, 博士論文
Version Type	
URL	https://hdl.handle.net/11094/39962
rights	
Note	著者からインターネット公開の許諾が得られていないため、論文の要旨のみを公開しています。全文のご利用をご希望の場合は、 ＜a href="https://www.library.osaka-u.ac.jp/thesis/#closed">https://www.library.osaka-u.ac.jp/thesis/#closed >大阪大学の博士論文について をご参照ください。

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

氏 名	たむら まこと 田村 誠
博士の専攻分野の名称	博 士 (理 学)
学 位 記 番 号	第 1 2 9 1 4 号
学 位 授 与 年 月 日	平成 9 年 3 月 25 日
学 位 授 与 の 要 件	学位規則第 4 条第 1 項該当 理学研究科数学専攻
学 位 論 文 名	The average edge order of triangulations of 3-manifolds with boundary (境界付き 3 次元多様体の単体分割の average edge order について)
論 文 審 査 委 員	(主査) 教 授 川久保勝夫 (副査) 教 授 満 渕 俊 樹 助 教 授 作 間 誠 助 教 授 大 和 健 二

論 文 内 容 の 要 旨

本論文は 3 次元多様体の位相と組合せ構造との関係について研究したものである。コンパクト 3 次元多様体 M の単体分割 K を考え、 K の各辺 e に対し e を辺に持つ面の数を辺 e の order と呼ぶ。単体分割の辺全体に対する order の平均をその単体分割の average edge order と呼ぶ。 M が閉 3 次元多様体の場合には、この値は K 内の辺の数 $E_0(K)$ および面の数 $F_0(K)$ を用いて $3F_0(K)/E_0(K)$ と表される。1993 年に Feng Luo と Richard Stong らは閉 3 次元多様体の単体分割にこの average edge order を定義し、それを用いて組合せ構造を調べ、 S^3 (3 次元球面)、 $S^2 \times S^1$ 、および $S^2 \tilde{\times} S^1$ の 3 つを特徴付けた。本論文では、境界付きコンパクト 3 次元多様体の場合へ average edge order の定義を拡張し、それを用いて B^3 (3 次元球体)、 $D^2 \times S^1$ (solid torus)、および $D^2 \tilde{\times} S^1$ (solid Klien bottle) の 3 つを特徴付けた。

境界付きコンパクト 3 次元多様体 M に対して自然な拡張として、average edge order の曲率としての概念を考慮し、境界上の単体についてはその寄与を $1/2$ として次のように定義し直す。 $E_0(K)$ 、 $F_0(K)$ をそれぞれ K 内の辺、面の数を境界上で 2 分の 1 の重みを付けて数えたものとする。すなわち、

$$E_0(K) = E_i(K) + E_\partial(K) / 2$$

$$F_0(K) = F_i(K) + F_\partial(K) / 2$$

であって、ここで $E_i(K)$ (または $F_i(K)$) は K 内部の辺 (または面) の数、また $E_\partial(K)$ (または $F_\partial(K)$) は ∂K 上の辺 (また面) の数をあらわすものとする。この $E_0(K)$ 、 $F_0(K)$ を用いて K の average edge order $\mu_0(K)$ を

$$\mu_0(K) = 3F_0(K) / E_0(K)$$

で定義する。

本論文の主定理は次のようなものである。

定理 M を境界付きの連結なコンパクト 3 次元多様体とし、 K を M の単体分割とする。

- (a) $2 \leq \mu_0(K) < 6$ である。とくに等号成立は K がただ一つの 4 面体からなるとき、かつそのときに限る。
- (b) 任意の M 、任意の $4 < r < 6$ なる有理数 r に対して、 $\mu_0(K) = r$ なる M の単体分割 K が存在する。
- (c) $\mu_0(K) < 4$ ならば、 M は上 B^3 である。
- (d) $\mu_0(K) = 4$ ならば、 M は B^3 、 $D^2 \times S^1$ または $D^2 \tilde{\times} S^1$ のいずれかである。

この定理により $\mu_0(K)$ の存在範囲と値の存在性についてほぼ完全に明らかになった。とくに (b) により、与えら

れた値を average edge order に持つ単体分割の存在性に境界の種数が影響を及ぼさないことなども理解される。この定理の (c), (d) では3つの多様体の特徴付けを与えているが、さらにこのときの単体分割の形も記述することが可能である。

以上が本論の要旨である。

論文審査の結果の要旨

コンパクト3次元多様体の単体分割に定義される平均辺次数は、曲率の概念を組合せ論的に表したものと考えられ、この量と多様体の位相との関係を調べることは大変興味深いものと思われる。本論文は、とくに境界付きのコンパクト3次元多様体の単体分割について、平均辺次数による組合せ構造の完全な分類を行っており、博士(理学)の学位論文として十分価値あるものと認める。