氏　　　　　名	吉 富 和 志（よし とみ かず し）
博士の専攻分野の名称	博　士（理　学）
学 位 記 番 号	第　12919　号
学 位 授 与 年 月 日	平成9年3月25日
学 位 授 与 の 要 件	学位規則第4条第1項該当 理学研究科数学専攻
学 位 論 文 名	Schrödinger Operators with Periodic Potentials and Constant Magnetic Fields with Integer Flux （周期的なポテンシャルと整数の磁場をもつシュレディンガー作用素について）
論 文 審 査 委 員	（主査） 教 授 井川　満 （副査） 教 授 西谷 達雄　教 授 松村 昭孝　助教授 磯崎 洋

論 文 内 容 の 要 旨

この論文では，格子に関し周期的なポテンシャルと，整数の磁場をもつ次の2次元のシュレディンガー作用素のスペクトルについて考察する：

$H(\lambda) = (D_{x_1} + b_{x_2})^2 + (D_{x_2} - b_{x_1})^2 + \lambda^2 V(x)$ in $L^2(\mathbb{R}^2)$。

ここで，$D_{x_j} = -i\dfrac{\partial}{\partial x_j}$ $(j=1,\ 2)$，$b \in \mathbb{R}$，$V(x)$ は$\mathbb{R}^2$の実数値関数，λは正のパラメータである。対応する磁場は$B=-2\,bdx_2 \wedge dx_2$である。ポテンシャル$V(x)$と磁場Bに次の仮定をおく。

(H.1)　$V(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^2,\ \mathbb{R})$。

(H.2)　$V(\cdot+\gamma) = V(\cdot)$　on　$\mathbb{R}^2$ for any　$\gamma \in \Gamma = 2\pi\mathbf{Z} \oplus 2\pi\mathbf{Z}$。

(H.3)　$V(x) \geq 0$　on $\mathbb{R}^2$。

(H.4)　$V(x) = 0$ if and only if $x \in \Gamma$。

(H.5)　$V''(0) = 2\begin{pmatrix}\mu_1 & 0\\ 0 & \mu_2\end{pmatrix}$，$\mu_1$，$\mu_2 > 0$。

(H.6)　$\langle B,\ \Gamma \wedge \Gamma\rangle \subset 2\pi\mathbf{Z}$　i,e.　$b \in \dfrac{1}{4\pi}\mathbf{Z}$。

仮定(H.6)により$H(\lambda)$のスペクトルはバンド構造をもつ。この論文では，$\lambda \to \infty$とするときの第1バンド(ground state band)の幅の漸近挙動を考察する。磁場の無いとき（すなわち$b=0$のとき）については，B. Simon (Ann. Phys. 158 (1984), 415-420)とA. Outassourt (J. Funct. Anal. 72 (1987), 65-93)が，ground state bandの幅がexponential orderで減少することを示した。Simonはその証明にBrown運動の理論を用い，OutassoutはB. Helffer-J. Sjöstrand (Comm. in P. D. E. 9 (1984), 337-408)がトンネル効果の解析に応用したW. K. B. 法を用いた。今回の研究では，磁場のある場合にも同様の結果を得た。以下でその主要な結果を説明する。

$x,\ y \in \mathbb{R}^2$に対し，$d_V(x, y)$を$V(x)$に対するAgmon distanceとし，

$$S_0 = \min_{\gamma \in \Gamma\setminus\{0\}} d_V(0,\ \gamma)\ (>0)$$

とおく。また，$H(\lambda)$のground state bandの幅を$L(\lambda)$とする。

Theorem. (H.1)～ (H.6) を仮定する。このとき，任意の$\eta>0$に対し，ある定数$C_\eta>0$が存在して次が成り立つ。

$$L(\lambda) \leq C_\eta e^{-(S_0-\eta)\lambda} \quad (\lambda\to\infty)$$

この評価は$V(x)$に幾何学的な条件を付け加えることにより次のように精密化される。

$$\Lambda=\{\gamma\in\Gamma\ ;\ d_V(0,\lambda)=S_0\}$$

とおく。$x_0\in \mathbb{R}^2$と$\gamma>$に対し
$B_V(x_0, \gamma)=\{x\in\mathbb{R}^2\ ;\ d_V(x_0, x)<\gamma\}$
とおく。各$\gamma\in\Lambda$に対し次を仮定する。

(H.7) $\{0\}$ と $\{\gamma\}$ を結ぶ，長さS_0の geodesic K が一意に存在する。
(H.8) $X_0\in K\cap B_V(O, S_0)\cap B_V(\gamma, S_0)$ とし，$\Gamma_0 CCB_V(0,S_0)\cap B_V(\gamma, S_0)$ を，Kと$\{x_0\}$でtransversalに交わる任意の滑らかな曲線で
$\overline{\Gamma}_0\cap K=\{x_0\}$ を満たすものとする。このとき，ある定数$C=C(x_0, \Gamma_0)>0$が存在して

$$d_V(x,0)+d_V(x, \gamma)\geq S_0+Cd_V(x_0, x)^2 \ for\ {}^{\forall}x\in\Gamma_0$$

が成り立つ。

Theorem. (H.1)～ (H.8)を仮定する。このとき $V(x)$ とBのみに依る定数b_0が存在して次が成り立つ。

$$L(\lambda)=(b_0\lambda^{\frac{3}{2}}+O(\lambda^{\frac{1}{2}}))e^{-S_0\lambda} \quad (\lambda\to\infty)。$$

論文審査の結果の要旨

吉冨君は，空間的に周期的なポテンシャルをもち，定磁場がかかっているハミルトニアンのスペクトルのバンド構造を明らかにした。これまで磁場がかかった場合の結果はなく，吉冨君によって，はじめて明らかにされた。この仕事をやり通すには，極めて綿密な解析が必要で，吉冨君の解析力の確かさを十分に示す仕事である。

吉冨君の確かな解析力によって示された新しい結果は，博士（理学）の学位論文として十分価値あるものと認める。