



Title	Schrodinger Operators with Periodic Potentials and Constant Magnetic Fields with Integer Flux
Author(s)	吉富, 和志
Citation	大阪大学, 1997, 博士論文
Version Type	
URL	<a href="https://hdl.handle.net/11094/39973">https://hdl.handle.net/11094/39973</a>
rights	
Note	著者からインターネット公開の許諾が得られていないため、論文の要旨のみを公開しています。全文のご利用をご希望の場合は、 <a href="https://www.library.osaka-u.ac.jp/thesis/#closed">＜a href="https://www.library.osaka-u.ac.jp/thesis/#closed"&gt;https://www.library.osaka-u.ac.jp/thesis/#closed</a> >大阪大学の博士論文について <a href="https://www.library.osaka-u.ac.jp/thesis/#closed">&lt;/a&gt;</a> をご参照ください。

*The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA*

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

氏 名	吉 富 和 志
博士の専攻分野の名称	博 士 (理 学)
学 位 記 番 号	第 1 2 9 1 9 号
学 位 授 与 年 月 日	平成 9 年 3 月 25 日
学 位 授 与 の 要 件	学位規則第 4 条第 1 項該当 理学研究科数学専攻
学 位 論 文 名	Schrödinger Operators with Periodic Potentials and Constant Magnetic Fields with Integer Flux (周期的なポテンシャルと整数の磁場をもつシュレディンガー作用素 について)
論 文 審 査 委 員	(主査) 教 授 井 川 満  (副査) 教 授 西 谷 達 雄    教 授 松 村 昭 孝    助 教 授 磯 崎 洋

### 論 文 内 容 の 要 旨

この論文では、格子に関し周期的なポテンシャルと、整数の磁場をもつ次の 2 次元のシュレディンガー作用素のスペクトルについて考察する：

$$H(\lambda) = (D_{x_1} + b_{x_2})^2 + (D_{x_2} - b_{x_1})^2 + \lambda^2 V(x) \text{ in } L^2(\mathbb{R}^2).$$

ここで、 $D_{x_j} = -i \frac{\partial}{\partial x_j}$  ( $j=1, 2$ ),  $b \in \mathbb{R}$ ,  $V(x)$  は  $\mathbb{R}^2$  の実数値関数、 $\lambda$  は正のパラメータである。対応する磁場は  $B = -2b dx_2 \wedge dx_1$  である。ポテンシャル  $V(x)$  と磁場  $B$  に次の仮定をおく。

$$(H.1) \quad V(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}).$$

$$(H.2) \quad V(\cdot + \gamma) = V(\cdot) \quad \text{on } \mathbb{R}^2 \text{ for any } \gamma \in \Gamma = 2\pi\mathbb{Z} \oplus 2\pi\mathbb{Z}.$$

$$(H.3) \quad V(x) \geq 0 \quad \text{on } \mathbb{R}^2.$$

$$(H.4) \quad V(x) = 0 \quad \text{if and only if } x \in \Gamma.$$

$$(H.5) \quad V'(0) = 2 \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix}, \quad \mu_1, \mu_2 > 0.$$

$$(H.6) \quad \langle B, \Gamma \wedge \Gamma \rangle \subset 2\pi\mathbb{Z} \quad \text{i.e. } b \in \frac{1}{4\pi}\mathbb{Z}.$$

仮定 (H.6) により  $H(\lambda)$  のスペクトルはバンド構造をもつ。この論文では、 $\lambda \rightarrow \infty$  とするときの第 1 バンド (ground state band) の幅の漸近挙動を考察する。磁場の無いとき (すなわち  $b=0$  のとき) については、B. Simon (Ann. Phys. 158 (1984), 415-420) と A. Outassourt (J. Funct. Anal. 72 (1987), 65-93) が、ground state band の幅が exponential order で減少することを示した。Simon はその証明に Brown 運動の理論を用い、Outassourt は B. Helffer-J. Sjöstrand (Comm. in P. D. E. 9 (1984), 337-408) がトンネル効果の解析に応用した W. K. B. 法を用いた。今回の研究では、磁場のある場合にも同様の結果を得た。以下でその主要な結果を説明する。

$x, y \in \mathbb{R}^2$  に対し、 $d_V(x, y)$  を  $V(x)$  に対する Agmon distance とし、

$$S_0 = \min_{\gamma \in \Gamma \setminus \{0\}} d_V(0, \gamma) (> 0)$$

とおく。また、 $H(\lambda)$  の ground state band の幅を  $L(\lambda)$  とする。

**Theorem.** (H.1)～(H.6)を仮定する。このとき、任意の $\eta > 0$ に対し、ある定数 $C_\eta > 0$ が存在して次が成り立つ。

$$L(\lambda) \leq C_\eta e^{-(S_0 - \eta)\lambda} \quad (\lambda \rightarrow \infty)$$

この評価は $V(x)$ に幾何学的な条件を付け加えることにより次のように精密化される。

$$\Lambda = \{\gamma \in \Gamma; d_V(0, \gamma) = S_0\}$$

とおく。 $x_0 \in \mathbb{R}^2$ と $\gamma > 0$ に対し

$$B_V(x_0, \gamma) = \{x \in \mathbb{R}^2; d_V(x_0, x) < \gamma\}$$

とおく。各 $\gamma \in \Lambda$ に対し次を仮定する。

(H.7)  $\{0\}$ と $\{\gamma\}$ を結ぶ、長さ $S_0$ のgeodesic  $K$ が一意に存在する。

(H.8)  $X_0 \in K \cap B_V(0, S_0) \cap B_V(\gamma, S_0)$ とし、 $\Gamma_0 \cap CCB_V(0, S_0) \cap B_V(\gamma, S_0)$ を、 $K$ と $\{x_0\}$ でtransversalに交わる任意の滑らかな曲線で

$\bar{\Gamma}_0 \cap K = \{x_0\}$ を満たすものとする。このとき、ある定数 $C = C(x_0, \Gamma_0) > 0$ が存在して

$$d_V(x, 0) + d_V(x, \gamma) \geq S_0 + C d_V(x_0, x)^2 \text{ for } \forall x \in \Gamma_0$$

が成り立つ。

**Theorem.** (H.1)～(H.8)を仮定する。このとき $V(x)$ と $B$ のみに依る定数 $b_0$ が存在して次が成り立つ。

$$L(\lambda) = (b_0 \lambda^{\frac{3}{2}} + O(\lambda^{\frac{1}{2}})) e^{-S_0 \lambda} \quad (\lambda \rightarrow \infty)。$$

## 論文審査の結果の要旨

吉富君は、空間的に周期的なポテンシャルをもち、定磁場がかかっているハミルトニアンの特値のバンド構造を明らかにした。これまで磁場がかかった場合の結果はなく、吉富君によって、はじめて明らかにされた。この仕事をやり通すには、極めて綿密な解析が必要で、吉富君の解析力の確かさを十分に示す仕事である。

吉富君の確かな解析力によって示された新しい結果は、博士(理学)の学位論文として十分価値あるものと認める。