The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	On a singular control problem for a time changed distorted Brownian motion
Author(s)	川端, 敏裕
Citation	大阪大学, 1998, 博士論文
Version Type	
URL	https://hdl.handle.net/11094/40661
rights	
Note	著者からインターネット公開の許諾が得られていないため、論文の要旨のみを公開しています。全文のご利用をご希望の場合は、大阪大学の博士論文についてをご参照ください。

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

【63】

氏　　名	川　端　敏　裕（かわ　ばた　とし　ひろ）
博士の専攻分野の名称	博　士（理　学）
学　位　記　番　号	第　13958　号
学位授与年月日	平成10年3月25日
学位授与の要件	学位規則第4条第1項該当 基礎工学研究科数理系専攻
学　位　論　文　名	On a singular control problem for a time changed distorted Brownian motion （一般化されたブラウン運動に対するある特異制御問題）
論　文　審　査　委　員	（主査） 教　授　福島　正俊 （副査） 教　授　長井　英生　　教　授　亀高　惟倫　　助教授　竹田　雅好

論　文　内　容　の　要　旨

M_tを原点から出発する1次元ブラウン運動，$h: R\to R$をx＝0で最小値をとる凸関数，r，l，αを正定数とする。M_tを政策（policy）と呼ばれる確率過程の組S＝（A_t^1，A_t^2）で$X_t-X_0=M_t+A_t^1-A_t^2$のように制御する。但し，A_t^1，A_t^2は positive increasing functionalとする。各政策S＝（A_t^1，A_t^2）に対し，費用関数を

$$k_s=E_x\ \{\int_0^\infty e^{-\alpha t}\,\mathrm{h}\,(X_t)dt+\int_0^\infty e^{-\alpha t}\ (rdA_t^1+ldA_t^2)\}$$

のように定義する。このとき，政策$S=$（A_t^1，A_t^2）の中で費用関数k_sを最小にする政策$\tilde{S}$を見つけ出したい。

この種の問題はHarrison and Taksar（1983）によって最初に考察され，上述の問題はTaksar(1985)によって解かれた。そして$\tilde{S}$は，ある区間［a,b］の境界点a,bでの反射壁ブラウン運動の局所時間$\tilde{A}_t^1$，$\tilde{A}_t^2$の組であることが示された。また，境界点a,b,は optimal stopping gameの値と呼ばれる関数

$$\mathrm{V}(\mathrm{x})=\sup_{\tau}\inf_{\sigma}\mathrm{E}_{\mathrm{x}}\ \{\int_0^{\tau\wedge\sigma}\mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{H}(\mathrm{Y}_t)\ \mathrm{dt}+\mathrm{e}^{-\alpha(\tau\wedge\sigma)}\ \mathrm{f}\ (\mathrm{Y}_{\tau\wedge\sigma})\}$$

によって，a＝max　{x｜V(x)＝－r}，b＝min　{x｜V(x)＝l} と決められることも示された。但し，τ，σはM$_\tau$＞0，M$_\sigma$＜Oなる停止時刻とし，$f(x)=l1_{(0,\infty)}-r1_{(-\infty,0)}$，H＝ $\dfrac{dh}{dx}$，また（Y_t，P_x）はxから出発する1次元ブラウン運動とする。

本論文ではTaksarの結果を，M_tが原点から出発する1次元ブラウン運動の適当な時刻変更で与えられる場合に次の仕方で拡張する。先ず正値連続関数$\dot{m}: R\to R$を密度関数とする測度$dm=\dot{m}(x)\mathrm{dx}$を固定する。また，非負値可測関数$\rho: R\to R$で$\rho(x)dm(x)$の台が有界閉区間Eとなるものを政策として扱う。このρに対し$\mathrm{L}^2(E;\rho\,dm)$上のstrongly local regular Dirichlet form

$$\varepsilon^\rho\ (\mathrm{u},\ \mathrm{v})\ =\ \frac{1}{2}\int_{\mathrm{R}}\frac{du\ dv}{dx\ dx}\rho(x)dx$$

$$D[\varepsilon^\rho]\ =\ \{u\in L^2\ (E;\rho\,dm)\mid \mathrm{u}\ \text{is absolutely continuous on E and}\ \varepsilon^\rho\ (u,\ u)<\infty\}$$

を考える。一般論から，このε^{ρ}にはE上の拡散過程$M^{\rho}=(X_t^{\rho},\ P_x^{\rho})$が対応している。$\rho$に有界変動性を仮定しておくと，$X_t^{\rho}$は$X_t^{\rho}-X_0^{\rho}=M_t+A_t^{\rho 1}-A_t^{\rho 2}$のように分解されることが分かる。ここで$M_t$は原点から出発するブラウン運動を$\phi(t)=\int_0^t \dot{m}\ (X_s^{\rho})ds$で時刻変更したものであり，$A_t^{\rho 1}$，$A_t^{\rho 2}$は関数$\rho$から定まるあるpositive continuous additive functional である。各ρに対し，費用関数を

$$k_{\rho}=E_x\ \{\int_0^{\infty} e^{-\alpha t}\ h\ (X_t^{\rho})dt+\int_0^{\infty} e^{-\alpha t}\ (rdA_t^{\rho 1}+ldA_t^{\rho 2})\}$$

によって定義しよう。

本論文では以下の結果を証明することが出来た。我々は$k_{\tilde{\rho}}=\min_{\rho} k_{\rho}$となる$\tilde{\rho}$に興味があるが，それはある区間$[a,b]$の特性関数$\rho(x)=1_{(a,b)}(x)$として実現される。対応する拡散過程$X_t^{\tilde{\rho}}$は閉区間$[a,b]$上の時刻変更された反射壁ブラウン運動であり，$A_t^{\tilde{\rho}1}$，$A_t^{\tilde{\rho}2}$は各々$X_t^{\tilde{\rho}}$の$a,b$における局所時間である。また$a,b$は標準尺度が$dm$で標準測度が$2dx$の拡散過程$(Y_t,\ P_X)$に関するoptimal stopping gameによってTaksarの場合と同様の仕方で決定される。

論文審査の結果の要旨

マルコフ過程の確率制御問題の一つとして，特にマルコフ過程がマルチンゲール部分と有界変動部分の和として表されている場合に，それぞれの部分の適当な汎関数の平均値の和を値関数とし，有界変動部分を制御することによる最適化問題を考えるとき，最適過程がある領域の反射壁過程として，最適制御がその境界のみで瞬間的に変動する特異な局所時間として現れることがある。このような特異制御問題は，マルチンゲール部分が1次元ブラウン運動の場合に，80年代の前半に最初にHarrisonよって考察され，後にTaksarによってブラウン運動の確率停止ゲーム問題のある種の相対問題として，より一般的に考察され解かれた。

本論文はマルチンゲール部分が1次元ブラウン運動のランダムな時間変更の形をしているより一般の場合（それはスピード速度mに関係している）に，問題をデイリクレ形式を用いて再設定することによって，Taksarの結果を拡張することに成功したものである。採用されたデリクレ形式はエネルギー形式と呼ばれ，ある非負な制御関数で記述されている。基礎の測度はmにこの制御関数を掛けたものとして採用されているため，対応する拡散過程の有界変動部分のみがこの制御関数に支配される。従ってHarrison，Taksarの場合と同様に値関数が定められるので，それを最小とする最適制御関数を求めるというのが本論文の問題設定である。

川端君は最適制御関数がある1次元区間の特性関数であり，対応する拡散過程はその区間上の反射壁過程であり，その有界変動部分に端点の局所時間が現れることを証明した。区間の端点や最適値関数はTaksarの場合と同様にある確率停止ゲーム問題の解によって定められるが，その際ブラウン運動の代わりに，m を標準測度，ルベーグ測度をスピード測度とする拡散過程を用いれば良いことを明らかにした。

1次元反射壁拡散過程を確率制御問題の最適解として見いだす事はそれ自体興味深いことであるが，それを最も一般的な設定で解くことにより議論の本質もより明確にした上記の成果はこの方面の研究への貢献であり，博士（理学）の学位論文として価値あるものと認める。