



Title	滑走艇の未定浸水面問題に関する研究
Author(s)	勝井, 辰博
Citation	大阪大学, 1999, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.11501/3154700
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

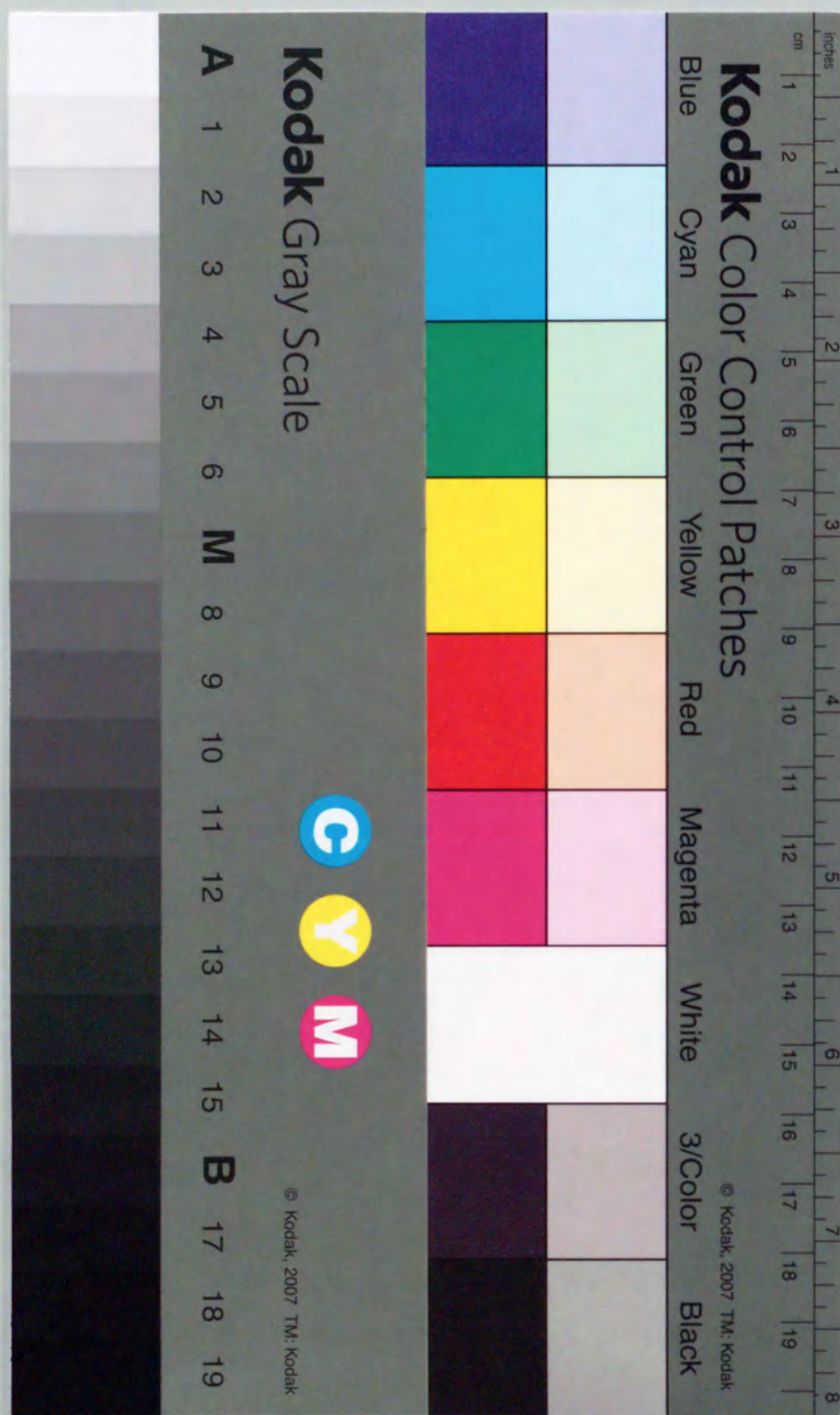
<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

滑走艇の未定浸水面問題に関する研究

平成11年1月

勝井辰博



滑走艇の未定浸水面問題に関する研究

平成 11 年 1 月

勝 井 辰 博

目次

第1章 緒言	1
第2章 滑走艇まわりの流れ	3
2.1 理論の背景	3
2.2 線形理論	5
2.3 2章のまとめ	8
第3章 滑走艇の未定浸水面問題の変分原理	10
3.1 重力影響を無視した滑走艇の未定浸水面問題	10
3.1.1 Flaxの変分原理	11
3.1.2 別所の変分原理	13
3.1.3 滑走艇の未定浸水面問題の変分原理	14
3.2 重力影響を考慮した滑走艇の未定浸水面問題の変分原理	19
3.3 3章のまとめ	23
第4章 変分原理による滑走板の浸水面の決定	25
4.1 重力影響を無視した高アスペクト比滑走板の浸水面	25
4.2 重力影響を考慮した高アスペクト比滑走板の浸水面	31
4.3 細長滑走艇の浸水面	37
4.4 4章のまとめ	40
第5章 自由航走状態の性能	42
5.1 自由航走時の浸水面と航走姿勢	42
5.2 5章のまとめ	44
第6章 結言	45

参考文献	46
付録A 速度ポテンシャルの表示	49
付録B 重力影響を無視したときの高アスペクト比近似	54
付録C 重力影響を考慮したときの高アスペクト比近似	59
図表一覧	64
写真	65
図	66
謝辞	87

第1章 緒言

滑走艇まわりの流場を知る上で重要なことは、あらかじめ艇の浸水面を特定できないという未定浸水面問題を解決することである¹⁾²⁾。本論はこの未定浸水面問題に対する新たな変分原理を見出し、変分直接法によって未定浸水面を定めることを試みるものである。

近年の輸送システムの高速化に伴い、高速艇の1つとして滑走艇が注目されるようになってきた。滑走艇は、現状ではレジャー用あるいは競走用に使用目的が限定されているものの、重量が比較的大きい場合の高速船型に適しているため、将来的には近海域における高速輸送手段の1つとして開発されることが期待されている。そのためには、波浪中の耐航性能が悪いことなど乗り越えるべきいくつかの課題がある。その中で最も基本となるのは平水中の定常滑走性能の推定であり、滑走艇まわりの流場を把握することである。

滑走艇の性能推定は現在のところ実験的な研究に基づくものが主であり、研究の数も多い。代表的なものとしては、Savitsky³⁾⁴⁾⁵⁾によるものが知られている。彼は詳細な実験データに基づき、滑走艇の種々の性能推定式を与えている。一方、滑走艇まわりの流場の理論的な研究⁶⁾⁷⁾⁸⁾も古くから行われており、船体を揚力で支えることから、翼理論になぞらえて理論が展開されてきた。滑走艇の揚力分布は浸水面に依存し、そのモーメント特性を大きく左右するから、未知の浸水面の推定が重要である。しかし、未定浸水面問題を扱ったものは少なく、未だに理論と実現象の間には大きな隔りがある。

滑走艇まわりの流れを初めて未定境界の問題として論じたのは、Wagner⁹⁾である。彼は、2次元の楔型の落下衝撃の問題をdead rise angleを持つ滑走艇の問題に適用した。未定浸水面を定め得たのは、波面の盛り上がり考えたからである。直線的な自己相似流れが仮定されたために、船体側方の波面の盛り上がりのみが考慮され、スプレールートラインは静止時水線より $\sqrt{2}$ 倍だけ広い直線となる。しかし、滑走艇前方の盛り上がりは考慮できないため、艇前方への浸水面の広がりはなくなってしまう。これに対し松村ら¹⁰⁾は、滑走艇前方の波面の盛り上がりも考慮し、滑走艇船首付近では、かまぼこ状に盛り上がった波面上を滑走すると仮定すれば、スプレールートラインが放物線¹¹⁾¹²⁾となる相似解があることを示した。かまぼこ状波面の生成原因は、船体後方からの排水影響であると考え

られるものの、細長体理論に基づく定式化によるものであるため、船体後方の影響を盛り込むことができず、理論的にかまぼこ状波面を求めることはできない。細長体理論を用いなければ、滑走艇前方の波面の盛り上がりを考慮できるはずである。松村ら¹³⁾は、細長体理論とは逆の発想で、滑走艇を高アスペクト比と仮定し、揚力線理論に基づいて、滑走艇の未定浸水面を求めることを試みた。未定浸水長を求める積分方程式が示され、未定浸水長 l_w は、滑走艇の循環 Γ と密接に関連づけられることが示された。以上に挙げた研究は、重力の影響を無視するものである。重力影響を考慮した滑走艇の未定浸水面問題は、別所¹⁴⁾によって研究がなされた。この理論では、完全な未定境界問題を解くのではなく、滑走艇の静止時の浸水面を基準とし、浸水長変化はその摂動として求め得ることが示された。

これらの研究は、すべて微分方程式、あるいは、積分方程式による定式化であり、それらを解くには格段の工夫を要する。それに代わり得る手法として変分直接法がある。この手法は、満たすべき方程式を解くのではなく、求めたい未知量を変関数とする汎関数の変分問題に置き換えるものである。変分直接法の利点は、満たすべき方程式を何ら厳密に解く必要はなく、求めるべき未知量を使い手が自由に仮定することができることである。その未知量が、物理的な現象に沿っていれば、近似の度合いに応じた結果を得ることができ、解が持つべき性質が損なわれることもない。このような長所にも関わらず、一般に未知の問題に対して変分原理そのものを見出すことは困難であり、滑走艇の未定浸水面問題に対する変分原理は知られていない。本論で扱おうとする滑走艇の未定浸水面の問題は、複雑な積分方程式を解くことが要求されるから、変分原理がそれを解く有効な手段となると考えられ、変分原理を見出す労苦以上の結果を期待できる。

本論はこのような観点から、滑走艇の未定浸水面問題を変分直接法により解くことを考え、その基となる変分原理を見出すことを試みたものである。

第2章 滑走艇まわりの流れ

この章は滑走艇まわりの流れが、あらかじめ浸水面が定められない問題であるとの立場に立ち、その理論的取り扱いについて述べるものである。拘束状態にある滑走艇まわりの流場が得られない限り自由航走状態での流場は求め得ないので、拘束状態の流場解析を進める。本論では線形理論を用いる。滑走艇まわりの流れのように非線形現象が顕著に表れるものに対しても、浸水面を求めるという観点からは、線形理論が十分有効であることを検証する。結論として、滑走艇まわりの流場が2つの未定境界の積分方程式を解くことで定められることを示す。

2.1 理論の背景

滑走艇の研究は、船体を揚力によって支持することから、翼理論になぞらえて理論が展開されてきた。しかし無限流体中にある翼とは異なり、水面が存在するために航走時の浸水面が静止時に比べて変化する。実現象を見るために、写真1に柱状滑走艇模型の航走時の様子を撮影したものを示す。拘束状態にある滑走艇を定常滑走させると、静止時にはくさび型であった水線 (calm water line) が側方へ広がり、放物線形状となる。浸水面の境界 (スプレールートライン) から前方、あるいは側方へ薄い膜状のスプレーが飛び出す様子が観察される。写真2は比較的横長の滑走板の場合である。浸水面形状は、船底傾斜 (dead rise) がないため静止時水線と同様の長方形に近い。しかし浸水面はほぼ2倍程度にまで増加している。このような現象は通常の翼には見らない滑走艇まわりの流場の特徴であり、その理論的取り扱いを困難にしている原因でもある。

船舶流体力学においては、自由表面波形の形状を求める問題も同じ未定境界の問題である。しかし、特に非線形影響を問題としなければ、静水面を仮の境界とでき、流場が確定したあとで自由表面形状を求めることができる。滑走艇の場合、拘束状態であつてさえ、ともすれば浸水面は静止時の2倍程度にも達するから、静止時水線を仮の境界とすることはできない。この意味で両者は本質的に異なる問題である。

滑走艇の未定浸水面問題を最初に扱ったのはWagner⁹⁾である。彼は小さな船底傾斜角 (dead rise angle) を有する滑走艇の浸水面を求めた。彼の得た浸水面は静止時浸水面の $\sqrt{2}$ 倍だけ広く、またスプレールートラインからは膜状のスプレーが飛び出すという現象があるため、全体として非線形的現象との感を強く受ける。彼の理論の特徴は、側方へ押し出された波の盛り上がり (pile up) を考慮したことである。船底傾斜角が大きい場合や排水量型船舶では、水線面近傍での波面の盛り上がりは取るに足りない量であり、無視できる。しかし、滑走艇の船底は平らに近いため、静止水面からわずかでも水面が盛り上がると、船底とぶつかり、新たな浸水面となる。水面の盛り上がりがたとえ微小であっても、船底傾斜角も微小であれば、未定浸水面問題を生じさせることになる。

一般に船底傾斜角やトリム角が小さければ、線形理論が適用でき、それは微小な波高しか生じさせないから、未定浸水面問題は線形理論の枠組みで論じることができる。

一方、スプレー現象は、スプレールートラインより外側で生じるものであり、スプレーは薄い膜状のため、その部分では圧力はほぼ大気圧と考えられる。したがって揚力はほとんど発生していない。ただ、スプレールート、すなわちスプレーが飛び出す根元では、流れの方向が 180° 回転する部位も存在するため、本質的に非線形流れとなっている。摂動論的観点からは、スプレールート近傍は部分的に拡大して非線形的に流場解析が行われる。局所流場は外部の翼理論的な圧力の特異性を吸収する役割を担っている。逆に、この局所流場から外側の流場、すなわち浸水面全体に対する影響は、スプレー厚さの分だけ波面の盛り上がりを減少させることである。これは高次影響に過ぎないから、スプレールートラインは浸水面の単なる外縁と考えてよく、またスプレールートラインでは波面と滑走艇底面の高さは一致すると考えてよい。

同種のことは、ハードチャインから発生する非線形な波についても言える。

以上のことを総合すると、未定浸水面問題は滑走艇の船底傾斜角が小さい、またはトリム角が小さいことにより生じるものであり、浸水面全体にわたる圧力等の流場の諸量は、線形理論の枠組みで求め得ると考えられる。また、スプレー厚さを無視し、スプレールートライン上では、スプレー厚さを無視し、線形理論で得られる波高とその位置での滑走艇底面の高さを等しいと考えてよい。

2.2 線形理論

座標系は $\hat{z} = 0$ を静水面とし、主流方向を $\hat{x}$ 、船幅方向を $\hat{y}$ 軸にとる (Fig.1 参照)。滑走艇の後端の位置を $\hat{x} = 0$ 、艇の半幅を b とする。艇は姿勢を拘束された状態にあり、その底面の高さは $\hat{H}(\hat{x}, \hat{y})$ 、静止時の水線は $\hat{x} = -\hat{l}_R(\hat{y})$ の曲線 (直線) で表されるとする。この滑走艇を拘束状態のまま前進速度 U_∞ で定常滑走させた結果、浸水面の境界 (スプレールートライン) が $\hat{x} = -\hat{l}_W(\hat{y})$ となった場合を考える。静水面より上方に設定された滑走艇についても考察の対象とし、航走時に水面に攪乱を与えるなどして定常滑走に至った状態を考える。この場合の静止時水線 $\hat{l}_R(\hat{y})$ は滑走艇底面の後端からの延長面と静水面の交わる線として定義する。このとき、 $\hat{l}_R(\hat{y}) < 0$ である。

流体は非粘性、渦なしであるとし、速度ポテンシャルを $\hat{\Phi}$ とする。

解析の便利のため、すべての有次元量を、長さの次元は滑走艇の半幅 b 、速度の次元は滑走艇の前進速度 U_∞ 、力の次元は ρU_∞^2 を用いて以下のように無次元する。

$$\begin{aligned} x &\equiv \frac{\hat{x}}{b}, \quad y \equiv \frac{\hat{y}}{b}, \quad z \equiv \frac{\hat{z}}{b}, \quad l_R \equiv \frac{\hat{l}_R}{b}, \quad l_W \equiv \frac{\hat{l}_W}{b}, \quad H \equiv \frac{\hat{H}}{b} \\ \Phi &\equiv \frac{\hat{\Phi}}{U_\infty b}, \quad p \equiv \frac{\hat{p}}{\rho U_\infty^2} \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

なお、 p は圧力である。

無次元化の結果、Fig.1に示す xyz 座標においては、半幅1、船底の高さが $H(x, y)$ 、静止時水線 $x = -l_R(y)$ の滑走艇が前進速度1で定常滑走し、スプレールートラインが $x = l_W(y)$ となった場合を考えることになる。

本論では線形理論を用い、重力影響を考慮した滑走艇まわりの流れを扱う。速度ポテンシャル Φ を

$$\Phi(x, y, z) = x + \phi(x, y, z) \quad (2.2.2)$$

とする。このとき支配方程式は以下になる。

$$[L] \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (2.2.3)$$

$$[F] \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + K_0 \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad (2.2.4)$$

$$[B] \quad \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad (2.2.5)$$

[L]はラプラスの方程式であり、[F]は線形化した自由表面条件である。式中 K_0 は

$$K_0 \equiv \frac{gb}{U_\infty^2} \equiv \frac{1}{Fn_b^2} \quad (2.2.6)$$

と定義したものであり、滑走艇の半幅ベースの無次元波数を表す。[B] は滑走艇底面での線形化した物体表面条件である。

重力の影響は複雑な積分表現とならざるを得ないから、なんらかの近似を行う上で、できるだけ意味の明瞭な表現にしておく必要がある。ここでは、重力の影響によらない部分と重力影響の部分に分けて定式化しておく。あらかじめ重力の影響による部分を分離しておく、[L] と [F] を満足する速度ポテンシャル $\phi(x, y, z)$ は、船底圧力 p_0 を用いて、以下のように書ける¹⁷⁾¹⁸⁾。

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z) &= \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_{-l_w(\eta)}^0 2p_0(\xi, \eta) \left\{ \frac{z}{(y-\eta)^2 + z^2} \left(1 + \frac{x-\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2}} \right) \right. \\ &\quad - \frac{K_0}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \oint_0^\infty \frac{e^{kz} \sec^3 \theta}{k - K_0 \sec^2 \theta} \sin(k(x-\xi) \cos \theta) \cos(k(y-\eta) \sin \theta) dk d\theta \\ &\quad - K_0 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{K_0 z \sec^2 \theta} \sec^3 \theta \cos(K_0(x-\xi) \sec \theta) \\ &\quad \left. \times \cos(K_0(y-\eta) \sec^2 \theta \sin \theta) d\theta \right\} d\xi d\eta \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

式中、第1項は重力に左右されない一定の量であり、いわゆる重力を無視したときの滑走艇まわりの流れの速度ポテンシャルである。これは無限流体中の翼まわりの流れの速度ポテンシャルに相当する。第2項は重力影響による局所波を表し、第3項は自由波を表す。 ϕ の第1項は Fig.2 に示すように、滑走艇の浸水面上に強さ $2p_0(x, y)$ の微小馬蹄渦による速度ポテンシャルを重畳したものと考えることができる。

滑走艇底面上で物体表面条件 [B] を課せば以下の積分方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x}(x, y) &= \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_{-l_w(\eta)}^0 2p_0(\xi, \eta) \left\{ \frac{1}{(y-\eta)^2} \left(1 + \frac{x-\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} \right) \right. \\ &\quad - \frac{K_0}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \oint_0^\infty \frac{k \sec^3 \theta}{k - K_0 \sec^2 \theta} \sin(k(x-\xi) \cos \theta) \cos(k(y-\eta) \sin \theta) dk d\theta \\ &\quad - K_0^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sec^5 \theta \cos(K_0(x-\xi) \sec \theta) \\ &\quad \left. \times \cos(K_0(y-\eta) \sec^2 \theta \sin \theta) d\theta \right\} d\xi d\eta \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

以後、この積分方程式を滑走艇の傾きに関する積分方程式と呼ぶ。積分記号の H は Hadamard の意味での発散積分の有限部分をとることを意味する。

$l_w(y)$ が既知であれば、(2.2.3)~(2.2.5) 式に加え、Kutta の条件

$$[Kutta] \quad p_0(0, y) = 0 \quad (2.2.9)$$

を課すことで p_0 は一意に定められ、したがって ϕ を定め得る。これは従来とられてきた船舶流体力学の立場である。

しかし、既に述べたように、場合によっては浸水面は静止時浸水面の2倍程度にも達し、自由航走状態となればなおさらである。このような場合、(2.2.7), (2.2.8) 式の積分下限に現れた浸水長分布、 $l_w(y)$ をあらかじめ特定できていないから、このままでは積分の実行すらできず、問題は閉じない。これが未定境界問題である。

松村らは¹³⁾問題を閉じさせるために、既知の滑走艇の高さと波面の高さが一致するという条件を、滑走艇のスプレールートライン上、または後端で課せばよいことを示した。波高 $h(x, y)$ は、自由表面での線形化した運動学条件

$$[K] \quad \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \text{on } z = 0 \quad (2.2.10)$$

に従う必要がある。無限前方で $h = 0$ となるように ϕ を (2.2.10) 式にしたがって積分すれば、波高 h は

$$\begin{aligned} h(x, y) &= \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_{-l_w(\eta)}^0 2p_0(\xi, \eta) \left\{ \frac{1}{(y-\eta)^2} \left(x - \xi + \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} \right) \right. \\ &\quad + \frac{K_0}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \oint_0^\infty \frac{\sec^4 \theta}{k - K_0 \sec^2 \theta} \cos(k(x-\xi) \cos \theta) \cos(k(y-\eta) \sin \theta) dk d\theta \\ &\quad - K_0 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sec^4 \theta \sin(K_0(x-\xi) \sec \theta) \\ &\quad \left. \times \cos(K_0(y-\eta) \sec^2 \theta \sin \theta) d\theta \right\} d\xi d\eta \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

となる。(2.2.11) 式は水面波高のみならず、滑走艇の高さを与える式にもなっている。前者の場合は発散積分の有限部分をとる必要はない。波高が滑走艇の高さに一致するという条件を、ここでは未知のスプレールートライン上で課す。

$$[S] \quad H(-l_w(y), y) = h(-l_w(y), y) \quad (2.2.12)$$

これはスプレー条件と呼ばれる。具体的に書き下せば

$$\begin{aligned}
 H(-l_W(y), y) &= \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_{-l_W(\eta)}^0 2p_0(\xi, \eta) \left\{ \frac{1}{(y-\eta)^2} \left(-l_W(y) - \xi + \sqrt{(-l_W(y) - \xi)^2 + (y-\eta)^2} \right) \right. \\
 &+ \frac{K_0}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \oint_0^\infty \frac{\sec^4 \theta}{k - K_0 \sec^2 \theta} \cos(k(-l_W(y) - \xi) \cos \theta) \cos(k(y - \eta) \sin \theta) dk d\theta \\
 &- K_0 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sec^4 \theta \sin(K_0(-l_W(y) - \xi) \sec \theta) \\
 &\left. \times \cos(K_0(y - \eta) \sec^2 \theta \sin \theta) d\theta \right\} d\xi d\eta \quad (2.2.13)
 \end{aligned}$$

が成立している必要がある。この関係は浸水面全体で課すものではなく、スプレールートライン上でのみ課されていることに注意する。以後、この積分方程式を滑走艇の高さに関する積分方程式と呼ぶ。

これで $p_0(x, y)$ と $l_W(y)$ を未知とする2つの積分方程式が得られたので、問題は閉じたことになる。実際、松村ら¹³⁾は、重力の影響を無視するなどの近似を行っているものの、未定浸水面問題を解いている。したがって、重力の影響がその本質を左右しなければ、(2.2.8)式と(2.2.13)式を連立させて解けば船底圧力とスプレールートラインの形状が決定される。しかし、いずれの積分方程式も重力の影響のために核関数が非常に複雑である。仮にこれが解けたとしても未定境界であるからスプレールートラインの形状を仮定し、両方の積分方程式を満足するようにスプレールートラインを定めなければならないことになる。

2.3 2章のまとめ

第2章は、滑走艇まわりの流れを未定浸水面の問題とし、線形理論に基づいて未定浸水面と船体に働く圧力を求めるための定式化を行った。結論は以下の通りである。

1. 浸水面を既知とする問題の場合、物体表面条件から得られる積分方程式は、Kuttaの条件を課すことで船底圧力を、したがって流場を定め得る。

未定浸水面問題では、物体表面条件から得られる積分方程式は、船底圧力に加え、浸水面も未知であるため、1つの積分方程式だけでは流場を定め得ない。

2. 流場を定めるためにはもう1つの条件が必要となる。そのためには波面の盛り上がりを考慮しなければならない。線形理論ではスプレーは無視できるため、盛り上がっ

た波面は滑走艇のスプレールートライン、あるいはトランサムスターンで滑走艇底面の高さに一致することが要求される。本論では、この条件を未知のスプレールートライン上で課すことにより、もう1つの積分方程式を得た。

3. 船底圧力とスプレールートラインの形状の2つを未知とする、2つの未定境界の積分方程式を連立させて解けば、流場を定めることができる。
4. 積分方程式は核関数が複雑であること、さらに未定境界であることからこれらを解くことは困難が予想される。

第3章 滑走艇の未定浸水面問題の変分原理

この章では、前章で示した滑走艇まわりの流場を定めるために、解くべき2つの未定境界の積分方程式の解法について述べる。積分方程式は重力影響のために核関数が複雑となっている。問題の本質を見失わないように重力の影響を無視した場合から考える。重力を無視した積分方程式は高アスペクト比近似を用いて既に解かれている¹³⁾。これに対し本論では変分直接法の観点からこれを解くことを考え、オイラーの方程式が満たすべき積分方程式となる新しい変分原理を示す。さらにこの原理を重力の影響を考慮した場合に拡張し、重力影響のあるなしに関わらず、同じ原理が成り立つことを示す。

3.1 重力影響を無視した滑走艇の未定浸水面問題

重力の影響を無視した場合、滑走艇まわりの流れの速度ポテンシャルは以下のようになる。

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_{-l_W(\eta)}^0 2p_0(\xi, \eta) \times \left\{ \frac{z}{(y-\eta)^2 + z^2} \left(1 + \frac{x-\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2}} \right) \right\} d\xi d\eta \quad (3.1.1)$$

これは、前章で示した、速度ポテンシャル(2.2.7)式の第1項である。

したがって、滑走艇の傾きに関する積分方程式と滑走艇の高さに関する積分方程式は以下のようになる。

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_{-l_W(\eta)}^0 2p_0(\xi, \eta) \times \frac{1}{(y-\eta)^2} \left(1 + \frac{x-\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} \right) d\xi d\eta \quad (3.1.2)$$

$$H(-l_W(y), y) = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_{-l_W(\eta)}^0 2p_0(\xi, \eta) \times \frac{1}{(y-\eta)^2} \left(-l_W(y) - \xi + \sqrt{(-l_W(y) - \xi)^2 + (y-\eta)^2} \right) d\xi d\eta \quad (3.1.3)$$

重力の影響を無視した場合、滑走艇の傾きに関する積分方程式(3.1.2)式は、スプレールートラインの形状 l_W が既知ならば、浸水面を揚力面とする通常の揚力面の積分方程式に他ならず、核関数の意味は微小馬蹄渦による重量効果を表す。

揚力面の積分方程式の解法としては、船底圧力の解をmode functionで仮定するmode function法、揚力面を離散的な馬蹄渦の集まりとして取扱う渦格子法(Vortex Lattice Method)などの数値解法が知られている。これらの方法をもとに未知のスプレールートラインを求めようとする、まずスプレールートラインの形状を仮定して滑走艇の傾きに関する積分方程式を解き、その後、滑走艇の高さに関する積分方程式を満足するようにスプレールートラインの形状を定めるという繰り返し計算の手法が考えられる。このような手法の問題点は、収束性の確保が難しいことと、重力影響の計算が現在でも困難なことである。

本論ではこれらの未定境界の積分方程式の簡単な解法として変分原理を用いる方法を示す。変分直接法は方程式を解く代りに汎関数の極値問題に置き換えるものであり、解を単純な試験関数で近似しても良い結果が得られる。このため、流体力学を含めて工学上の多くの問題について用いられてきた¹⁹⁾²⁰⁾。しかし、未知の問題に対して変分原理そのものを導出することは一般に困難であり、本論で扱おうとする滑走艇の未定浸水面問題に対する変分原理は知られていない。ただ、既知の浸水面の場合には、2つの変分原理が知られている。1つは、滑走艇の傾きに関する積分方程式を解くためのFlax¹⁵⁾の変分原理であり、もう1つは滑走艇の高さに関する積分方程式を解くための別所¹⁶⁾の変分原理である。あるべき変分原理の性質を知るために、これらの2つの変分原理を調べておく。

3.1.1 Flaxの変分原理

Flax¹⁵⁾は無限流体中の3次元揚力面の積分方程式(3.1.2)式を解く問題を、船底圧力分布 $p_0(x, y)$ と、別に $\bar{p}_0(x, y)$ なる未知量を導入し、この2つを変関数とする汎関数の変分問題に置き換えた。汎関数は以下のようである。

$$I[p_0, \bar{p}_0] \equiv \int_{-1}^1 \int_{-l_W(y)}^0 \left\{ -2\bar{p}_0(x, y) \frac{\partial H}{\partial x}(x, y) - 2p_0(x, y) \frac{\partial H}{\partial x}(x, y) \right\} dx dy + \int_{-1}^1 \int_{-l_W(y)}^0 2\bar{p}_0(x, y)$$

$$\times \left\{ \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_{-l_w(\eta)}^0 \frac{2p_0(\xi, \eta)}{(y-\eta)^2} \left(1 + \frac{x-\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} \right) d\xi d\eta \right\} dx dy \quad (3.1.4)$$

ただし、後述の本論で示す変分原理の汎関数にあわせて、(3.1.4)式を原著論文と符号を逆にしている。この汎関数の第1変分をとると

$$\begin{aligned} \delta I = & \int_{-1}^1 \int_{-l_w(y)}^0 \delta[2\bar{p}_0(x, y)] \left\{ -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y) \right. \\ & + \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_{-l_w(\eta)}^0 \frac{2p_0(\xi, \eta)}{(y-\eta)^2} \left(1 + \frac{x-\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} \right) d\xi d\eta \Big\} dx dy \\ & + \int_{-1}^1 \int_{-l_w(y)}^0 \delta[2p_0(x, y)] \left\{ -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y) \right. \\ & + \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_{-l_w(\eta)}^0 \frac{2\bar{p}_0(\xi, \eta)}{(y-\eta)^2} \left(1 + \frac{\xi-x}{\sqrt{(\xi-x)^2 + (y-\eta)^2}} \right) d\xi d\eta \Big\} dx dy \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

となる。第1項、変分 $\delta\bar{p}_0$ に対するオイラーの方程式は、滑走艇の傾きに関する積分方程式、(3.1.2)式である。さらに第2項、変分 δp_0 に対するオイラーの方程式は、以下に示す積分方程式である。

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x}(x, y) = & \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_{-l_w(\eta)}^0 2\bar{p}_0(\xi, \eta) \\ & \times \frac{1}{(y-\eta)^2} \left(1 + \frac{\xi-x}{\sqrt{(\xi-x)^2 + (y-\eta)^2}} \right) d\xi d\eta \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

これは、滑走艇の傾きに関する積分方程式(3.1.2)式の核関数の x と ξ を入れ換えたものである。この積分方程式は、Fig.3に示すように滑走艇のトリムを変えずに、一様流の方向だけが反対の流れに対応する。この流れは逆流れ(reverse flow)と呼ばれ、当初意味不明であった $\bar{p}_0$ は逆流れの船底圧力を意味することになる。

この変分原理は、主流方向の対称性を持たない、 x と ξ を入れ換えると本来の物理現象に対する意味を失うという問題であるために、逆流れの介在を必要としている。この意味でFlaxの変分原理はポテンシャル論で通常見られる最大原理とは様相を異にし、随伴変分原理と呼ばれる。それでも浸水面を既知とするならば、Kuttaの条件を課すことで、汎関数を停留させる p_0 は滑走艇の傾きに関する積分方程式を満足する。

このような反対称性は後曳き渦がほぼ主流にのって流され、決して前方に流れ去ることがないことを反映したものである。船舶流体力学ではこのような反対称性は波の生成に対しても見られる。定常航走する場合に限れば、船体前方には波が存在せず、後方のみ波

が生ずるというような現象がある。このような反対称性は本論で重力影響を扱うときに考慮すべき性質である。

3.1.2 別所の変分原理

別所ら¹⁶⁾はFlaxの変分原理とは別に、滑走艇の高さに対する積分方程式を満足する新たな変分原理を示した。別所の原理は重力影響を考慮した2次元問題を扱っている。これを重力影響を無視した3次元問題にあてはめると、汎関数は以下ようになる。

$$\begin{aligned} J[p_0, \bar{p}_0] = & \int_{-1}^1 \int_{-l_w(y)}^0 \{ -2\bar{p}_0(x, y)H(x, y) - 2p_0(x, y)H(x, y) \} dx dy \\ & + \int_{-1}^1 \int_{-l_w(y)}^0 2\bar{p}_0(x, y) \\ & \times \left\{ \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_{-l_w(\eta)}^0 \frac{2p_0(\xi, \eta)}{(y-\eta)^2} \left(x-\xi + \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} \right) d\xi d\eta \right\} dx dy \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

やはり、逆流れに対する船底圧力 $\bar{p}_0$ の仲介を必要とするが、この汎関数の第1変分をとると

$$\begin{aligned} \delta J = & \int_{-1}^1 \int_{-l_w(y)}^0 \delta[2\bar{p}_0(x, y)] \left\{ -H(x, y) \right. \\ & + \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_{-l_w(\eta)}^0 \frac{2p_0(\xi, \eta)}{(y-\eta)^2} \left(x-\xi + \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} \right) d\xi d\eta \Big\} dx dy \\ & + \int_{-1}^1 \int_{-l_w(y)}^0 \delta[2p_0(x, y)] \left\{ -H(x, y) \right. \\ & + \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_{-l_w(\eta)}^0 \frac{2\bar{p}_0(\xi, \eta)}{(y-\eta)^2} \left(\xi-x + \sqrt{(\xi-x)^2 + (y-\eta)^2} \right) d\xi d\eta \Big\} dx dy \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

となる。第1項、変分 $\delta\bar{p}_0$ に対するオイラーの方程式は、浸水面全体に対する滑走艇の高さに関する積分方程式(3.1.3)式である。第2項、変分 δp_0 に対するオイラーの方程式は、浸水面全体に対する逆流れの滑走艇の高さに関する積分方程式である。

しかし、この変分原理でも浸水面、すなわち積分範囲に現れた $l_w(y)$ を既知としている。滑走艇の高さに関する積分方程式は、 l_w を自由に与えてしまうとKuttaの条件を満足させ得ないことを別所ら¹¹⁾自身が示している。したがって(3.1.7)式を基礎に浸水面を求めるには、繰り返し計算等の複雑な手続きを要することは否めない。

3.1.3 滑走艇の未定浸水面問題の変分原理

本論では先に示した Flax の変分原理や別所の変分原理を拡張し、浸水面も未知として取り扱うことを考える。

浸水面を未知とした場合、積分方程式の積分範囲が定められないことになるため、変分法としては自由端問題となる。自由端問題の単純な解決法としては、Flax の変分原理にスプレールートライン上で波高と滑走艇の高さが一致する条件 (2.2.12) 式を課すことが考えられる。また別所の変分原理を自由端問題として取り扱うことも考え得る。しかし、両原理の変関数 p_0 は、自由端 (スプレールートライン上) で $1/\sqrt{l_W(y) - x}$ の特異性を持つと考えられるから、自由端の変化に伴う汎関数の変分は有限値とはなくなる。したがって、スプレールートライン上の p_0 の特異性を除去できない限り、自由端問題として取扱うことは困難になる。

これに対し、松村ら¹³⁾が示した浸水長を決定する積分方程式では、高アスペクト比近似も手伝っているが、未定浸水長 l_W は滑走板の各断面周りの循環 Γ と $\Gamma = \pi \tau l_W$ の関係で結ばれている⁶⁾。2次元翼理論で知られているように、翼周りの循環 Γ は本来自由に設定できるものであり、物理的観点から Kutta の条件が導入され、決め得る量となっている。滑走艇の場合には、適当に l_W を定めれば、それに応じて p_0 が得られる。しかし、適当に l_W を定めてしまえば、スプレー条件を満足させ得ない。これは、翼まわりの流れで、適当な循環を選んでしまうと翼後端で流体が滑らかに流出できないのと同じ事情にある。このように考えてくると、 l_W と滑走艇の縦切り断面まわりの循環 Γ は類似性をもっており、 l_W を決定するような自由端問題は、 Γ を決定する自由端問題に置き換え得る可能性を示唆する。このことは、滑走艇の傾き、および高さに関する積分方程式で、 Γ を未知とするような冗長性を持たせることで達成できると考えられる。

圧力の特異性に伴う問題は、未知量 p_0 のかわりに、その積分、すなわち

$$\mu(x, y) \equiv \int_{-l_W(y)}^x 2p_0(\xi, y) d\xi \quad (3.1.9)$$

で表される loading function ²¹⁾²²⁾ μ を用いれば解決できる。(3.1.9) 式から明らかなように、スプレールートライン上で p_0 が $1/\sqrt{l_W(y) - x}$ の強い特異性を持っても、 μ は $\sqrt{l_W(y) - x}$ の程度の弱い特異性を持つに過ぎない。こうして μ は滑走艇上の至る所で有限値をとり、 p_0 の特異性除去の観点からは問題がなくなる。

速度ポテンシャル ϕ は μ を用いると以下のように表すことができる。

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z) &\equiv \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_{-l_W(\eta)}^0 \Gamma(\eta) \left\{ \frac{z}{(y-\eta)^2 + z^2} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + (y-\eta)^2 + z^2}} \right) \right\} d\eta \\ &+ \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_{-l_W(\eta)}^0 \mu(\xi, \eta) \frac{z}{\{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2\}^{\frac{3}{2}}} d\xi d\eta \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

この表現は単に (3.1.2) 式を部分積分して得られるものに過ぎないが、 μ の滑走艇後端での値 $\mu(0, y)$ を μ とは区別して $\Gamma(y)$ と表したものである。(3.1.10) 式、第2項は滑走艇の浸水面上に強さ $\mu(x, y)$ の鉛直下向きのダブレットを分布させたものである。3次元ダブレットは微小渦輪と同等の作用を持つ。 μ をこのように解釈し直すと、船底でのダブレット分布は、Fig.4に示すように、循環 μ の渦格子を配置したことになる。各渦格子の循環強さベクトル γ は

$$\gamma = -(\mathbf{k} \times \nabla) \mu \quad (3.1.11)$$

で与えられ、 μ = 一定の線は渦の強さ密度ベクトルに接する。この意味で μ = 一定の線は渦線となり、 μ = を渦線関数と呼ぶ。Fig.4に示したように船体後方には、トランスサムスターンから流出した渦が直線的に延びる。Kutta の条件が満足されているならば、

$$[Kutta] \quad \mu(0, y) = \Gamma(y) \quad (3.1.12)$$

の強さの渦糸、言い換えると、 $d\Gamma$ の強さを有する微小馬蹄渦が流出することになる。このことを表現したものが (3.1.10) 式、第1項である。

これにより希望通り、 ϕ を Γ で表現することができる。未知数は船底圧力 p_0 のみであったのが、 μ と Γ の2つになり、流場を定める上で自由度が増したことになる。

μ と滑走艇の縦切り断面まわりの循環分布 Γ を用いれば、滑走艇の傾きに関する積分方程式と滑走艇の高さに関する積分方程式は以下のように書くことができる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x}(x, y) &= \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma(\eta)}{(y-\eta)^2} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + (y-\eta)^2}} \right) d\eta \\ &+ \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_{-l_W(\eta)}^0 \frac{\mu(\xi, \eta)}{\{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\}^{\frac{3}{2}}} d\xi d\eta \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

$$H(-l_W(y), y) = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma(\eta)}{(y-\eta)^2} \left(-l_W(y) + \sqrt{l_W(y)^2 + (y-\eta)^2} \right) d\eta$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_{-l_W(\eta)}^0 \frac{\mu(\xi, \eta)}{(y-\eta)^2} \times \left(1 + \frac{-l_W(y) - \xi}{\sqrt{(-l_W(y) - \xi)^2 + (y-\eta)^2}} \right) d\xi d\eta \quad (3.1.14)$$

(3.1.13), (3.1.14) 式で重要なことは, μ と Γ を独立に扱うことである. したがって Kutta の条件は, 制約条件として課す必要がある.

μ , Γ , l_W をそれぞれ独立な変関数とし, さらに随伴変分原理となるように逆流れの変関数, $\bar{\mu}$, $\bar{\Gamma}$ も加えて, Flax の変分原理 (3.1.4) 式, 別所の変分原理 (3.1.7) 式に倣い, 次の汎関数を定義する. 本論の立場は以下の汎関数を停留させるものが (3.1.13), (3.1.14) 式を満足することである.

$$\begin{aligned} \Pi[\mu, \bar{\mu}, \Gamma, \bar{\Gamma}, l_W] &\equiv \int_{-1}^1 \int_{-l_W(y)}^0 \left\{ -\bar{\mu}(x, y) \frac{\partial H}{\partial x}(x, y) - \mu(x, y) \frac{\partial H}{\partial x}(x, y) \right\} dx dy \\ &+ \int_{-1}^1 \int_{-l_W(y)}^0 \bar{\mu}(x, y) \left\{ \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma(\eta)}{(y-\eta)^2} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + (y-\eta)^2}} \right) d\eta \right. \\ &+ \left. \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_{-l_W(\eta)}^0 \frac{\mu(\xi, \eta)}{\{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\}^{\frac{3}{2}}} d\xi d\eta \right\} dx dy \\ &+ \int_{-1}^1 \left\{ -\bar{\Gamma}(y) H(-l_W(y), y) - \Gamma(y) H(0, y) \right\} dy \\ &+ \int_{-1}^1 \bar{\Gamma}(y) \left\{ \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma(\eta)}{(y-\eta)^2} \left(-l_W(y) + \sqrt{l_W(y)^2 + (y-\eta)^2} \right) d\eta \right. \\ &+ \left. \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_{-l_W(\eta)}^0 \frac{\mu(\xi, \eta)}{(y-\eta)^2} \left(1 + \frac{-l_W(y) - \xi}{\sqrt{(-l_W(y) - \xi)^2 + (y-\eta)^2}} \right) d\xi d\eta \right\} dy \end{aligned}$$

$$\text{制約条件 } \mu(0, y) = \Gamma(y) \quad (3.1.15)$$

ただし, 制約条件は Kutta の条件である.

汎関数の第1項, 第2項に滑走艇の傾きに関する積分方程式を盛り込み, 第3項, 第4項に滑走艇の高さに関する積分方程式を盛り込んでいる. また, 随伴変分原理となるように, 滑走艇の傾きに関する積分方程式の項には, 逆流れの渦線関数 $\bar{\mu}$ を掛け合わせ, 滑走艇の高さに関する積分方程式の項には逆流れの循環 $\bar{\Gamma}$ を掛け合わせている.

汎関数をこのように定義すると, 自由端 l_W の変化に伴う汎関数の変分をとることができる. これを以下に示す.

汎関数 Π の第1変分は以下ようになる.

$$\begin{aligned} \delta \Pi &= \int_{-1}^1 \int_{-l_W(y)}^0 \delta \bar{\mu}(x, y) \\ &\times \left\{ -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y) + \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma(\eta)}{(y-\eta)^2} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + (y-\eta)^2}} \right) d\eta \right. \\ &+ \left. \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_{-l_W(\eta)}^0 \frac{\mu(\xi, \eta)}{\{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\}^{\frac{3}{2}}} d\xi d\eta \right\} dx dy \\ &+ \int_{-1}^1 \delta \bar{\Gamma}(y) \\ &\times \left\{ -H(-l_W(y), y) + \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma(\eta)}{(y-\eta)^2} \left(-l_W(y) + \sqrt{l_W(y)^2 + (y-\eta)^2} \right) d\eta \right. \\ &+ \left. \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_{-l_W(\eta)}^0 \frac{\mu(\xi, \eta)}{(y-\eta)^2} \left(1 + \frac{-l_W(y) - \xi}{\sqrt{(-l_W(y) - \xi)^2 + (y-\eta)^2}} \right) d\xi d\eta \right\} dy \\ &+ \int_{-1}^1 \int_{-l_W(y)}^0 \delta \mu(x, y) \\ &\times \left\{ -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y) + \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \frac{\bar{\Gamma}(\eta)}{(y-\eta)^2} \left(1 + \frac{-l_W(\eta) - x}{\sqrt{(-l_W(\eta) - x)^2 + (y-\eta)^2}} \right) d\eta \right. \\ &+ \left. \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_{-l_W(\eta)}^0 \frac{\bar{\mu}(\xi, \eta)}{\{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\}^{\frac{3}{2}}} d\xi d\eta \right\} dx dy \\ &+ \int_{-1}^1 \delta \Gamma(y) \\ &\times \left\{ -H(0, y) + \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \frac{\bar{\Gamma}(\eta)}{(y-\eta)^2} \left(-l_W(\eta) + \sqrt{l_W(\eta)^2 + (y-\eta)^2} \right) d\eta \right. \\ &+ \left. \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_{-l_W(\eta)}^0 \frac{\bar{\mu}(\xi, \eta)}{(y-\eta)^2} \left(1 + \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + (y-\eta)^2}} \right) d\xi d\eta \right\} dy \\ &+ \int_{-1}^1 \delta l_W(y) \\ &\times \left[\mu(-l_W(y), y) \left\{ -\frac{\partial H}{\partial x}(-l_W(y), y) \right. \right. \\ &+ \left. \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \frac{\bar{\Gamma}(\eta)}{(y-\eta)^2} \left(1 + \frac{-l_W(\eta) + l_W(y)}{\sqrt{(-l_W(\eta) + l_W(y))^2 + (y-\eta)^2}} \right) d\eta \right. \\ &+ \left. \left. \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_{-l_W(\eta)}^0 \frac{\bar{\mu}(\xi, \eta)}{\{(-l_W(y) - \xi)^2 + (y-\eta)^2\}^{\frac{3}{2}}} d\xi d\eta \right\} \right. \\ &- \left. \left\{ \bar{\Gamma}(y) - \bar{\mu}(-l_W(y), y) \right\} \left\{ -\frac{\partial H}{\partial x}(-l_W(y), y) \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma(\eta)}{(y-\eta)^2} \left(1 + \frac{-l_W(y)}{\sqrt{l_W(y)^2 + (y-\eta)^2}} \right) d\eta \\
& + \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_{-l_W(\eta)}^0 \frac{\mu(\xi, \eta)}{\{(-l_W(y) - \xi)^2 + (y - \eta)^2\}^{\frac{3}{2}}} d\xi d\eta \Bigg\} dy \quad (3.1.16)
\end{aligned}$$

汎関数 (3.1.15) 式が停留するとき、順流れ、すなわち本来の物理的な流れについて次のことがいえる。

i) 変分 $\delta\bar{\mu}$ ((3.1.16) 式右辺第1項) に対するオイラーの方程式は、滑走艇の傾きに関する積分方程式 (3.1.13) である。

ii) 変分 $\delta\bar{\Gamma}$ ((3.1.16) 式右辺第2項) に対するオイラーの方程式は、滑走艇の高さに関する積分方程式 (3.1.14) である。

逆流れに対しては、

iii) 変分 $\delta\mu$ ((3.1.16) 式右辺第3項) に対するオイラーの方程式は、逆流れの滑走艇の傾きに関する積分方程式である。

iv) 変分 $\delta\Gamma$ ((3.1.16) 式右辺第4項) に対するオイラーの方程式は、逆流れの滑走艇の高さに関する積分方程式である。

ただし、逆流れに対する滑走板の傾きに関する積分方程式と滑走板の高さに関する積分方程式とは、順流れに対するそれら (3.1.13), (3.1.14) で、 x を、 $-x$ に置き換えたものである。逆流れは、順流れと同じ滑走面を持たせているため、逆トリム状態となっており、両条件を満足する逆流れが実際に存在するかどうかは疑問に思われる。本論では、逆流れはあくまで仮想の流れと考え、その存在の有無は問題としないことにする。

第5項目は、やや複雑であるが、変分 δl_W に対するオイラーの方程式は、スプレールートラインにおける順流れと逆流れの滑走艇の傾きに関する積分方程式となる。しかし一般に積分方程式が浸水面全体で満足されたとしても、境界線上 (スプレールートライン及びトランサムスターン) で積分方程式を満足することが要請されているわけではなく、端点における積分値は任意の値をとることが許される。したがって、変分 δl_W に対するオイラーの方程式は

$$v) \mu(-l_W(y), y) = 0$$

$$vi) \bar{\Gamma}(y) = \bar{\mu}(-l_W(y), y)$$

となる。v) は μ の定義式 (3.1.9) 式から明らかなことであるが、物理的にはスプレールートラインが渦線となるべきことを示している。vi) は逆流れの Kutta の条件に相当する。

以上から、汎関数 Π が停留するとき、すべての条件が満足されるので、その $l_W(y)$ がスプレールートラインの形状であることがわかる。

3.2 重力影響を考慮した滑走艇の未定浸水面問題の変分原理

これまでに重力の影響を無視した場合について、滑走艇の未定浸水面問題を変分直接法の観点から解くことを考え、2つの未定境界の積分方程式をオイラーの方程式とする汎関数を示した。この節では、この変分原理を重力の影響を考慮した場合に拡張する。

重力影響を考慮したとき、満たすべき積分方程式 (2.2.8), (2.2.13) 式は重力影響を無視したときの積分方程式 (3.1.2), (3.1.3) 式に重力の影響を表す項が加わっただけで、積分方程式そのものの性質は変わらないと考えられる。したがって重力を考慮した場合にも重力を無視した場合と同じ原理が成り立つと考えられる。

重力影響を考慮したときの速度ポテンシャル ϕ ((2.2.7) 式) は、前節と同様に渦線関数 μ と滑走艇の後曳き渦の循環分布 Γ を用いると以下のように表される。

$$\begin{aligned}
\phi(x, y, z) &= \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \Gamma(\eta) \left\{ \frac{z}{(y-\eta)^2 + z^2} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + (y-\eta)^2 + z^2}} \right) \right. \\
& - \frac{K_0}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \oint_0^\infty \frac{e^{kz} \sec^3 \theta}{k - K_0 \sec^2 \theta} \sin(kx \cos \theta) \cos(k(y-\eta) \sin \theta) dk d\theta \\
& - K_0 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{K_0 z \sec^2 \theta} \sec^3 \theta \cos(K_0 x \sec \theta) \\
& \quad \times \cos(K_0(y-\eta) \sec^2 \theta \sin \theta) d\theta \Bigg\} d\eta \\
& + \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_{-l_W(\eta)}^0 \mu(\xi, \eta) \left\{ \frac{z}{\{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2\}^{\frac{3}{2}}} \right. \\
& - \frac{K_0}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \oint_0^\infty \frac{ke^{kz} \sec^2 \theta}{k - K_0 \sec^2 \theta} \cos(k(x-\xi) \cos \theta) \cos(k(y-\eta) \sin \theta) dk d\theta \\
& + K_0^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{K_0 z \sec^2 \theta} \sec^4 \theta \sin(K_0(x-\xi) \sec \theta)
\end{aligned}$$

$$\times \cos(K_0(y - \eta) \sec^2 \theta \sin \theta) d\theta \Big\} d\xi d\eta \quad (3.2.1)$$

重力の影響を無視した場合の速度ポテンシャルは

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z) &= \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_{-l_W(\eta)}^0 \Gamma(\eta) \left\{ \frac{z}{(y - \eta)^2 + z^2} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + (y - \eta)^2 + z^2}} \right) \right\} d\eta \\ &+ \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_{-l_W(\eta)}^0 \mu(\xi, \eta) \frac{z}{\{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2\}^{\frac{3}{2}}} d\xi d\eta \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

であったから、(3.2.1) 式は(3.2.2) 式に重力の影響を表す項が加わっただけである。(3.2.1), (3.2.2) 式ともに第1項は、滑走艇の浸水面に強さ $\mu(x, y)$ のダブレットが分布した速度ポテンシャルであり、第2項は滑走艇後端に強さ $d\Gamma(y)$ の微小馬蹄渦が分布した速度ポテンシャルを表す。この意味で両者は全く同じ意味を与える。

重力の影響を考慮した滑走艇の傾きに関する積分方程式(2.2.8) 式と滑走艇の高さに関する積分方程式(2.2.13) 式は

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial z}(x, y) &= \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \Gamma(\eta) \left\{ \frac{1}{(y - \eta)^2} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + (y - \eta)^2}} \right) \right. \\ &- \frac{K_0}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \oint_0^\infty \frac{k \sec^3 \theta}{k - K_0 \sec^2 \theta} \sin(kx \cos \theta) \cos(k(y - \eta) \sin \theta) dk d\theta \\ &- K_0^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sec^5 \theta \cos(K_0 x \sec \theta) \\ &\times \cos(K_0(y - \eta) \sec^2 \theta \sin \theta) d\theta \Big\} d\eta \\ &+ \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_{-l_W(\eta)}^0 \mu(\xi, \eta) \left\{ \frac{1}{\{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2\}^{\frac{3}{2}}} \right. \\ &- \frac{K_0}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \oint_0^\infty \frac{k^2 \sec^2 \theta}{k - K_0 \sec^2 \theta} \cos(k(x - \xi) \cos \theta) \cos(k(y - \eta) \sin \theta) dk d\theta \\ &+ K_0^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sec^6 \theta \sin(K_0(x - \xi) \sec \theta) \\ &\times \cos(K_0(y - \eta) \sec^2 \theta \sin \theta) d\theta \Big\} d\xi d\eta \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

$$\begin{aligned} H(-l_W(y), y) &= \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \Gamma(\eta) \left\{ \frac{1}{(y - \eta)^2} \left(-l_W(y) + \sqrt{l_W(y)^2 + (y - \eta)^2} \right) \right. \\ &+ \frac{K_0}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \oint_0^\infty \frac{\sec^4 \theta}{k - K_0 \sec^2 \theta} \cos(-kl_W(y) \cos \theta) \cos(k(y - \eta) \sin \theta) dk d\theta \\ &- K_0 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sec^4 \theta \sin(-K_0 l_W(y) \sec \theta) \\ &\times \cos(K_0(y - \eta) \sec^2 \theta \sin \theta) d\theta \Big\} d\eta \\ &+ \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_{-l_W(\eta)}^0 \mu(\xi, \eta) \left\{ \frac{1}{(y - \eta)^2} \left(1 + \frac{-l_W(y) - \xi}{\sqrt{(-l_W(y) - \xi)^2 + (y - \eta)^2}} \right) \right. \\ &- \frac{K_0}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \oint_0^\infty \frac{k \sec^3 \theta}{k - K_0 \sec^2 \theta} \sin(k(-l_W(y) - \xi) \cos \theta) \cos(k(y - \eta) \sin \theta) dk d\theta \\ &- K_0^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sec^5 \theta \cos(K_0(-l_W(y) - \xi) \sec \theta) \\ &\times \cos(K_0(y - \eta) \sec^2 \theta \sin \theta) d\theta \Big\} d\xi d\eta \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

と表される。

$$\begin{aligned} Q(x, y; \xi, \eta) &\equiv \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{1}{(y - \eta)^2} \left(x - \xi + \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} \right) \right. \\ &+ \frac{K_0}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \oint_0^\infty \frac{\sec^4 \theta}{k - K_0 \sec^2 \theta} \\ &\times \cos(k(x - \xi) \cos \theta) \cos(k(y - \eta) \sin \theta) dk d\theta \\ &- K_0 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sec^4 \theta \sin(K_0(x - \xi) \sec \theta) \\ &\times \cos(K_0(y - \eta) \sec^2 \theta \sin \theta) d\theta \Big\} \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

を定義すれば、 $Q(x, y; \xi, \eta)$ は (ξ, η) の位置に循環強さ 1 の微小馬蹄渦があるときの (x, y) での波高をあらわす。よって Q の ξ についての微分 $Q_\xi(x, y; \xi, \eta)$ は微小渦輪によって生じる波高である。 Q , Q_ξ の x についての微分 $Q_x(x, y; \xi, \eta)$, $Q_{\xi x}(x, y; \xi, \eta)$ はそれぞれ馬蹄渦と微小渦輪によって生じる波の傾斜、すなわち水面での z 方向の流速を表す。このような Q を用いれば、重力影響のあるなしに関わらず、滑走艇の傾きに関する積分方程式と滑走艇の高さに関する積分方程式は統一的に

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x, y) = \int_{-1}^1 Q_x(x, y; 0, \eta) \Gamma(\eta) d\eta$$

$$- \int_{-1}^1 \int_{-l_W(\eta)}^0 Q_{x\xi}(x, y; \xi, \eta) \mu(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (3.2.6)$$

$$H(-l_W(y), y) = \int_{-1}^1 Q(-l_W(y), y; 0, \eta) \Gamma(\eta) d\eta - \int_{-1}^1 \int_{-l_W(\eta)}^0 Q_{\xi}(-l_W(y), y; \xi, \eta) \mu(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (3.2.7)$$

と表される.

(3.2.6), (3.2.7) 式を用いれば, 先に示した汎関数(3.1.15) 式は以下ようになる.

$$\begin{aligned} \Pi[\mu, \bar{\mu}, \Gamma, \bar{\Gamma}, l_W] \equiv & \int_{-1}^1 \int_{-l_W(y)}^0 \left\{ -\bar{\mu}(x, y) \frac{\partial H}{\partial x}(x, y) - \mu(x, y) \frac{\partial H}{\partial x}(x, y) \right\} dx dy \\ & + \int_{-1}^1 \int_{-l_W(y)}^0 \bar{\mu}(x, y) \left\{ \int_{-1}^1 Q_x(x, y; 0, \eta) \Gamma(\eta) d\eta \right. \\ & \quad \left. - \int_{-1}^1 \int_{-l_W(\eta)}^0 Q_{x\xi}(x, y; \xi, \eta) \mu(\xi, \eta) d\xi d\eta \right\} dx dy \\ & + \int_{-1}^1 \left\{ -\bar{\Gamma}(y) H(-l_W(y), y) - \Gamma(y) H(0, y) \right\} dy \\ & + \int_{-1}^1 \bar{\Gamma}(y) \left\{ \int_{-1}^1 Q(-l_W(y), y; 0, \eta) \Gamma(\eta) d\eta \right. \\ & \quad \left. - \int_{-1}^1 \int_{-l_W(\eta)}^0 Q_{\xi}(-l_W(y), y; \xi, \eta) \mu(\xi, \eta) d\xi d\eta \right\} dy \end{aligned}$$

$$\text{制約条件 } \mu(0, y) = \Gamma(y) \quad (3.2.8)$$

汎関数の第1変分をとると以下ようになる.

$$\begin{aligned} \delta \Pi = & \int_{-1}^1 \int_{-l_W(y)}^0 \delta \bar{\mu}(x, y) \left\{ -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y) + \int_{-1}^1 Q_x(x, y; 0, \eta) \Gamma(\eta) d\eta \right. \\ & \quad \left. - \int_{-1}^1 \int_{-l_W(\eta)}^0 Q_{x\xi}(x, y; \xi, \eta) \mu(\xi, \eta) d\xi d\eta \right\} dx dy \\ & + \int_{-1}^1 \delta \bar{\Gamma}(y) \left\{ -H(-l_W(y), y) + \int_{-1}^1 Q(-l_W(y), y; 0, \eta) \Gamma(\eta) d\eta \right. \\ & \quad \left. - \int_{-1}^1 \int_{-l_W(\eta)}^0 Q_{\xi}(-l_W(y), y; \xi, \eta) \mu(\xi, \eta) d\xi d\eta \right\} dy \\ & + \int_{-1}^1 \int_{-l_W(y)}^0 \delta \mu(x, y) \left\{ -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y) + \int_{-1}^1 Q_x(-l_W(\eta), y; x, \eta) \bar{\Gamma}(\eta) d\eta \right. \\ & \quad \left. - \int_{-1}^1 \int_{-l_W(\eta)}^0 Q_{x\xi}(\xi, y; x, \eta) \bar{\mu}(\xi, \eta) d\xi d\eta \right\} dx dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \int_{-1}^1 \delta \Gamma(y) \left\{ -H(0, y) + \int_{-1}^1 Q(-l_W(\eta), y; 0, \eta) \bar{\Gamma}(\eta) d\eta \right. \\ & \quad \left. - \int_{-1}^1 \int_{-l_W(\eta)}^0 Q_{\xi}(\xi, y; 0, \eta) \bar{\mu}(\xi, \eta) d\xi d\eta \right\} dy \\ & + \int_{-1}^1 \delta l_W(y) \left[\mu(-l_W(y), y) \right. \\ & \quad \times \left\{ -\frac{\partial H}{\partial x}(-l_W(y), y) + \int_{-1}^1 Q_x(-l_W(\eta), y; -l_W(y), \eta) \bar{\Gamma}(\eta) d\eta \right. \\ & \quad \left. - \int_{-1}^1 \int_{-l_W(\eta)}^0 Q_{x\xi}(\xi, y; -l_W(y), \eta) \bar{\mu}(\xi, \eta) d\xi d\eta \right\} \\ & \quad \left. - \left\{ \bar{\Gamma}(y) - \bar{\mu}(-l_W(y), y) \right\} \right. \\ & \quad \times \left\{ -\frac{\partial H}{\partial x}(-l_W(y), y) + \int_{-1}^1 Q_x(-l_W(y), y; 0, \eta) \Gamma(\eta) d\eta \right. \\ & \quad \left. \left. - \int_{-1}^1 \int_{-l_W(\eta)}^0 Q_{x\xi}(-l_W(y), y; \xi, \eta) \mu(\xi, \eta) d\xi d\eta \right\} \right] dy \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

第1項目, 変分 $\delta \bar{\mu}$ に対するオイラーの方程式は, 順流れの滑走艇の傾きに関する積分方程式である. 第2項目, $\delta \bar{\Gamma}$ に対するオイラーの方程式は, 順流れの滑走艇の高さに関する積分方程式である.

第3項目, 変分 $\delta \mu$ に対するオイラーの方程式は, 逆流れの滑走艇の傾きに関する積分方程式であり, 第4項目, 変分 $\delta \Gamma$ に対するオイラーの方程式は, 逆流れの滑走艇の高さに関する積分方程式である.

第5項目, 変分 δl_W に対するオイラーの方程式は, スプレールートラインが渦線となる関係, および逆流れのKuttaの条件である.

このように重力のあるなしに関わらず, 本論で示した滑走艇の未定浸水面を求める変分原理が成立し, 汎関数 Π が停留するとき満たすべき積分方程式(3.2.6), (3.2.7) 式をともに満足する.

3.3 3章のまとめ

第3章では第2章で示した, 満たすべき2つの未定境界の積分方程式を変分直接法によって解くために, その基となる新たな変分原理を示した. 結論は以下の通りである.

1. 浸水面を既知とする問題に対しては、従来から Flax の変分原理と別所の変分原理が知られていた。未定浸水面問題に対する展望を得るために、この2つの変分原理について調べ、逆流れを含めることが重要であることがわかった。

これらの原理は船底圧力を変関数としており、船底圧力のスプレールートライン上での特異性のために、未定境界問題を解決する手段とはなり得ないことがわかった。

2. 渦線関数を用いれば、船底圧力の特異性に伴う問題を解決できる。さらに渦線関数の滑走艇後縁での値は、スプレー条件を課した上でさらに、Kutta の条件を課す余裕を持たせるために、渦線関数とは独立な循環分布として扱い、方程式に自由度を持たせることが重要であることを示した。

3. 渦線関数と循環分布、未定浸水長分布を独立とし、さらに随伴変分原理となるように逆流れの渦線関数と循環分布を加えて、Kutta の条件を制約条件とする汎関数を示した。

オイラーの方程式が満たすべき滑走艇の傾きに関する積分方程式と滑走艇の高さに関する積分方程式となり、当初の目的が達せられたことを示した。

さらに、随伴変分原理であるため、逆流れに対する積分方程式もオイラーの方程式となり、また未定浸水長の変分に対するオイラーの方程式は、スプレールートラインが渦線となる関係、および逆流れの Kutta の条件に相当する式であることを示した。

4. 本論で示した変分原理が重力影響のあるなしに関わらず成り立つことを示した。

第4章 変分原理による滑走板の浸水面の決定

この章では、前章で示した滑走艇の未定浸水面を求めるための変分原理を用いて具体的に滑走板の浸水面形状を求める。重力の影響を無視する場合については、高アスペクト比の滑走板の浸水面形状が求められている¹³⁾から、この結果と比較し変分原理による解法の有効性を確認する。さらに重力の影響を考慮に入れた場合の滑走板の浸水面を求める。また細長滑走板の浸水面について、変分原理を用いる解法の指針を示す。

4.1 重力影響を無視した高アスペクト比滑走板の浸水面

本論で示した変分原理 (3.1.15) 式は、線形理論の範囲内ではすべての条件を満足する。既に述べたように変分直接法の観点からは、どのような近似に基づいた試験関数を用いても、その程度に応じた解が得られる。一方、汎関数自身も何ら厳密に計算する必要はなく、まだ若干の近似を行える余裕がある。

本節では、汎関数 (3.1.15) 式に高アスペクト比近似を施せば、どのような近似積分方程式が得られるかについて調べ、さらにどのような試験関数を用いるのが適当か考える。

汎関数 (3.1.15) に表れた項は、 $\partial\phi/\partial z|_{z=0}$ 、 $h(-l_W(y), y)$ とそれらの随伴流れに対応する項から成り立っている。 $\partial\phi/\partial z|_{z=0}$ に対応する (3.1.15) 式第2項は

$$\begin{aligned} \frac{\partial\phi}{\partial z}(x, y, 0) &= \frac{1}{4\pi} \oint_{-1}^1 \frac{\Gamma(\eta)}{(y-\eta)^2} \left\{ 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + (y-\eta)^2}} \right\} d\eta \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \oint_{-1}^1 \int_{-l_W(\eta)}^0 \frac{\mu(\xi, \eta)}{\{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\}^{\frac{3}{2}}} d\xi d\eta \\ &\approx -\frac{1}{2\pi} \Gamma(y) \frac{1}{x} + \frac{1}{2\pi} \oint_{-l_W(y)}^0 \mu(\xi, y) \frac{d\xi}{(x-\xi)^2} + \frac{1}{4} \oint_{-1}^1 \frac{\Gamma(\eta)}{(y-\eta)^2} d\eta \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

と近似でき、同様に $h(-l_W(y), y)$ に対応する (3.1.15) 式第4項は

$$\begin{aligned} h(-l_W(y), y) &= \frac{1}{4\pi} \oint_{-1}^1 \frac{\Gamma(\eta)}{(y-\eta)^2} \left\{ -l_W(y) + \sqrt{l_W(y)^2 + (y-\eta)^2} \right\} d\eta \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \oint_{-1}^1 \int_{-l_W(\eta)}^0 \frac{\mu(\xi, \eta)}{(y-\eta)^2} d\xi d\eta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \left\{ 1 + \frac{-l_W(y) - \xi}{\sqrt{(-l_W(y) - \xi)^2 + (y - \eta)^2}} \right\} d\xi d\eta \\ & \approx -\frac{\Gamma(y)}{2\pi} \log |l_W(y)| - \frac{\Gamma(y)}{2\pi} (1 - \log 2) \\ & + \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma(\eta)}{|y - \eta|} d\eta - \frac{1}{2\pi} \int_{-l_W(y)}^0 \frac{\mu(\xi, y)}{-l_W(y) - \xi} d\xi \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

と近似できる.

(4.1.1) 式は書きかえると

$$\frac{\partial \phi}{\partial z}(x, y, 0) \approx -\frac{1}{2\pi} \oint_{-l_W(y)}^0 \frac{2p_0(\xi, y)}{x - \xi} d\xi + \frac{1}{4\pi} \oint_{-1}^1 \frac{\Gamma(\eta)}{y - \eta} d\eta \quad (4.1.3)$$

となる. 第1項は y 断面を2次元的に見たときの向上き誘導速度であり, 第2項は後曳き渦による吹き下し効果を表すから, (4.1.1) 式はPrandtlの揚力線理論と同等の近似である.

(4.1.2) 式も同様に書きかえると

$$\begin{aligned} h(-l_W(y), y) & \approx -\frac{1}{2\pi} \int_{-l_W(y)}^0 2p_0(\xi, \eta) \log |-l_W(y) - \xi| d\xi \\ & - \frac{\Gamma(y)}{2\pi} (1 - \log 2) + \frac{1}{4\pi} \oint_{-1}^1 \frac{\Gamma(\eta)}{|y - \eta|} d\eta \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

となり, 第1項, 第2項は2次元波高, 第3項は後曳き渦による影響を表す.

このような近似を行えば, 汎関数の近似, Π_a は

$$\begin{aligned} \Pi_a[\mu, \bar{\mu}, \Gamma, \bar{\Gamma}, l_W] & \equiv \int_{-1}^1 \int_{-l_W(y)}^0 \left\{ -\bar{\mu}(x, y) \frac{\partial H}{\partial x}(x, y) - \mu(x, y) \frac{\partial H}{\partial x}(x, y) \right\} dx dy \\ & + \int_{-1}^1 \int_{-l_W(y)}^0 \bar{\mu}(x, y) \left\{ -\frac{1}{2\pi} \Gamma(y) \frac{1}{x} + \frac{1}{2\pi} \oint_{-l_W(y)}^0 \mu(\xi, y) \frac{d\xi}{(x - \xi)^2} \right\} dx dy \\ & + \int_{-1}^1 \left\{ -\bar{\Gamma}(y) H(-l_W(y), y) - \Gamma(y) H(0, y) \right\} dy \\ & + \int_{-1}^1 \bar{\Gamma}(y) \left\{ -\frac{\Gamma(y)}{2\pi} \log |l_W(y)| - \frac{\Gamma(y)}{2\pi} (1 - \log 2) \right. \\ & \left. - \frac{1}{2\pi} \int_{-l_W(y)}^0 \frac{\mu(\xi, y)}{-l_W(y) - \xi} d\xi + \frac{1}{4\pi} \oint_{-1}^1 \frac{\Gamma(\eta)}{|y - \eta|} d\eta \right\} dy \end{aligned}$$

$$\text{制約条件 } \mu(0, y) = \Gamma(y) \quad (4.1.5)$$

となる. 本来のPrandtlの揚力線理論では(4.1.3)式のように吹き下しの影響が考慮されるが, 波高に後曳き渦が考慮されているので省略した.

これまで μ と Γ を独立として扱ってきたが, 物理的な観点から考えれば, Kuttaの条件は滑走板の後端で μ が Γ に等しくなることであり, 2次元特性が顕著に表れることを考え, μ は

$$\mu(x, y) \equiv \Gamma(y) \mu^*(x) \quad (4.1.6)$$

のように表すことができるとし, 変数 x を

$$x \equiv l_W(y) x^* \quad (4.1.7)$$

と変換する.

試験関数は既に述べたように, 制約条件を満足する限り, どのような関数を用いても, その程度に応じた停留解が得られる. ここでは汎関数の核が2次元要素の強い近似をしたので, 試験関数として以下に示す, Birnbaum級数が適当であると考えられる.

$$2p_0(\xi, y) = a_1 \sqrt{\frac{-\xi}{1+\xi}} + a_2 \sqrt{-\xi(\xi+1)} + a_3 \xi \sqrt{-\xi(\xi+1)} + a_3 \xi^2 \sqrt{-\xi(\xi+1)} + \dots \quad (4.1.8)$$

本論の例はすべて平板の滑走艇を考えているため, 初項だけ取り出し

$$\begin{aligned} \mu^*(x^*) & = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{x^*} \sqrt{\frac{-\xi}{1+\xi}} d\xi \\ \bar{\mu}^*(x^*) & = \frac{2}{\pi} \int_{x^*}^0 \sqrt{\frac{1+\xi}{-\xi}} d\xi \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

と選ぶことにする. 被積分関数は2次元平板翼に対する線形圧力分布を意味する. このように与えたので

$$\mu(0, y) = \Gamma(y) \quad (4.1.10)$$

$$\bar{\mu}(-l_W(y), y) = \bar{\Gamma}(y) \quad (4.1.11)$$

となり, 順流れ, 逆流れに対してKuttaの条件を課したことになる.

このとき, 近似汎関数, Π_a は $\Gamma, \bar{\Gamma}, l_W$ を独立な変関数として, 次のようになる.

$$\begin{aligned} \Pi_a[\Gamma, \bar{\Gamma}, l_W] & \equiv \int_{-b}^b \int_{-1}^0 l_W(y) \left\{ -\bar{\Gamma}(y) \bar{\mu}^*(x^*) \frac{\partial H}{\partial x}(x^*, y) - \Gamma(y) \mu^*(x^*) \frac{\partial H}{\partial x}(x^*, y) \right\} dx^* dy \\ & + \int_{-b}^b \int_{-1}^0 \bar{\Gamma}(y) \bar{\mu}^*(x^*) \left\{ -\frac{\Gamma(y)}{2\pi} \frac{1}{x^*} + \frac{\Gamma(y)}{2\pi} \oint_{-1}^0 \frac{\mu^*(\xi^*)}{(x^* - \xi^*)^2} d\xi^* \right\} dx^* dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{-b}^b \left\{ -\bar{\Gamma}(y) H(-l_W(y), y) - \Gamma(y) H(0, y) \right\} dy \\
& + \int_{-b}^b \bar{\Gamma}(y) \left\{ -\frac{\Gamma(y)}{2\pi} \log |l_W(y)| - \frac{\Gamma(y)}{2\pi} (1 - \log 2) \right. \\
& \left. + \frac{1}{4\pi} \int_{-b}^b \Gamma(\eta) \frac{d\eta}{|y-\eta|} + \frac{\Gamma(y)}{2\pi} \int_{-1}^0 \frac{\mu^*(\xi^*)}{1+\xi^*} d\xi^* \right\} dy
\end{aligned} \quad (4.1.12)$$

平板を考えているから

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x, y) = -\tau : \text{const.} \quad (4.1.13)$$

$$H(0, y) = H_0 : \text{const.} \quad (4.1.14)$$

$$H(-l_W(y), y) = H_0 + \tau l_W(y) \quad (4.1.15)$$

$$l_R(y) = l_R : \text{const.} \quad (4.1.16)$$

であり, (4.1.9) 式の実際の形を代入すると, 汎関数 Π_a の第1変分は以下のようになる.

$$\begin{aligned}
\delta \Pi_a = & \int_{-b}^b \delta \bar{\Gamma}(y) \left[\frac{3}{4\pi} \{ \pi \tau l_W(y) - \Gamma(y) \} \right. \\
& + \left\{ -H_0 - \tau l_W(y) - \frac{\Gamma(y)}{2\pi} \log |l_W(y)| \right. \\
& \left. + \frac{3\Gamma(y)}{2\pi} \log 2 + \frac{1}{4\pi} \int_{-b}^b \frac{\Gamma(\eta)}{|y-\eta|} d\eta \right\} dy \\
& + \int_{-b}^b \delta \Gamma(y) \left[\frac{3}{4\pi} \{ \pi \tau l_W(y) - \bar{\Gamma}(y) \} \right. \\
& + \left\{ -H_0 - \frac{\bar{\Gamma}(y)}{2\pi} \log |l_W(y)| + \frac{3\bar{\Gamma}(y)}{2\pi} \log 2 + \frac{1}{4\pi} \int_{-b}^b \frac{\bar{\Gamma}(\eta)}{|y-\eta|} d\eta \right\} dy \\
& \left. + \int_{-b}^b \delta l_W(y) \left[\frac{3\tau}{4} \Gamma(y) - \frac{\tau}{4} \left\{ 1 + 2 \frac{\Gamma(y)}{\pi \tau l_W(y)} \right\} \bar{\Gamma}(y) \right] dy \right]
\end{aligned} \quad (4.1.17)$$

$\Gamma, \bar{\Gamma}, l_W$ を独立に扱う限り, 必ずしも有用な方程式は得られないが, その片鱗を見出すことができる. 実際, (4.1.17) 式の $\delta \bar{\Gamma}(y)$ に関する変分の項 (第1項) の内, 第1項目は滑走板の浸水長と Γ を規定する関係, 第2項目は滑走板の高さに関する積分方程式である. 同様のことは $\delta \Gamma(y)$ に関する変分の項についても見られる.

(4.1.17) 式の変分が実質的な意味を持つよう Γ と l_W を独立に扱うことを止め,

$$\Gamma(y) = \pi \tau l_W(y) \quad (4.1.18)$$

すなわち, 2次元平板翼に対する翼弦長と循環の関係で拘束する. これは μ^* を (4.1.9) 式のように与えたときの, 滑走板の傾きに関する積分方程式の解である. $\delta \bar{\Gamma}(y)$ に関する変分 (右辺第1項) が0であるとき以下の積分方程式を満足する.

$$H_0 + \tau l_W(y) = -\frac{\Gamma(y)}{2\pi} \log |l_W(y)| + \frac{3\Gamma(y)}{2\pi} \log 2 + \frac{1}{4\pi} \int_{-b}^b \frac{\Gamma(\eta)}{|y-\eta|} d\eta \quad (4.1.19)$$

これは

$$H_0 = \frac{\Gamma(y)}{2\pi} \log \frac{2}{|l_W(y)|} - \frac{\Gamma(y)}{\pi} (1 - \log 2) + \frac{1}{4\pi} \int_{-b}^b \frac{\Gamma(\eta)}{|y-\eta|} d\eta \quad (4.1.20)$$

とも書ける. これは松村ら¹³⁾が摂動論的に厳密な解析で示した積分方程式に他ならず, スプレールートライン上で波高と滑走板の高さが一致する条件である. これにより, 本論でおこなってきた近似が妥当なものであったことが分かる.

一方, 逆流れに対しても $\bar{\Gamma}$ と l_W を滑走艇の傾きに関する積分方程式を満足する関係, すなわち

$$\bar{\Gamma}(y) = \pi \tau l_W(y) \quad (4.1.21)$$

で拘束すると, $\delta \Gamma(y)$ に関する変分 (右辺第2項) が0であるとき以下の積分方程式を満足する.

$$H_0 = -\frac{\Gamma(y)}{2\pi} \log |l_W(y)| + \frac{3\Gamma(y)}{2\pi} \log 2 + \frac{1}{4\pi} \int_{-b}^b \frac{\Gamma(\eta)}{|y-\eta|} d\eta \quad (4.1.22)$$

これは, 逆流れに対する滑走艇の高さに関する積分方程式である. ただ Γ と $\bar{\Gamma}$ は同値としているから, (4.1.19) と (4.1.22) を同時に満足することはないと考えられる. 先に逆流れの存在に対しての疑問を示したが, これを見る限り少なくとも順流れと同じ浸水面を持ち, Kuttaの条件を満足するような逆流れは存在しないと考えられる. それでも, Γ と l_W を (4.2.25) 式で拘束したとき, 汎関数 Π_a の $\bar{\Gamma}$ に関する変分, すなわち $\partial \Pi_a / \partial \bar{\Gamma}$ が0となるときの $l_W(y)$ が求めるスプレールートラインの形状である. このようなことは, 滑走艇の高さに関する積分方程式を, 逆流れの循環 $\bar{\Gamma}$ を重み関数とした重率残差法であると解釈すれば問題ない. 実際, 随伴変分原理ではこのような意味があることが知られている.

松村らは (4.1.20) 式を解いて解を得ているが, 変分原理によればはるかに簡単に, かつ本来持つべき性質が損なわれない近似解が得られることを示す. 近似汎関数 (4.1.12) 式は l_W と Γ の関係を拘束したので l_W のみの関数となっている. ここでは, 例えば単純に

$$l_W(y) = l_{W_0} \sqrt{1 - y^2} \quad (4.1.23)$$

を用いてみることにする.

$$\Gamma(y) = \pi \tau l_W(y) \quad (4.1.24)$$

と拘束しているから, $\partial \Pi_a / \partial \bar{\Gamma}$ が 0 となる関係は

$$\frac{\partial \Pi_a}{\partial \bar{\Gamma}} = \tau \left\{ -\frac{1}{3}(7 - 10 \log 2) l_{W_0} - \frac{2}{3} l_{W_0} \log(l_{W_0}) - \frac{1}{2} \pi \frac{H_0}{\tau} \right\} = 0 \quad (4.1.25)$$

となる. τ は 0 ではないと考えているから, $\partial \Pi_a / \partial \bar{\Gamma}$ が 0 となる l_{W_0} は H_0 / τ のみに依存する. H_0 / τ は滑走板の静止時水線の座標 ($-l_R$) を表すので, 滑走板の静止時の浸水長が同じであればスプレールラインの形状はトリムには依存しない.

$\partial \Pi_a / \partial \bar{\Gamma}$ には l_{W_0} に関する対数非線形項が含まれるため, 0 となる点に多様性を生じさせる. $l_{W_0} < 0$ となることは物理的にありえないので, $l_{W_0} > 0$ に限って考える. 解の性質を見るために $\partial \Pi_a / \partial \bar{\Gamma}$ を図示すると Fig.5 のようになる. 浸水長 l_W に対して $\partial \Pi_a / \partial \bar{\Gamma}$ を置点しているの, それが 0 となる点が実際の浸水長である. この点は, 静止時浸水長 l_R に対し以下の 3 つの場合に分けられる.

i) $l_R < 0$ の場合 (滑走板の後端の高さが静水面より下にある場合)

$\partial \Pi_a / \partial \bar{\Gamma}$ が 0 となる点は 1 つ.

ii) $-0.15 < l_R < 0$ の場合 (滑走板の後端の高さが静水面よりも上にある場合)

$\partial \Pi_a / \partial \bar{\Gamma}$ が 0 となる点は 2 つ.

iii) $l_R < -0.15$ の場合 (滑走板の後端の高さが静水面よりも上にある場合)

$\partial \Pi_a / \partial \bar{\Gamma}$ は $l_{W_0} > 0$ に 0 となる点を持たない.

l_R と l_{W_0} の関係を図示すると Fig.6 のようになる.

松村らは¹³⁾ 滑走板の浸水面は滑走板の後端高さが静水面より下にある場合は 1 つ, 滑走板の後端高さが静水面より上にある場合は 2 つの解があり, 後者の場合, 解を持つためには滑走板の後端の高さには限界があることを示したが, 本論で示した汎関数は, 非常に簡単な試験関数を用いているにも関わらず, このような性質を失っていない.

このことは, 重力影響を考慮し数値的にも解くことが困難になる場合にも, 変分原理による解法は方程式の性質を反映した解を導くことを期待させる.

計算によって得られた浸水面形状を示す. Fig.7 は松村らの計算結果との比較である. 解の形を楕円分布と仮定しているため, 滑走板の側端で松村らの計算結果のように浸水長が有限値をとるような挙動は示さないが, その違いを除けば, 両者はよく一致している.

実験結果を Fig.8 に示す. これは全幅 800[mm] のアクリル製の滑走板を $U_\infty = 3.0[m/s]$ ($Fn_b = 1.515$), $\tau = 6^\circ$ で曳引したときの浸水面形状である. なお, 図中の数値は滑走板の半幅で無次元化したものである. 実験で滑走板が接水する限界の高さは $l_R = -0.07$ に相当し, 計算で求めた値, $l_R = -0.150$ に近い値をとる. しかし, 浸水面は実験値に比べ 2 倍程度大きく見積もられている. この原因は重力の影響を考慮していないことが考えられる. 重力の影響は滑走板の近傍での局所波を低減する効果があると考えられ, それに伴って浸水面の減少が見込まれる.

4.2 重力影響を考慮した高アスペクト比滑走板の浸水面

前節で重力を無視したときの滑走艇の未定浸水面を変分原理を用いて求め, 簡単な試験関数を用いても, 満たすべき積分方程式の良い近似解が得られることを示した. 本節では, さらに重力の影響を含めて計算を行うことを試みる. 汎関数は重力影響を含めると, 複雑になるため, 近似なしに計算することは困難である. 重力影響に対する知見を得るために, 前節で行った高アスペクト比近似を施すことにする.

高アスペクト比近似は, 2 次元翼断面内流れを考え, それに吹き下しの影響, 波高の後曳き渦による補正を行うことである.

重力影響を考慮した場合, 2 次元翼断面内流れに対応する流れは, 2 次元滑走艇まわりの流れである. 2 次元の場合, 重力を考慮しなければ, 遠方では波高の対数的下降を生じ, 基準水面を決められなくなるが, 別所¹⁴⁾によれば重力を考慮した 2 次元滑走艇, あるいは単なる渦糸による波流れは, 無限前方で波高が 0 となる (radiation condition) 条件を課すことができ, 波高の対数的特異性は消える. また, 船体後方に生成される波長は b よりも, むしろ l_W に依存して変化するから, 前節で重力を無視したときに表れた, 波高の $\log |l_W|$ の項にフルード数の影響が入り込むことが予測できる. このように, 重力影響を考慮し, かつ高アスペクト比近似を行うことは, 浸水面形状に及ぼす重力影響を知る上で重要な意味を持つ.

前節で示した同じ論法をここでも適用する. 2次元断面内流れは別所¹⁴⁾によれば

$$\frac{\partial \phi}{\partial z}(x) = \frac{\Gamma}{2\pi} \left\{ -\frac{1}{x} + K_0 S_S(K_0 x) \right\} + \frac{1}{2\pi} \int_{-l_W}^0 \left\{ \frac{1}{(\xi - x)^2} + K_0^2 S_C(K_0(x - \xi)) \right\} \mu(\xi) d\xi \quad (4.2.1)$$

$$h(-l_W) = \frac{\Gamma}{2\pi} S_C(-K_0 l) + \frac{1}{2\pi} \int_{-l_W}^0 \left\{ -\frac{1}{-l_W - \xi} + K_0 S_S(K_0(-l_W - \xi)) \right\} \mu(\xi) d\xi \quad (4.2.2)$$

と表される. ここに

$$S(K_0 Z) \equiv \int_0^\infty \frac{1}{k - K_0} \exp[-ikZ] dk \quad (4.2.3)$$

$$S(K_0 x) \equiv S_C(K_0 x) + iS_S(K_0 x) \quad (4.2.4)$$

と定義されており, $S(K_0 Z)$ は原点に $\Gamma = 2\pi$ の強さの渦糸がある場合の複素ポテンシャルを表している. S_S と S_C を図示すると Fig.9 のようになる.

高アスペクト比近似と2次元流れが直接的に結びつくと考えることができるのであれば, S_C の $x = \infty$ での挙動は, 3次元の意味でも横波であり, 3次元流れの近似としては発散波は無視できると考えるのが自然である. このような観点から, $\partial \phi / \partial z|_{z=0}$ 及び $h(-l_W(y), y)$ を見直すと

$$\frac{\partial \phi}{\partial z}(x, y, 0) = -\frac{\Gamma}{2\pi} \int_{-1}^1 \int_{-l_W(\eta)}^\infty Q_{x\xi}(x, y; \xi, \eta) \mu(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (4.2.5)$$

$$h(-l_W(y), y) = -\frac{\Gamma}{2\pi} \int_{-1}^1 \int_{-l_W(\eta)}^\infty Q_\xi(-l_W(y), y; \xi, \eta) \mu(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (4.2.6)$$

と書き表されるから, 2次元流れを導くには, η に関する積分区間を $[-\infty, \infty]$ とする必要がある. しかし, このような近似は3次元性を完全に無視することになる. そこで

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial z}(x, y, 0) &= -\frac{\Gamma}{2\pi} \int_{-1}^1 \int_{-l_W(\eta)}^\infty Q_{x\xi}(x, y; \xi, \eta) \mu(\xi, \eta) d\xi d\eta \\ &= -\frac{\Gamma}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \int_{-l_W(\eta)}^\infty Q_{x\xi}(x, y; \xi, \eta) \mu(\xi, \eta) d\xi d\eta \\ &\quad + \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \int_{-1}^{y-\delta} \Gamma(\eta) Q_x(x, y, 0, \eta) d\eta - \Gamma(y) \int_{-\infty}^{y-\delta} Q_x(x, y, 0, \eta) d\eta \right. \\ &\quad \left. + \int_{y+\delta}^1 \Gamma(\eta) Q_x(x, y, 0, \eta) d\eta - \Gamma(y) \int_{-\infty}^{y-\delta} Q_x(x, y, 0, \eta) d\eta \right\} \quad (4.2.7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(-l_W(y), y) &= -\frac{\Gamma}{2\pi} \int_{-1}^1 \int_{-l_W(\eta)}^\infty Q_\xi(-l_W(y), y; \xi, \eta) \mu(\xi, \eta) d\xi d\eta \\ &= -\frac{\Gamma}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \int_{-l_W(\eta)}^\infty Q_\xi(-l_W(y), y; \xi, \eta) \mu(\xi, \eta) d\xi d\eta \\ &\quad + \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \int_{-1}^{y-\delta} \Gamma(\eta) Q(-l_W(y), y, 0, \eta) d\eta \right. \\ &\quad \left. - \Gamma(y) \int_{-\infty}^{y-\delta} Q(-l_W(y), y, 0, \eta) d\eta \right. \\ &\quad \left. + \int_{y+\delta}^1 \Gamma(\eta) Q(-l_W(y), y, 0, \eta) d\eta \right. \\ &\quad \left. - \Gamma(y) \int_{-\infty}^{y-\delta} Q(-l_W(y), y, 0, \eta) d\eta \right\} \quad (4.2.8) \end{aligned}$$

とすれば, 極限をとる部分は

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^1 \Gamma(\eta) Q(-l_W(y), y, 0, \eta) d\eta \\ &\equiv \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \int_{-1}^{y-\delta} \Gamma(\eta) Q(-l_W(y), y, 0, \eta) d\eta - \Gamma(y) \int_{-\infty}^{y-\delta} Q(-l_W(y), y, 0, \eta) d\eta \right. \\ &\quad \left. + \int_{y+\delta}^1 \Gamma(\eta) Q(-l_W(y), y, 0, \eta) d\eta - \Gamma(y) \int_{-\infty}^{y-\delta} Q(-l_W(y), y, 0, \eta) d\eta \right\} \quad (4.2.9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^1 \Gamma(\eta) Q_x(x, y, 0, \eta) d\eta \\ &\equiv \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \int_{-1}^{y-\delta} \Gamma(\eta) Q_x(x, y, 0, \eta) d\eta - \Gamma(y) \int_{-\infty}^{y-\delta} Q_x(x, y, 0, \eta) d\eta \right. \\ &\quad \left. + \int_{y+\delta}^1 \Gamma(\eta) Q_x(x, y, 0, \eta) d\eta - \Gamma(y) \int_{-\infty}^{y-\delta} Q_x(x, y, 0, \eta) d\eta \right\} \quad (4.2.10) \end{aligned}$$

のように発散積分の有限部分をとることを意味し, これらの項は, 本来の3次元性の影響と, 2次元流れと近似してしまったことによる補償部分を表している.

ここには高次項が含まれるからこれを展開し, 吹き下しと発散波を無視することにする. (4.2.7), (4.2.8) 式の近似は以下ようになる.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial z}(x, y, 0) &\approx \frac{\Gamma(y)}{2\pi} \left\{ -\frac{1}{x} + K_0 S_S(K_0 x) \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-l(y)}^0 \left\{ \frac{1}{(x - \xi)^2} - K_0^2 S_C(K_0(x - \xi)) \right\} \mu(\xi, y) d\xi \quad (4.2.11) \end{aligned}$$

$$h(-l_W(y), y) \approx \frac{\Gamma(y)}{2\pi} S_C(-K_0 l(y))$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2\pi} \int_{-l(y)}^0 \left\{ -\frac{1}{-l_W(y) - \xi} + K_0 S_S(K_0(-l_W(y) - \xi)) \right\} \mu(\xi, y) d\xi \\
& + \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma(\eta)}{|y - \eta|} d\eta
\end{aligned} \quad (4.2.12)$$

$\partial\phi/\partial z$ はdown washを無視したために2次元流れの式となっているが, $h(-l_W(y), y)$ には第3項に3次元性の寄与を表す項が残っている. この項は重力影響を無視した場合にも現れていた項である.

$K_0 \ll 1$ とすれば最終的に(4.2.7), (4.2.8)式は以下のように近似できる.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\phi}{\partial z}(x, y, 0) & \approx -\frac{\Gamma(y)}{2\pi} \left(\frac{1}{x} + \frac{\pi}{2} K_0 \right) \\
& + \frac{1}{2\pi} \int_{-l_W(y)}^0 \frac{\mu(\xi, y)}{(x - \xi)^2} d\xi - \frac{K_0}{2} \mu(x, y)
\end{aligned} \quad (4.2.13)$$

$$\begin{aligned}
h(-l_W(y), y) & \approx -\frac{\Gamma(y)}{2\pi} (\log(K_0 l_W(y)) + \gamma) - \frac{1}{2\pi} \int_{-l_W(y)}^0 \frac{\mu(\xi, y)}{-l_W(y) - \xi} d\xi \\
& + \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma(\eta)}{|y - \eta|} d\eta \\
& \gamma: \text{Euler's constant}
\end{aligned} \quad (4.2.14)$$

重力のない場合との違いは, 最低次の項について言えば h の $\log(l_W(y))$ が $\log(K_0 l_W(y))$ に変わり, 当初の予測に合致した結果を得る. 一方, $\partial\phi/\partial z|_{z=0}$ には $O(K_0)$ まで取り入れている. これは摂動論的には高次項であり, 無視されるところである. しかし, 変分原理の立場からはある程度の近似の自由が許され, それが変分原理の利点でもあるので, 後で述べるように実験とのよい対応を得るために, ここでは $O(K_0)$ まで取った.

これらを用いると近似汎関数 Π_a は以下ようになる.

$$\begin{aligned}
\Pi_a[\mu, \bar{\mu}, \Gamma, \bar{\Gamma}, l_W] & \equiv \int_{-1}^1 \int_{-l_W(y)}^0 \left\{ -\bar{\mu}(x, y) \frac{\partial H}{\partial x}(x, y) - \mu(x, y) \frac{\partial H}{\partial x}(x, y) \right\} dx dy \\
& + \int_{-1}^1 \int_{-l_W(y)}^0 \bar{\mu}(x, y) \left\{ -\frac{\Gamma(y)}{2\pi} \left(\frac{1}{x} + \frac{\pi}{2} K_0 \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2\pi} \int_{-l_W(y)}^0 \frac{\mu(\xi, y)}{(x - \xi)^2} d\xi - \frac{K_0}{2} \mu(x, y) \right\} dx dy \\
& + \int_{-1}^1 \left\{ -\bar{\Gamma}(y) H(-l_W(y), y) - \Gamma(y) H(0, y) \right\} dy \\
& + \int_{-1}^1 \bar{\Gamma}(y) \left\{ -\frac{\Gamma(y)}{2\pi} (\log(K_0 l_W(y)) + \gamma) \right.
\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{-l_W(y)}^0 \frac{\mu(\xi, y)}{-l_W(y) - \xi} d\xi + \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma(\eta)}{|y - \eta|} d\eta \Big\} dy$$

$$\text{制約条件 } \mu(0, y) = \Gamma(y) \quad (4.2.15)$$

滑走平板を対象としているので,

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x, y) = -\tau : \text{const.} \quad (4.2.16)$$

$$H(0, y) = H_0 : \text{const.} \quad (4.2.17)$$

$$H(-l(y), y) = H_0 + \tau l(y) \quad (4.2.18)$$

$$l_R(y) = l_R : \text{const.} \quad (4.2.19)$$

である.

ここで, $x \equiv l(y)x^*$ と変数変換し, 試験関数を以下のように与える.

$$\begin{aligned}
\mu(l(y)x^*, y) & \equiv \frac{2\Gamma(y)}{\pi} \mu^*(x^*) \\
& = \frac{2\Gamma(y)}{\pi} \int_{-1}^{x^*} \sqrt{\frac{-\xi}{1+\xi}} d\xi
\end{aligned} \quad (4.2.20)$$

$$\begin{aligned}
\bar{\mu}(l(y)x^*, y) & \equiv \frac{2\bar{\mu}(0, y)}{\pi} \bar{\mu}^*(x^*) \\
& = \frac{2\bar{\mu}(0, y)}{\pi} \int_{x^*}^0 \sqrt{\frac{1+\xi}{-\xi}} d\xi
\end{aligned} \quad (4.2.21)$$

$$\Gamma(y) = \Gamma_0 \sqrt{1 - y^2} \quad (4.2.22)$$

$$\bar{\mu}(0, y) = \bar{\mu}_0 \sqrt{1 - y^2} \quad (4.2.23)$$

$$l_W(y) = l_{W0} \sqrt{1 - y^2} \quad (4.2.24)$$

これは $\mu, \bar{\mu}$ に2次元平板翼の解の形を与えるものであり, 順流れに対しては $\mu(0, y) = \Gamma(y)$ となるから Kutta の条件を課したことになる.

汎関数 Π_a の変分 $\delta\bar{\mu}$ に対するオイラーの方程式は, 滑走艇の傾きに関する積分方程式であるから, $\partial\Pi_a/\partial\bar{\mu} = 0$ となる関係で Γ と l_W を拘束する.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\Pi_a}{\partial\bar{\mu}} & = \int_{-1}^1 \int_{-1}^0 l_0(1 - y^2) \bar{\mu}^*(x^*) \\
& \times \left\{ \tau - \frac{\Gamma_0}{\pi l_{W0}} - K_0 \Gamma_0 \sqrt{1 - y^2} \left(\frac{1}{4} + \frac{\mu^*(x^*)}{\pi} \right) \right\} dx^* dy \\
& = 0
\end{aligned} \quad (4.2.25)$$

を要求するから

$$\Gamma_0 = \frac{\pi \tau l_{W0}}{1 + K_0 l_{W0} a} \quad (4.2.26)$$

ただし

$$a = \frac{9\pi^2}{128} + \frac{3}{4} \int_{-1}^0 \mu^*(x^*) \bar{\mu}^*(x^*) dx^* \quad (4.2.27)$$

でなければならない。\$K_0 = 0\$ のときには、\$\Gamma_0 = \pi \tau l_{W0}\$ となり、重力を無視したときの解に一致する。

(4.2.25) 式の関係で \$\Gamma\$ と \$l_W\$ を拘束すれば、汎関数 \$\Pi_a\$ の変分 \$\delta \bar{\Gamma}\$ に対するオイラーの方程式は滑走艇の高さに関する積分方程式であるから、\$\partial \Pi_a / \partial \bar{\Gamma} = 0\$ であるとき、満たすべき積分方程式をともに満足する。したがって求めるべき浸水面は以下の関係によって定まる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_a}{\partial \bar{\Gamma}} &= \frac{\tau}{K_0} \left\{ \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{Fn_r^2} \right) - \frac{4}{3} \left(\frac{1}{Fn^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\frac{1}{Fn^2}}{1 + \frac{1}{Fn^2} a} \left(-\frac{2}{3} \log \left(\frac{1}{Fn^2} \right) + \frac{8}{3} \log 2 - \frac{2}{3} \gamma - \frac{1}{3} \right) \right\} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.2.28)$$

式中 \$Fn_r\$ は静止時の滑走板の浸水長ベースのフルード数を、\$Fn\$ は航走時の滑走板のセンターラインでの浸水長ベースのフルード数を表し、以下のように定義される。

$$Fn_r^2 \equiv \frac{U_\infty^2}{gl_R} \quad (4.2.29)$$

$$Fn^2 \equiv \frac{U_\infty^2}{gl_{W0}} \quad (4.2.30)$$

なお滑走板が静水面より上に設定されている場合、静止時浸水長を負と定義しているため、\$Fn_r^2 < 0\$ となる。(4.2.28) 式は既知の \$Fn_r^2\$ に対し未知の \$Fn^2\$ が求められることを表すから、トリム \$\tau\$ に関わらず、静止時の浸水長ベースのフルード数が同じ滑走板は、航走時の浸水長ベースのフルード数が同じになるような浸水面をとる。

\$\partial \Pi_a / \partial \bar{\Gamma}\$ と \$Fn^2\$ の関係を Fig.10 に示す。\$\partial \Pi_a / \partial \bar{\Gamma}\$ が 0 となる点は、静止時の浸水長ベースのフルード数に対し以下ようになる。

- i) \$1/Fn_r^2 > 0\$ の場合 (滑走板の後端の高さが静水面より下にある場合)
\$\partial \Pi_a / \partial \bar{\Gamma}\$ が 0 となる点は 1 つ。

- ii) \$-0.06 < 1/Fn_r^2 < 0\$ の場合 (滑走板の後端の高さが静水面よりも上にある場合)

\$\partial \Pi_a / \partial \bar{\Gamma}\$ が 0 となる点は 2 つ。

- iii) \$1/Fn_r^2 < -0.06\$ の場合 (滑走板の後端の高さが静水面よりも上にある場合)

\$\partial \Pi_a / \partial \bar{\Gamma}\$ が 0 となる点はない。

これは求められる浸水面の解は、滑走板の後端高さが静水面より下に設定された場合には 1 つ、静水面より上に設定された場合には 2 つあり、後端がある高さ以上に設定された滑走板は滑走状態に入れないことを意味する。この解の性質は重力の影響を無視したときの高アスペクト比滑走板の場合と同じである。

Fig.10 に \$Fn_r\$ と \$Fn\$ の関係を示す。滑走板が滑走するための設定限界高さは滑走板の前進速度によってことなるが、静止時浸水長ベースのフルード数 \$Fn_r\$ に対して

$$\frac{1}{Fn_r^2} = -0.06 \quad (4.2.31)$$

となる。これは実験によって得た結果

$$\frac{1}{Fn_r^2} = -0.03 \quad (4.2.32)$$

に近い値をとる

得られた浸水面形状を重力の影響を無視したときの結果と比較したものを Fig.12 に、実験結果と比較したものを Fig.13 に示す。浸水面は実験値の高々 1.5 倍の範囲に収まり、重力の影響を無視した場合に比べ本論の結果は実験結果にかなり近づくことが分かる。

4.3 細長滑走艇の浸水面

これまで、アスペクト比の大きい滑走艇を取扱ってきたが、細長滑走艇について調べてみる。重力の影響は無視することにする。

細長滑走艇を取扱う上でまず考えられる方法は細長体近似である。しかし、細長体近似は前方の流場の影響を後方に伝えるのみで、後方の影響を前方には反映できない近似である。言い換えると船首で初期値を与えると船尾までの流れが定まってしまう初期値問題の形式となり、決して船首と船尾の両方で条件を課せる境界値問題とはなっていない。Kutta の条件は船尾 (トランサムスターン) で滑らかな流れの流出を期待して課されるが、

この条件は、細長体理論にとっては後方の境界条件となるため、そのような条件は課せない。

2次元翼理論では、Kuttaの条件を課すことで、後端での影響を及ぼす効果を有するが、摂動論的観点からは、細長体理論におけるKuttaの条件は、むしろトランスムスターン近傍の流場にだけ影響を及ぼす役割を持つと考えられる。細長体理論は、横断面内流れを2次元的に取扱えるという最大の利点を持つ。この両者の意味で、通常、Kuttaの条件をはずして船尾部を除いた細長体の主要部の流れを解くという態度がとられる。

しかし、本論で示してきた変分原理はKuttaの条件を制約条件としており、渦線関数 μ とは独立して循環 Γ を必ず求める必要がある。したがってKuttaの条件を課せないような近似を汎関数に施せなくなる。

横断面内流れを厳密に2次元的に扱うという意味では細長体近似とは必ずしも呼べないが、揚力面理論に解決手段を見出すことができる。細長揚力面理論の特徴は、幅方向に一定強さの渦糸を配置することであり、このことで揚力面積分方程式を簡略化している。Bollayの積分方程式では流出渦を主流方向には流さず、ある程度の非線形性を備えているが、上述の扱いであることに違いはない。Bollayの積分方程式のような非線形効果を持たせることはできないが、細長揚力面近似の本質を

- i) 滑走艇の幅方向に一定強さの渦糸を配置する。
- ii) 滑走艇のセンターライン上で、物体表面条件をあわせる。

ことと考えれば、本論の汎関数を近似でき、高アスペクト比近似とは異なった有用な結論を得るに違いない。上述の近似は、本論では

- i) $\mu(x, y)$ は x のみの関数
- ii) 汎関数に含まれる y に 0 を代入すること

を意味する。

未定浸水面が長方形と考え、単純に幅方向に一定強さの馬蹄渦を1本だけ配置することを考える。Fig.14に示すように滑走板の揚力中心と考えられる先端から1/4浸水長の位置に置く。渦線関数 μ の値はその場所までに生じた渦の総和であるから、そのような配置に対する μ は、Fig.15に示すような滑走板の先端から1/4浸水長の位置にステップを有するステップ関数となる。このような翼理論的な考えに基づいた渦線関数を試験関数に用いる

と、逆流れの渦線関数 $\bar{\mu}$ の試験関数は μ と前後対称な形で与えることになる。 $\bar{\mu}$ のステップは3/4浸水長の位置にあり、Weisingerの考えとよく似た試験関数の組みと考えられる。順流れに対してはKuttaの条件を課し、循環 Γ は μ の滑走板後端での値に等しいとする。逆流れに対してはKuttaの条件を課さず $\bar{\mu}$ と $\bar{\Gamma}$ は独立として扱う。

汎関数 Π 、(3.1.15)式の計算については、第2項の被積分関数は $(x, y) = (-1/4l_w, 0)$ での値を全積分範囲で用い、第4項の被積分関数は $(x, y) = (-l_w, 0)$ での値を全積分範囲で用いることにする。滑走板の浸水長 l_w が1より十分大きいと仮定しているので汎関数 Π の近似 Π_a は以下ようになる。

$$\begin{aligned} \Pi_a[\Gamma, \bar{\mu}, \bar{\Gamma}, l_w] = & \frac{3}{2}\tau l_w \Gamma + \frac{3}{2}\tau l_w \bar{\mu} \\ & + \frac{3}{2}l_w \bar{\mu} \left(-\frac{\Gamma}{\pi} \right) \\ & - 2\bar{\Gamma}(H_0 + \tau l_w) - 2\Gamma H_0 \\ & + 2\bar{\Gamma} \left(\frac{\Gamma}{\pi l_w} \right) \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

順流れに対してあらかじめKuttaの条件を課したため、 μ と Γ は独立でなくなり、汎関数の変関数は $\Gamma, \bar{\mu}, \bar{\Gamma}, l$ の4つになる。

この近似汎関数が停留するとき、以下の方程式が満足されなければならない。

$$0 = \frac{\partial \Pi_a}{\partial \bar{\mu}} = \frac{3}{2}l_w \left(\tau - \frac{\Gamma}{\pi} \right) \quad (4.3.2)$$

$$0 = \frac{\partial \Pi_a}{\partial \bar{\Gamma}} = -2 \left(H_0 + \tau l_w - \frac{\Gamma}{\pi l_w} \right) \quad (4.3.3)$$

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial \Pi_a}{\partial \Gamma} = & \frac{3}{2}l_w \left(\tau - \frac{\bar{\mu}}{\pi} \right) \\ & - 2 \left(H_0 - \frac{\bar{\Gamma}}{\pi l_w} \right) \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial \Pi_a}{\partial l_w} = & \frac{3}{2}\tau(\Gamma + \bar{\Gamma}) - \frac{3}{2}\frac{\bar{\mu}\Gamma}{\pi} \\ & - 2\tau\bar{\Gamma} - \frac{2\Gamma\bar{\Gamma}}{\pi l_w^2} \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

(4.3.2), (4.3.3)から順流れの循環 Γ と浸水長 l_w は

$$\Gamma = \pi\tau \quad (4.3.6)$$

$$l_w = \frac{-H_0 + \sqrt{H_0^2 + 4\tau^2}}{2\tau} \quad (4.3.7)$$

と求まる。 l_w は静止時浸水長 l_R を用いて

$$l_W = \frac{l_R + \sqrt{l_R^2 + 4}}{2} \quad (4.3.8)$$

とも書けるから浸水長はトリム τ には依存しない。航走時の浸水長 l_W と静止時の浸水長 l_R の関係をFig.16に示す。小松ら²³⁾の解説書によれば、アスペクト比が1よりも小さい場合、滑走板の航走時浸水長 l_W と静止時浸水長 l_R に対して、経験的に

$$l_W = l_R + 0.6 \quad (4.3.9)$$

の関係があるとされている。両者を比較すると、計算によって得られる浸水長は経験式によるものより若干小さくなるが、定性的な傾向はよく一致する。

これに対し、停留条件から求まる逆流れの渦線関数 $\bar{\mu}$ と循環 $\bar{\Gamma}$ は $l_R \gg 1$ のとき以下のようになってしまう。

$$\bar{\mu} = \frac{7}{3}\pi\tau \quad (4.3.10)$$

$$\bar{\Gamma} = -4\pi\tau \quad (4.3.11)$$

これらは逆流れに対するKuttaの条件を満足していない。順流れと同じ浸水面を持ち、Kuttaの条件を満足する逆流れはやはり存在しないと考えられる。

以上のように、細長体に対しても、本論で示した変分原理が滑走艇の未定浸水面を求め上で有効であることが言える。

4.4 4章のまとめ

4章では3章で示した滑走艇の浸水面形状を定めるための変分原理を用い、具体的に滑走板の浸水面形状を求めた。結論は以下の通りである。

1. 重力影響を無視した場合の汎関数に対し、高アスペクト比近似を施し、その近似汎関数のオイラーの方程式として、松村らが示した浸水長分布に関する積分方程式が得られることを示した。もう1つのオイラーの方程式として、逆流れの浸水長分布に関する積分方程式が得られるが、両者は両立し得ないことがわかった。そこで逆流れに物理的な意味合いを持たせず、逆流れの循環分布 $\bar{\Gamma}$ を重み関数と位置づけ、重率残差法と考えれば、問題なく順流れを解き得ることを示した。

2. 浸水面形状を単純な関数で表し、停留解を求めたところ、簡単な代数計算にも関わらず、満たすべき積分方程式の解とよく一致し、解の定性的な性質もなんら損なわれていないことがわかった。しかし、重力影響を無視した計算は実験結果との対応が悪く、実験結果より2倍程度大きく浸水面を見積もる。
3. 重力影響が滑走艇の浸水面に与える影響を調べるために、重力影響を考慮した汎関数に対して、重力影響を無視したときと同じ観点で高アスペクト比近似を行った。重力影響を無視したときと同じ試験関数を選び、浸水面形状を求めたところ、重力影響を考慮した場合は、静止時浸水長ベースのフルード数が同じ滑走板は、航走時のセンターラインでの浸水長ベースのフルード数が同じになるような浸水面をとるという関係があることがわかった。
5. 浸水面は静水面より下に設定された滑走板に対しては1つの解が、静水面より上に設定された滑走板に対しては2つの解が得られ、さらにある高さ以上に設定された滑走板は滑走状態に入れないことがわかった。これは重力の影響を無視したときの高アスペクト比滑走板の性質と同じである。変分原理を用いて得た結果は浸水面形状、滑走板の設定限界高さ共に重力影響を無視した場合に比べ、実験結果に近い値をとる。
6. 細長体を取扱う上での汎関数の近似の仕方について考察した。Kuttaの条件を課することができない細長体近似は不適當であるが、Bollayの積分方程式のような細長揚力面理論にならい、滑走艇の幅方向に一定強さの渦糸をおくような近似を行えば、汎関数はその特性を損なうことなく、単純な形で表すことができる。停留条件から得られる浸水面は実験から得られる経験式に見合った結果を得た。

第5章 自由航走状態の性能

これまでに変分原理を用いて拘束状態にある滑走板の未定浸水面と滑走板に働く圧力が求められた。拘束状態での流場が確定したので、自由航走時の滑走艇の浸水面と航走姿勢、および船体に働く抵抗を求める。代表船型として、最も単純な箱船を選ぶ。

5.1 自由航走時の浸水面と航走姿勢

箱船は、全幅 $2b$ 、重量 W とし、静止時にはトリム τ_s 、無次元浸水長 l_s で浮かんでいたとする。無次元重量 w と無次元重心 x_G は、重量分布とは無関係に以下のように与えられる。

$$w \equiv \frac{W}{\rho g b^3} = \tau_s l_s^2 \quad (5.1.1)$$

$$x_G = -\frac{1}{3} l_s \quad (5.1.2)$$

一方、拘束状態での揚力係数 C_L と揚力中心 ($-x_C$) は

$$\begin{aligned} C_L &\equiv \frac{\text{Lift}}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2 b^2} \\ &= \int_{-1}^1 \Gamma(y) dy \end{aligned} \quad (5.1.3)$$

$$x_C = -\frac{\int_{-1}^1 \Gamma(y) \frac{3}{4} l_W(y) dy}{C_L} \quad (5.1.4)$$

となる。滑走艇の場合、翼とは異なり底面のみに圧力が働いているから、揚力は半分になっている。 x_C の分子は滑走艇に働く後端まわりのモーメントである。

前章で変分をとる際に用いた試験関数を用い

$$l_W(y) = l_{W0} \sqrt{1-y^2} \quad (5.1.5)$$

$$\Gamma(y) = \Gamma_0 \sqrt{1-y^2} \quad (5.1.6)$$

とすると、この時

$$C_L = \frac{\pi}{2} \Gamma_0 \quad (5.1.7)$$

$$x_C = -\frac{2}{\pi} l_{W0} \quad (5.1.8)$$

となる。これは、浸水長分布と循環分布を上述のような楕円分布と仮定したためであり、試験関数が異なれば係数も異なる。

滑走状態では、重量と揚力は釣り合い、重心と揚力中心は等しいから

$$\frac{l_s \tau_s}{Fn_s^2} = \frac{\pi}{4} \Gamma_0 \quad (5.1.9)$$

$$-\frac{1}{3} l_s = -\frac{2}{\pi} l_{W0} \quad (5.1.10)$$

となる。ここに、 Fn_s は静止状態での浸水長 l_s に基づくフルード数である。

重心と揚力中心が等しいという関係から

$$\frac{l_{W0}}{l_s} = \frac{\pi}{6} \quad (5.1.11)$$

となり、浸水長分布を楕円分布と仮定した場合、自由航走時のセンターラインでの浸水長は、常に静止状態での浸水長 l_s の $\pi/6$ 倍になる。

一方、(4.2.26) 式より

$$\Gamma_0 = \frac{\pi \tau l_{W0}}{1 + K_0 l_{W0} a} \quad (5.1.12)$$

である。 a は浸水長分布と循環分布を楕円分布と仮定した場合、(4.2.27) 式で与えられ、およそ $a = 1.66$ である。 a は μ の試験関数の選び方によっても異なる。力の釣り合い式(5.1.9)に(5.1.11)の関係を用いると、

$$\frac{\tau}{\tau_s} = \left(\frac{24 + \frac{4\pi a}{Fn_s^2}}{\pi^3} \right) \frac{1}{Fn_s^2} \quad (5.1.13)$$

を得、静止状態でのトリムと航走時のトリムの関係が分かる。この関係を図示すると、Fig.17 のようになる。フルード数が小さいところでは激しい船尾トリムとなり、フルード数が大きくなると、ほぼ水平に近い状態で滑走するという結果となる。これは、滑走艇には一般的に見られる現象である。

船体に働く抵抗は船底圧力の抵抗成分であるから、抵抗係数は

$$\begin{aligned} C_D &\equiv \frac{\text{Drag}}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 b^2} \\ &= \tau \int_{-1}^1 \Gamma(y) dy \end{aligned} \quad (5.1.14)$$

となる。したがって

$$C_D = \frac{\pi^3 \tau^2}{2} \frac{l_s}{6 + \frac{a}{Fn_s^2}} \quad (5.1.15)$$

となる。すべての量を静止時の量で表すと

$$C_D = \frac{1}{2\pi^3} \frac{l_s}{6 + \frac{a}{Fn_s^2}} \left(24 + \frac{4\pi a}{Fn_s^2} \right)^2 \frac{\tau_s^2}{Fn_s^2} \quad (5.1.16)$$

となる。この関係を図示すると Fig.18 のようになる。

箱船という特殊な船型を選び、かつ浸水面形状に乏しい試験関数を用いた結果であるが、試験関数に工夫を加えれば、実用上も適用可能と考えられる。この意味で実用上の基礎的結果を得たと考える。

5.2 5章のまとめ

5章では、本論で示した変分原理を用いて確定した拘束状態にある滑走板の浸水面形状と、滑走板の底面圧力分布を用いて、自由航走状態にある滑走艇の浸水面ならびに航走姿勢を求めた。

代表的な船型として、単純な箱船を選び、船体重量と重心位置を与えて自由航走時の状態を求めた。自由航走時の浸水面、航走姿勢、ならびに抵抗係数はいずれもフルード数の簡明な式で表すことができた。浸水面形状を楕円分布と仮定した場合、自由航走時のセンターラインでの浸水長は、常に静止時浸水長の $\pi/6$ 倍となる。航走時のトリムは、フルード数が小さい場合は激しい船尾トリムとなるが、フルード数が大きくなるとほぼ水平で航走する。これは、一般的な滑走艇に見られる現象をよく表している。

第6章 結言

滑走艇まわりの流れを知る上で重要なことは、航走時の浸水面があらかじめ定められないという未定浸水面問題を解決することである。本論は未知の浸水面を求める問題に対する変分原理を見出し、その問題を変分直接法により解くことを試みたものである。本論で得た結論をまとめると以下のようになる。

1. 滑走艇まわりの流場が、2つの未定境界の積分方程式を連立させて解くことによって定められることを示した。
2. 満たすべき、2つの未定境界の積分方程式をオイラーの方程式とする変分原理を見出すことを試みた。これに先立ち、従来から知られていた浸水面が既知の問題に対する2つの変分原理について、その特性を論じ、随伴流れを含めることが重要であるという結論を得た。しかし、船底圧力を未知とするこれらの原理は、船底圧力の浸水面前縁での特異性のために、未定境界問題を解決する手段とはなり得ないことを示した。それに代わって、渦線関数と循環分布の2つを変関数とすることにすれば、上述の問題点を解決することができ、実際に新たな変分原理を示した上で、オイラーの方程式が満たすべき2つの積分方程式となることを示した。
3. 本論で示した変分原理を用いて、変分直接法により、実際に浸水面を求める方法を示した。まず、重力影響を無視し、高アスペクト比滑走板の浸水面形状を求めた。変分直接法による解は、簡単な計算によって得られるにも関わらず、満たすべき積分方程式を解いた解とよく一致し、持つべき解の性質も損なわれないことが分かった。さらに重力影響を考慮に入れた結果は、重力影響を無視した場合に比べて実験値とのよい一致を示した。また、フルード数と浸水面の簡明な関係を得た。
4. 本論で示した変分原理を用いて、自由航走時の滑走艇の浸水面形状、航走姿勢、ならびに艇に働く抵抗を求めた。変分原理を用いれば、いずれの量もフルード数の簡明な式で与えられることを示した。

参考文献

- 1) 丸尾 孟 : 高速艇の流体力学(その1), 日本造船学会推進性能研究委員会 高速艇研究特別委員会シンポジウム” 高速艇と性能”(1989)
- 2) 鈴木 勝雄 : 高速艇の流体力学(その2), 日本造船学会推進性能研究委員会 高速艇研究特別委員会シンポジウム” 高速艇と性能”(1989)
- 3) Savitsky,D. : Hydrodynamic Design of Planing Hulls, Marine Technology, Vol.1, No.1(1964)
- 4) Savitsky,D. : Planing Hulls Status of Hydrodynamic Technology as Related to Model Tests, 16th ITTC High Speed Vessel Panel(1981)
- 5) Savitsky,D. and Brown, P.W. : Procedures for Hydrodynamic Evaluation of Planing Hulls in Smooth and Rough Water, Marine Technology, Vol.13, No.4(1976)
- 6) 丸尾 孟 : 滑走艇の流体力学的研究(第1報), 造船協会論文集, 第91号(1956)
- 7) 丸尾 孟 : 滑走艇の流体力学的研究(第2報), 造船協会論文集, 第92号(1957)
- 8) 鈴木 勝雄, 大迫 義谷 : 2次元滑走板の姿勢変化について—その1: 理論の展開—, 防衛大学校理工学研究報告, 24巻, 3号(1987)
- 9) Wagner, H : Über Stoss - und Gleitvorgänge an der Oberfläche von Flüssigkeiten, Z. Angew. Math.Mech.12(1932)
- 10) 松村 清重, 黒龍 英之 : 滑走板船首部のスプレー現象を伴う流場について, 日本造船学会論文集, 第174号(1993)
- 11) 平野 進, 内田 雄, 姫野 洋司 : 柱状滑走体の底面圧力分布の計測, 関西造船協会誌, 第213号(1990)
- 12) 平野 進, 稲津 晶平, 姫野 洋司 : 柱状滑走体の spray の観測, 関西造船協会誌, 第214号(1990)
- 13) 松村 清重, 水谷 友基 : 高アスペクト比近似に基づく定式化による滑走板の未定浸水面形状の決定, 日本造船学会論文集, 第179号(1996)
- 14) 別所 正利 : 定常滑走板の理論に関する一考察, 西部造船会会報, 第54号(1977)
- 15) Flax, A.H: General Reverse Flow and Variational Theorems in Lifting-Surface Theory, J. Aero. Sci. , Vol. 19, No.6(1952)
- 16) Bessho, M. , Nomura, K. : A Contrubution to the Theory of Two-Dimensional Hydro-Planing, Memories of the Defense Academy, Japan, Vol.10, No.1,(1970)
- 17) 花岡 達郎 : 定常造波抵抗理論の基礎問題, 造船協会論文集, 第90号(1956)
- 18) Maruo,H. : High-and Low-Aspect Ratio Approximation of Planing Surfaces, Schiffstechnik, Bd.14(1967)
- 19) 一色 浩 : 造波問題における変分法的取り扱い, 日本造船学会, 第2回耐航性に関するシンポジウム(1977)
- 20) B.A.フィンレイソン(鷲津 久一郎, 山本 善之, 川井 忠彦 共訳) : 重みつき残差法と変分原理, 培風館(1974)
- 21) 花岡 達郎: プロペラの基礎理論(特に Munk の定理と揚力線理論について), 船舶技術研究所報告, 第5巻, 第6号(1969)
- 22) Tuck,E.O. : Low-aspect-ratio flat ship theory, J.Hydronautics, Vol.9, No.1(1975)
- 23) 小松 正彦, 山口 眞裕 : 高速艇の推進性能, 日本造船学会推進性能研究委員会 高速艇研究特別委員会シンポジウム” 高速艇と性能”(1989)
- 24) Wu,T.Y. : A Singular Perturbation Theory for Nonlinear Free Surface Flow Problems, I.S.P., Vol.14(1967)

- 25) Ting, L., Keller, J.B. : Planing of a Flat Plate at High Froude Number, Phys. Fluids, Vol.15, No.6(1974)
- 26) Shen, Y.T., Ogilvie, T.F. : Nonlinear Hydrodynamic Theory for Finite-Span Planing Surface, J.S.R., Vol.16(1972)
- 27) 勝井 辰博, 松村 清重, 鈴木 敏夫 : 滑走艇の未定浸水面問題に関する変分原理について, 日本造船学会論文集, 第187号(1998)
- 28) 勝井 辰博, 松村 清重, 濱口 茂久, 鈴木 敏夫 : 変分原理を用いた細長滑走艇の未定浸水面の決定法について, 関西造船協会誌, 第230号(1998)
- 29) 勝井 辰博, 松村 清重 : 重力影響を考慮した滑走艇の未定浸水面問題に関する変分原理について, 関西造船協会誌, 第231号(1999)

付録A 速度ポテンシャルの表示

第2章の第2節で示した, 滑走艇まわりの流れの速度ポテンシャルの導出仮定を示す. 速度ポテンシャル ϕ の支配方程式は,

$$\begin{cases} [L] & \nabla^2 \phi = 0 \\ [F] & \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + K_0 \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \text{on free surface} \\ [R] & \nabla \phi \rightarrow 0 \quad \text{as } x \rightarrow -\infty \end{cases} \quad (\text{A.0.1})$$

である.

$$\phi_P \equiv \phi(\mathbf{x}) \quad (\text{A.0.2})$$

としたとき, 任意関数 G^* に対し, グリーンの公式

$$\begin{aligned} & \int_V \{ G_{PQ}^* \nabla_P^2 \phi_P - \phi_P \nabla_P^2 G_{PQ}^* \} dV \\ &= \int_{S_R} \left\{ G_{RQ}^* \frac{\partial \phi_R}{\partial n_R} - \phi_R \frac{\partial G_{RQ}^*}{\partial n_R} \right\} dS \end{aligned} \quad (\text{A.0.3})$$

が成り立つ. 添字の R は境界における値を表す.

ϕ の自由表面条件が陽に表れるように(A.0.3)式を変形する. 自由表面を S_F , 浸水面を S_B , 無限遠を S_∞ とし, 浸水面の内側の境界を C_{B_i} , 外側の境界を C_{B_e} , 自由表面の無限遠での境界を C_∞ とすると, (A.0.3)式は

$$\begin{aligned} & \int_V \{ G_{PQ}^* \nabla_P^2 \phi_P - \phi_P \nabla_P^2 G_{PQ}^* \} dV \\ &= \frac{1}{K_0} \int_{S_B+S_F} \left\{ G_{RQ}^* \left(\frac{\partial^2 \phi_R}{\partial x_R^2} + K_0 \frac{\partial \phi_R}{\partial z_R} \right) - \phi_R \left(\frac{\partial^2 G_{RQ}^*}{\partial x_R^2} + K_0 \frac{\partial G_{RQ}^*}{\partial z_R} \right) \right\} dS \\ & - \frac{1}{K_0} \int_{S_B+S_F} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ G_{RQ}^* \frac{\partial \phi_R}{\partial x_R} - \phi_R \frac{\partial G_{RQ}^*}{\partial x_R} \right\} dS \\ & + \int_{S_\infty} \left\{ G_{RQ}^* \frac{\partial \phi_R}{\partial n_R} - \phi_R \frac{\partial G_{RQ}^*}{\partial n_R} \right\} dS \end{aligned} \quad (\text{A.0.4})$$

と表される.

左辺第1項は ϕ がラプラスの式を満足するから0である. 左辺が ϕ_Q となるためには,

$$\nabla^2 G_{PQ}^* = -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_Q) \quad (\text{A.0.5})$$

が要求される.

(A.0.4) 式の右边を見ると, ϕ は自由表面 S_F では, 自由表面条件

$$\frac{\partial^2 \phi_R}{\partial x_R^2} + K_0 \frac{\partial \phi_R}{\partial z_R} = 0 \quad (\text{A.0.6})$$

を満足し, 浸水面 S_B では

$$\frac{\partial^2 \phi_R}{\partial x_R^2} + K_0 \frac{\partial \phi_R}{\partial z_R} = -\frac{\partial p_R}{\partial x_R} \quad (\text{A.0.7})$$

の関係があるから, (A.0.4) 式で ϕ を陽に表すためには, まず右边第1項の2番目の項が S_F と S_B で0とならなければならない.

$$\frac{\partial^2 G_{RQ}^*}{\partial x_R^2} + K_0 \frac{\partial G_{RQ}^*}{\partial z_R} = 0 \quad \text{on } z = 0 \quad (\text{A.0.8})$$

が要求される. さらに右边第2項は

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{K_0} \int_{S_B+S_F} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ G_{RQ}^* \frac{\partial \phi_R}{\partial x_R} - \phi_R \frac{\partial G_{RQ}^*}{\partial x_R} \right\} dS \\ & = -\frac{1}{K_0} \oint_{C_{B_i}} \left\{ G_{RQ}^* \frac{\partial \phi_R}{\partial x_R} - \phi_R \frac{\partial G_{RQ}^*}{\partial x_R} \right\} dl \\ & \quad + \frac{1}{K_0} \oint_{C_{B_e}} \left\{ G_{RQ}^* \frac{\partial \phi_R}{\partial x_R} - \phi_R \frac{\partial G_{RQ}^*}{\partial x_R} \right\} dl \\ & \quad - \frac{1}{K_0} \oint_{C_{B_\infty}} \left\{ G_{RQ}^* \frac{\partial \phi_R}{\partial x_R} - \phi_R \frac{\partial G_{RQ}^*}{\partial x_R} \right\} dl \end{aligned} \quad (\text{A.0.9})$$

と変形できる.

$$\nabla \phi \rightarrow 0 \quad \text{as } x \rightarrow -\infty \quad (\text{A.0.10})$$

であるから, $x \rightarrow +\infty$ のとき波が発生し, $\phi \rightarrow O(1/\sqrt{x})$ となる. C_∞ での線積分項が疑問なく0となるためには,

$$\nabla G_{RQ}^* \rightarrow 0 \quad \text{as } x \rightarrow \infty \quad (\text{A.0.11})$$

となることが要求される.

(A.0.4) 式右边第3項については, S_∞ で速度ポテンシャル ϕ はダブレット挙動をするから, その積分は0である.

以上のように G^* が

$$\begin{cases} \nabla^2 G_{PQ}^* = -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_Q) \\ \frac{\partial^2 G_{RQ}^*}{\partial x_R^2} + K_0 \frac{\partial G_{RQ}^*}{\partial z_R} = 0 \quad \text{on } z = 0 \\ \nabla G_{RQ}^* \rightarrow 0 \quad \text{as } x \rightarrow \infty \end{cases} \quad (\text{A.0.12})$$

を満たすとすれば, グリーンの公式は

$$\begin{aligned} 4\pi\phi_Q &= \frac{1}{K_0} \int_{S_B} G_{RQ}^* \left(-\frac{\partial p_R}{\partial x_R} \right) dS \\ &\quad - \frac{1}{K_0} \oint_{C_{B_i}} \left\{ G_{RQ}^* \frac{\partial \phi_R}{\partial x_R} - \phi_R \frac{\partial G_{RQ}^*}{\partial x_R} \right\} dl \\ &\quad + \frac{1}{K_0} \oint_{C_{B_e}} \left\{ G_{RQ}^* \frac{\partial \phi_R}{\partial x_R} - \phi_R \frac{\partial G_{RQ}^*}{\partial x_R} \right\} dl \end{aligned} \quad (\text{A.0.13})$$

となる. G^* は境界 C_{B_i} , C_{B_e} で連続であるから, $\phi \partial\phi/\partial x$ が同じ値をとると仮定すれば

$$4\pi\phi_Q = \frac{1}{K_0} \int_{S_B} G_{RQ}^* \left(-\frac{\partial p_R}{\partial x_R} \right) dS \quad (\text{A.0.14})$$

となる. 船底圧力が浸水面の前後縁で0になると考えれば, 部分積分によって,

$$4\pi\phi_Q = \frac{1}{K_0} \int_{S_B} \frac{\partial G_{RQ}^*}{\partial x_R} p_R dS \quad (\text{A.0.15})$$

を得る. これにより, ϕ を船底圧力と G^* を用いて, 陽に表すことができた.

ϕ と G^* の満たすべき条件の違いは ϕ が, 無限前方で波なしであるのに対し, G^* は無限後方で波なしとなることである. これは, 一様流の方向が逆であるイメージを抱かせる. G^* は本論で示した随伴変分原理の逆流れを表す量に相当し, 随伴グリーン関数と呼ばれる.

ϕ は物理的イメージに見合った表現, 変分原理で言えば, 順流れによる表現が可能である.

$$\begin{cases} \nabla^2 G_{P\bar{Q}} = -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_Q) \\ \frac{\partial^2 G_{P\bar{Q}}}{\partial x_R^2} + K_0 \frac{\partial G_{P\bar{Q}}}{\partial z_R} = 0 \quad \text{on } z = 0 \\ \nabla G_{P\bar{Q}} \rightarrow 0 \quad \text{as } x \rightarrow -\infty \end{cases} \quad (\text{A.0.16})$$

の, ϕ と同じ条件を満足する $G_{P\bar{Q}}$ を, ϕ_P の代りに (A.0.4) に代入すれば, 右边は G と G^* の境界条件から0となり,

$$G_{Q\bar{Q}} = G_{\bar{Q}Q}^* \quad (\text{A.0.17})$$

の関係を得る。両者は単に変数を入れ換えただけであり、随伴変分原理における順流れと逆流の関係と同じである。\$G\$はグリーン関数と呼ばれる。

\$G\$を用いれば、速度ポテンシャル\$\phi\$は

$$4\pi\phi_P = \frac{1}{K_0} \int_{S_B} \frac{\partial G_{PR}}{\partial x_R} p_R dS \quad (A.0.18)$$

と表され、船体表面の特異点分布で表現される。

$$x_P \equiv (x, y, z)$$

$$x_R \equiv (\xi, \eta, \zeta)$$

とすれば、所要の条件を満足するグリーン関数\$G\$は

$$\begin{aligned} G = & \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}} \\ & - \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z+\zeta)^2}} \\ & - \frac{2K_0}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sec^2 \theta d\theta \\ & \times \oint_0^\infty \frac{\exp[k(z+\zeta)]}{k - K_0 \sec^2 \theta} \cos\{k(x-\xi)\cos\theta\} \cos\{k(y-\eta)\sin\theta\} dk \\ & + 2K_0 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \exp[K_0(z+\zeta)\sec^2\theta] \\ & \times \sin\{K_0(x-\xi)\sec\theta\} \cos\{K_0(y-\eta)\sec^2\theta \cdot \sin\theta\} \sec^2\theta d\theta \end{aligned} \quad (A.0.19)$$

となる。

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial G}{\partial \xi} \right|_{\zeta=0} = & - \frac{2K_0}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \oint_0^\infty \frac{ke^{kz}\sec\theta}{k - K_0 \sec^2 \theta} \\ & \times \sin\{k(x-\xi)\cos\theta\} \cos\{k(y-\eta)\sin\theta\} d\theta \\ & - 2K_0^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{K_0 z \sec^2 \theta} \sec^3 \theta \\ & \times \cos\{K_0(x-\xi)\sec\theta\} \cos\{K_0(y-\eta)\sec^2\theta \cdot \sin\theta\} d\theta \end{aligned} \quad (A.0.20)$$

であるから、(A.0.18)より、速度ポテンシャルは

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z) = & \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_{-l_W(y)}^0 2p_0(\xi, \eta) \\ & \times \left[-\frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \oint_0^\infty \frac{ke^{kz}\sec\theta}{k - K_0 \sec^2 \theta} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \sin\{k(x-\xi)\cos\theta\} \cos\{k(y-\eta)\sin\theta\} dk d\theta \\ & - K_0 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{K_0 z \sec^2 \theta} \sec^3 \theta \\ & \times \cos\{K_0(x-\xi)\sec\theta\} \cos\{K_0(y-\eta)\sec^2\theta \cdot \sin\theta\} d\theta \Big] d\xi d\eta \end{aligned} \quad (A.0.21)$$

となる。

重力を無視した場合には、速度ポテンシャルは

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z) = & \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_{-l_W(\eta)}^0 2p_0(\xi, \eta) \\ & \times \left\{ \frac{z}{(y-\eta)^2 + z^2} \left(1 + \frac{x-\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2}} \right) \right\} d\xi d\eta \end{aligned} \quad (A.0.22)$$

と書け、これは積分表示に直すと

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z) = & -\frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_{-l_W(\eta)}^0 2p_0(\xi, \eta) \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty e^{kz} \sec\theta \right. \\ & \times \sin\{k(x-\xi)\cos\theta\} \cos\{k(y-\eta)\sin\theta\} dk d\theta \Big] d\xi d\eta \end{aligned} \quad (A.0.23)$$

となる。したがって、速度ポテンシャルは重力影響によらない部分と重力影響を表す部分に分離された形で

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z) = & \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_{-l_W(\eta)}^0 2p_0(\xi, \eta) \left\{ \frac{z}{(y-\eta)^2 + z^2} \left(1 + \frac{x-\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2}} \right) \right. \\ & - \frac{K_0}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \oint_0^\infty \frac{e^{kz}\sec^3\theta}{k - K_0 \sec^2 \theta} \sin(k(x-\xi)\cos\theta) \cos(k(y-\eta)\sin\theta) dk d\theta \\ & - K_0 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{K_0 z \sec^2 \theta} \sec^3 \theta \cos(K_0(x-\xi)\sec\theta) \\ & \times \cos(K_0(y-\eta)\sec^2\theta \sin\theta) d\theta \Big\} d\xi d\eta \end{aligned} \quad (A.0.24)$$

と表すことができ、(2.2.7)式の結果を得る。

付録B 重力影響を無視したときの高アスペクト比近似

第4章の第1節の(4.1.1), (4.1.2)式で示した, 重力影響を無視した場合の滑走艇底面での z 方向の流速, $\partial\phi/\partial z|_{z=0}$ とスプレールートライン上での波高, $h(-l_W(y), y)$ の高アスペクト比近似について述べる. 重力影響を無視したときの滑走艇底面での z 方向の流速 $\partial\phi/\partial z|_{z=0}$ は

$$\begin{aligned} \frac{\partial\phi}{\partial z}(x, y, 0) = & \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma(\eta)}{(y-\eta)^2} \left\{ 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + (y-\eta)^2}} \right\} d\eta \\ & + \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_{-l_W(\eta)}^0 \frac{\mu(\xi, \eta)}{\{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\}^{\frac{3}{2}}} d\xi d\eta \end{aligned} \quad (\text{B.0.1})$$

である. 高アスペクト比の滑走艇を考えているので, 浸水長は1に比べて十分小さい. そこで

$$x \equiv \varepsilon \tilde{x}, \quad \xi \equiv \varepsilon \tilde{\xi}, \quad l_W \equiv \varepsilon \tilde{l}_W \quad (\text{B.0.2})$$

と変数変換し, $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限を考える. η の積分区間を $[-1, y-\delta]$, $[y-\delta, y+\delta]$, $[y+\delta, 1]$ の3つに分ける. パラメタの大小は

$$\varepsilon \ll \delta \ll 1 \quad (\text{B.0.3})$$

とする. (B.0.1)式の第1項を I_1 , 第2項を I_2 とおくと I_1 は

$$\begin{aligned} I_1 = & \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^{y-\delta} \frac{\Gamma(\eta)}{(y-\eta)^2} \left\{ 1 + \frac{\varepsilon \tilde{x}}{y-\eta} + O(\varepsilon^3) \right\} d\eta \\ & + \frac{1}{4\pi} \int_{y+\delta}^1 \frac{\Gamma(\eta)}{(y-\eta)^2} \left\{ 1 + \frac{\varepsilon \tilde{x}}{\eta-y} + O(\varepsilon^3) \right\} d\eta \\ & + \frac{1}{4\pi} \int_{y-\delta}^{y+\delta} \frac{\Gamma(\eta)}{(y-\eta)^2} \left\{ 1 + \frac{\varepsilon \tilde{x}}{\sqrt{\varepsilon^2 \tilde{x}^2 + (y-\eta)^2}} \right\} d\eta \end{aligned} \quad (\text{B.0.4})$$

と展開できる. I_1 の第3項を I_{13} とおく. I_{13} について

$$\eta \equiv y + \varepsilon t \quad (\text{B.0.5})$$

と変数変換すると

$$I_{13} = \frac{1}{4\pi} \int_{-\frac{\varepsilon}{\delta}}^{\frac{\varepsilon}{\delta}} \left\{ \Gamma(y) + \frac{d\Gamma(y)}{dy} \varepsilon t + O(\varepsilon^2) \right\} \frac{1}{\varepsilon^2 t^2} \left\{ 1 + \frac{\tilde{x}}{\sqrt{\tilde{x}^2 + t^2}} \right\} \varepsilon dt \quad (\text{B.0.6})$$

となる. このうち, 第2項の $d\Gamma/dy$ の項は t の奇関数の積分であるため0となる. したがって, I_{13} を厳密に積分すると

$$\begin{aligned} I_{13} = & \frac{1}{4\pi} \int_{-\frac{\varepsilon}{\delta}}^{\frac{\varepsilon}{\delta}} \Gamma(y) \frac{1}{\varepsilon t^2} \left\{ 1 + \frac{\tilde{x}}{\sqrt{\tilde{x}^2 + t^2}} \right\} dt + O(\varepsilon) \\ = & \frac{1}{4\pi} \Gamma(y) \frac{1}{\varepsilon} \left[\int_0^{\frac{\varepsilon}{\delta}} \frac{1}{t^2} \left\{ \frac{\tilde{x}}{\sqrt{\tilde{x}^2 + t^2}} - \frac{\tilde{x}}{\sqrt{\tilde{x}^2}} \right\} dt \right. \\ & \left. + \int_{-\frac{\varepsilon}{\delta}}^0 \frac{1}{t^2} \left\{ \frac{\tilde{x}}{\sqrt{\tilde{x}^2 + t^2}} - \frac{\tilde{x}}{\sqrt{\tilde{x}^2}} \right\} dt - 2 \left\{ 1 + \frac{\tilde{x}}{\sqrt{\tilde{x}^2}} \right\} \frac{\varepsilon}{\delta} \right] + O(\varepsilon) \\ = & \frac{1}{4\pi} \Gamma(y) \frac{1}{\varepsilon} \left\{ -2 \frac{\sqrt{\varepsilon^2 \tilde{x}^2 + \alpha^2}}{\alpha \tilde{x}} - \frac{2\varepsilon}{\alpha} \right\} + O(\varepsilon) \\ = & -\frac{1}{2\pi} \Gamma(y) \frac{1}{\varepsilon \tilde{x}} - \frac{1}{4\pi} \frac{2}{\delta} + O(\varepsilon) \end{aligned} \quad (\text{B.0.7})$$

となる.

(B.0.1)式の第2項, I_2 についても同様の変数変換を行えば,

$$\begin{aligned} I_2 = & \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^{y-\delta} \int_{-\varepsilon \tilde{l}_W(\eta)}^0 \mu(\varepsilon \tilde{\xi}, \eta) \left\{ \frac{\varepsilon}{(y-\eta)^3} + O(\varepsilon^3) \right\} d\tilde{\xi} \\ & + \frac{1}{4\pi} \int_{y+\delta}^1 \int_{-\varepsilon \tilde{l}_W(\eta)}^0 \mu(\varepsilon \tilde{\xi}, \eta) \left\{ \frac{\varepsilon}{(\eta-y)^3} + O(\varepsilon^3) \right\} d\tilde{\xi} \\ & + \frac{1}{4\pi} \int_{y-\delta}^{y+\delta} \int_{-\varepsilon \tilde{l}_W(\eta)}^0 \frac{\varepsilon \mu(\varepsilon \tilde{\xi}, \eta)}{\{\varepsilon^2 (\tilde{x} - \tilde{\xi})^2 + (y-\eta)^2\}^{\frac{3}{2}}} d\tilde{\xi} d\eta \end{aligned} \quad (\text{B.0.8})$$

と展開できる. I_2 の第3項を I_{23} とおき, I_{23} について

$$\eta \equiv y + \varepsilon t \quad (\text{B.0.9})$$

と変数変換すれば,

$$\begin{aligned} I_{23} = & \frac{1}{4\pi} \int_{-\frac{\varepsilon}{\delta}}^{\frac{\varepsilon}{\delta}} \int_{-\varepsilon \tilde{l}_W(\eta)}^0 \left\{ \mu(\varepsilon \tilde{\xi}, y) + \frac{\partial \mu(\varepsilon \tilde{\xi}, y)}{\partial y} \varepsilon t + O(\varepsilon^2) \right\} \\ & \times \frac{1}{\varepsilon \{\tilde{x} - \tilde{\xi}\}^2 + t^2}^{\frac{3}{2}} d\tilde{\xi} dt \end{aligned} \quad (\text{B.0.10})$$

となる。ここでも、第2項の $\partial\mu/d\partial y$ の項は t の奇関数の積分であるため0となる。したがって、 I_{23} は

$$\begin{aligned} I_{23} &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\frac{\delta}{\varepsilon}}^{\frac{\delta}{\varepsilon}} \int_{-\varepsilon \tilde{l}_W(\eta)}^0 \frac{\mu(\varepsilon \tilde{\xi}, y)}{\varepsilon \{(\tilde{x} - \tilde{\xi})^2 + t^2\}^{\frac{3}{2}}} d\tilde{\xi} dt + O(\varepsilon) \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\varepsilon \tilde{l}_W(\eta)}^0 \tilde{\mu}(\tilde{\xi}, y) \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{t}{(\tilde{x} - \tilde{\xi})^2 \sqrt{(\tilde{x} - \tilde{\xi})^2 + t^2}} \right]_{-\frac{\delta}{\varepsilon}}^{\frac{\delta}{\varepsilon}} d\tilde{\xi} + O(\varepsilon) \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\varepsilon \tilde{l}_W(\eta)}^0 \mu(\varepsilon \tilde{\xi}, y) \frac{1}{\varepsilon} \frac{2(\delta/\varepsilon)}{(\tilde{x} - \tilde{\xi})^2 \sqrt{(\tilde{x} - \tilde{\xi})^2 + (\delta^2/\varepsilon^2)}} d\tilde{\xi} + O(\varepsilon) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\varepsilon \tilde{l}_W(y)}^0 \mu(\varepsilon \tilde{\xi}, y) \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{(\tilde{x} - \tilde{\xi})^2} d\tilde{\xi} + O(\varepsilon) \end{aligned} \quad (\text{B.0.11})$$

となる。以上から $\partial\phi/\partial z|_{z=0}$ は

$$\begin{aligned} \frac{\partial\phi}{\partial z}(x, y, 0) &= -\frac{\Gamma(y)}{2\pi} \frac{1}{\varepsilon \tilde{x}} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\varepsilon \tilde{l}_W(y)}^0 \frac{\mu(\varepsilon \tilde{\xi}, y)}{\varepsilon^2 (\tilde{x} - \tilde{\xi})^2} d\tilde{\xi} \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \left[\int_{-1}^{y-\delta} \frac{\Gamma(\eta)}{(y-\eta)^2} d\eta - \frac{\Gamma(y)}{\delta} + \frac{d\Gamma}{dy} \log \delta \right] \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \left[\int_{y+\delta}^1 \frac{\Gamma(\eta)}{(y-\eta)^2} d\eta - \frac{\Gamma(y)}{\delta} - \frac{d\Gamma}{dy} \log \delta \right] + O(\varepsilon) \end{aligned} \quad (\text{B.0.12})$$

と展開される。第3項、第4項の積分は $\delta \rightarrow 0$ のとき

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma(\eta)}{(y-\eta)^2} d\eta &\equiv \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\frac{1}{4\pi} \left\{ \int_{-1}^{y-\delta} \frac{\Gamma(\eta)}{(y-\eta)^2} d\eta - \frac{\Gamma(y)}{\delta} + \frac{d\Gamma}{dy} \log \delta \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4\pi} \left\{ \int_{y+\delta}^1 \frac{\Gamma(\eta)}{(y-\eta)^2} d\eta - \frac{\Gamma(y)}{\delta} - \frac{d\Gamma}{dy} \log \delta \right\} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.0.13})$$

と定義され、発散積分の有限部分をとることを意味する。したがって

$$\begin{aligned} \frac{\partial\phi}{\partial z}(x, y, 0) &= -\frac{\Gamma(y)}{2\pi} \frac{1}{\varepsilon \tilde{x}} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\varepsilon \tilde{l}_W(y)}^0 \frac{\mu(\varepsilon \tilde{\xi}, y)}{\varepsilon (\tilde{x} - \tilde{\xi})^2} d\tilde{\xi} \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma(\eta)}{(y-\eta)^2} d\eta + O(\varepsilon) \end{aligned} \quad (\text{B.0.14})$$

となり、(4.1.1)式の結果を得る。

次にスプレールートライン上での波高、 $h(-l_W(y), y)$ の高アスペクト比近似について述べる。

スプレールートライン上での波高、 $h(-l_W(y), y)$ は

$$h(-l_W(y), y)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma(\eta)}{(y-\eta)^2} \left\{ -l_W(y) + \sqrt{l_W(y)^2 + (y-\eta)^2} \right\} d\eta \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_{-l_W(\eta)}^0 \frac{\mu(\xi, \eta)}{(y-\eta)^2} \left\{ 1 + \frac{-l_W(y) - \xi}{\sqrt{(-l_W(y) - \xi)^2 + (y-\eta)^2}} \right\} d\xi d\eta \end{aligned} \quad (\text{B.0.15})$$

と表される。第1項を I_3 、第2項を I_4 とする。これまでと同様の変数変換を行えば、 I_3 は

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^{y-\delta} \frac{\Gamma(\eta)}{(y-\eta)^2} \left\{ -\varepsilon \tilde{l}_W(y) + (y-\eta) + O(\varepsilon^2) \right\} d\eta \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \int_{y+\delta}^1 \frac{\Gamma(\eta)}{(y-\eta)^2} \left\{ -\varepsilon \tilde{l}_W(y) + (\eta-y) + O(\varepsilon^2) \right\} d\eta \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \int_{y-\delta}^{y+\delta} \frac{\Gamma(\eta)}{(y-\eta)^2} \left\{ -l_W(y) + \sqrt{l_W(y)^2 + (y-\eta)^2} \right\} d\eta \end{aligned} \quad (\text{B.0.16})$$

と展開される。第3項を I_{33} とし、 $\eta \equiv y + \varepsilon t$ と変数変換すれば、

$$\begin{aligned} I_{33} &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\frac{\delta}{\varepsilon}}^{\frac{\delta}{\varepsilon}} \left\{ \Gamma(y) + \frac{d\Gamma(y)}{dy} \varepsilon t + O(\varepsilon^2) \right\} \\ &\quad \times \frac{1}{t^2} \left\{ -\tilde{l}_W(y) - \sqrt{\tilde{l}_W(y)^2 + t^2} \right\} dt \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\frac{\delta}{\varepsilon}}^{\frac{\delta}{\varepsilon}} \frac{\Gamma(y)}{t^2} \left\{ -\tilde{l}_W(y) - \sqrt{\tilde{l}_W(y)^2 + t^2} \right\} dt + O(\varepsilon^2) \\ &= \frac{\Gamma(y)}{4\pi} \left\{ -2 + 2 \log 2 - 2 \log | -l_W(y) | + 2 \log \delta \right\} + O\left(\frac{\varepsilon}{\delta}\right) \end{aligned} \quad (\text{B.0.17})$$

となる。一方、 I_4 は

$$\begin{aligned} I_4 &= \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^{y-\delta} \int_{-\varepsilon \tilde{l}_W(\eta)}^0 \frac{\mu(\varepsilon \tilde{\xi}, \eta)}{(y-\eta)^2} \left\{ \varepsilon + \frac{\varepsilon^2 (-\tilde{l}_W(y) - \tilde{\xi})}{y-\eta} + O(\varepsilon^3) \right\} d\tilde{\xi} d\eta \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \int_{y+\delta}^1 \int_{-\tilde{l}_W(\eta)}^0 \frac{\mu(\varepsilon \tilde{\xi}, \eta)}{(y-\eta)^2} \left\{ \varepsilon + \frac{\varepsilon^2 (-\tilde{l}_W(y) - \tilde{\xi})}{\eta-y} + O(\varepsilon^3) \right\} d\tilde{\xi} d\eta \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \int_{y-\delta}^{y+\delta} \int_{-\tilde{l}_W(\eta)}^0 \frac{\mu(\varepsilon \tilde{\xi}, \eta)}{(y-\eta)^2} \left\{ \varepsilon + \frac{\varepsilon^2 (-\tilde{l}_W(y) - \tilde{\xi})}{\sqrt{\varepsilon^2 (-\tilde{l}_W(y) - \tilde{\xi})^2 + (y-\eta)^2}} \right\} d\tilde{\xi} d\eta \end{aligned} \quad (\text{B.0.18})$$

と展開される。第3項を I_{43} とし、 $\eta \equiv y + \varepsilon t$ と変数変換すれば、

$$\begin{aligned} I_{43} &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\frac{\delta}{\varepsilon}}^{\frac{\delta}{\varepsilon}} \int_{-\tilde{l}_W(y)}^0 \left\{ \mu(\varepsilon \tilde{\xi}, y) + \frac{\partial\mu}{\partial y}(\varepsilon \tilde{\xi}, y) \varepsilon t + O(\varepsilon^2) \right\} \\ &\quad \times \frac{1}{t^2} \left\{ 1 + \frac{-\tilde{l}_W(y) - \tilde{\xi}}{\sqrt{(-\tilde{l}_W(y) - \tilde{\xi})^2 + t^2}} \right\} d\tilde{\xi} dt \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_{-\tilde{l}_W(y)}^0 \frac{2\mu(\varepsilon \tilde{\xi}, y)}{-\tilde{l}_W(y) - \tilde{\xi}} d\tilde{\xi} + O\left(\frac{\varepsilon}{\delta}\right) \end{aligned} \quad (\text{B.0.19})$$

となる。以上からスプレールートライン上での波高は

$$\begin{aligned}
h(-\varepsilon l_W(y), y) = & -\frac{\Gamma(y)}{2\pi} \log |-\varepsilon \tilde{l}_W(y)| - \frac{1}{2\pi} \int_{-\tilde{l}_W(y)}^0 \frac{\mu(\varepsilon \tilde{\xi}, y)}{-\tilde{l}_W(y) - \tilde{\xi}} d\tilde{\xi} \\
& - \frac{\Gamma(y)}{2\pi} (1 - \log 2) \\
& + \frac{1}{4\pi} \left\{ \int_{-1}^{y-\delta} \frac{\Gamma(\eta)}{(y-\eta)} d\eta + \Gamma(y) \log \delta \right\} \\
& + \frac{1}{4\pi} \left\{ \int_{y+\delta}^1 \frac{\Gamma(\eta)}{(\eta-y)} d\eta + \Gamma(y) \log \delta \right\} + O\left(\frac{\varepsilon}{\delta}\right)
\end{aligned} \quad (B.0.20)$$

と展開される。第4項、第5項の積分は $\delta \rightarrow 0$ のとき

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma(\eta)}{|y-\eta|} d\eta \equiv & \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\frac{1}{4\pi} \left\{ \int_{-1}^{y-\delta} \frac{\Gamma(\eta)}{(y-\eta)} d\eta + \Gamma(y) \log \delta \right\} \right. \\
& \left. + \frac{1}{4\pi} \left\{ \int_{y+\delta}^1 \frac{\Gamma(\eta)}{(\eta-y)} d\eta + \Gamma(y) \log \delta \right\} \right]
\end{aligned} \quad (B.0.21)$$

と定義され、発散積分の有限部分をとることを意味する。したがって

$$\begin{aligned}
h(-\varepsilon l_W(y), y) = & -\frac{\Gamma(y)}{2\pi} \log |-\varepsilon \tilde{l}_W(y)| - \frac{1}{2\pi} \int_{-\tilde{l}_W(y)}^0 \frac{\mu(\varepsilon \tilde{\xi}, y)}{-\tilde{l}_W(y) - \tilde{\xi}} d\tilde{\xi} \\
& - \frac{\Gamma(y)}{2\pi} (1 - \log 2) + \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma(\eta)}{|y-\eta|} d\eta + O\left(\frac{\varepsilon}{\delta}\right)
\end{aligned} \quad (B.0.22)$$

となり、(4.1.2)式の結果を得る。

付録C 重力影響を考慮したときの高アスペクト比近似

第4章の第2節で示した、重力影響を考慮したときの高アスペクト比近似について述べる。ここではスプレールートライン上での波高、 $h(-l_W(y), y)$ の漸近展開を示す。

Spray root line を $x = -\varepsilon \tilde{l}(y)$ とすると、スプレールートライン上での波高は

$$\begin{aligned}
h(-\varepsilon \tilde{l}(y), y) = & \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_{-\varepsilon \tilde{l}(y)}^{\infty} \mu(\xi, \eta) \left\{ \frac{1}{(y-\eta)^2} \left(1 + \frac{-\varepsilon \tilde{l}(y) - \xi}{\sqrt{(-\varepsilon \tilde{l}(y) - \xi)^2 + (y-\eta)^2}} \right) \right. \\
& - \frac{K_0}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} \frac{k \sec^3 \theta}{k - K_0 \sec^2 \theta} \\
& \times \sin(k(-\varepsilon \tilde{l}(y) - \xi) \cos \theta) \cos(k(y-\eta) \sin \theta) dk d\theta \\
& - K_0^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sec^5 \theta \cos(K_0(-\varepsilon \tilde{l}(y) - \xi) \sec \theta) \\
& \left. \times \cos(K_0(y-\eta) \sec^2 \theta \sin \theta) d\theta \right\} d\xi d\eta
\end{aligned} \quad (C.0.1)$$

である。 η に関する積分区間を $[-1, y-\delta]$, $[y-\delta, y+\delta]$, $[y+\delta, 1]$ の3つに分け、1番目と3番目の区間を外部領域、2番目の区間を内部領域呼ぶ。内部領域ではさらに ξ に関する積分区間を $[-\varepsilon \tilde{l}(y), M]$, $[M, \infty]$ に分け、それぞれの区間を内部前方領域、内部後方領域と呼ぶことにする。ただし

$$\varepsilon \ll M \ll \delta \ll 1 \quad (C.0.2)$$

とする。各領域を図示すると Fig.19 のようになる。

外部領域では滑走艇は y 軸上の $-1 < y < 1$ に縮退するので、この領域から生じる波高 h_o は以下のように表される。

$$\begin{aligned}
h_o(-\varepsilon \tilde{l}(y), y) = & \frac{1}{4\pi} \left\{ \int_{-1}^{y-\delta} + \int_{y+\delta}^1 \right\} \Gamma(\eta) \left\{ \frac{1}{(y-\eta)^2} (-\varepsilon \tilde{l}(y) + \sqrt{\varepsilon^2 \tilde{l}(y)^2 + (y-\eta)^2}) \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{K_0}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \oint_0^\infty \frac{\sec^4 \theta}{k - K_0 \sec^2 \theta} \\
& \times \cos(-k\tilde{l}(y) \cos \theta) \cos(k(y-\eta) \sin \theta) dk d\theta \\
& - K_0^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sec^4 \theta \sin(-K_0 \tilde{l}(y) \sec \theta) \\
& \times \cos(K_0(y-\eta) \sec^2 \theta \sin \theta) d\theta \Big\} d\eta
\end{aligned} \tag{C.0.3}$$

これは $\varepsilon \rightarrow 0$ では Fig.20 に示すような y 軸上の $[-1, y-\delta], [y+\delta, 1]$ に強さ $\Gamma(\eta)$ の馬蹄渦が分布していると考えることができる. (C.0.3) 式の表現は高次項を含んでいるが, 内部領域とのマッチングを考え今はこのままの形でしておく.

次に内部後方領域について考える. η を ε でスケールし, $\eta \equiv y + \varepsilon t$ と変数変換する. このとき内部後方領域から生じる波高 h_{ia} は以下のように表される.

$$\begin{aligned}
h_{ia}(-\varepsilon \tilde{l}(y), y) &= \frac{1}{4\pi} \oint_{-\frac{\varepsilon}{t}}^{\frac{\varepsilon}{t}} \left\{ \Gamma(y) + \Gamma'(y) \varepsilon t + O(\varepsilon^2) \right\} \\
& \times \left\{ \frac{1}{t^2} \left(-\tilde{l}(y) - \frac{M}{\varepsilon} + \sqrt{\left(-\tilde{l}(y) - \frac{M}{\varepsilon} \right)^2 + t^2} \right) \right. \\
& + \frac{K_0}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \oint_0^\infty \frac{\sec^4 \theta}{k - K_0 \sec^2 \theta} \\
& \times \cos(-k\tilde{l}(y) \cos \theta) \cos(-k\varepsilon t \sin \theta) dk d\theta \\
& - K_0 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sec^4 \theta \sin(-K_0 \tilde{l}(y) \sec \theta) \\
& \times \cos(-K_0 \varepsilon t \sec^2 \theta \sin \theta) d\theta \Big\} dt
\end{aligned} \tag{C.0.4}$$

この領域では $\Gamma(\eta)$ が第1近似的には $\Gamma(y)$ となり変化しないから, 縦渦がキャンセルし, Fig.21 に示すような $\xi = M$ 上の強さ $\Gamma(y)$ の拘束渦と $\eta = y - \delta$ と $\eta = y + \delta$ から後方へのびる縦渦が存在すると考えることができる.

ここで t の積分範囲を $[-\delta/\varepsilon, \delta/\varepsilon] = [-\infty, \infty] - [-\infty, -\delta/\varepsilon] - [\delta/\varepsilon, \infty]$ とたしあわせると, 1番目の項は強さ $\Gamma(y)$ の拘束渦が $y[-\infty, \infty]$ に存在することになるから流れは2次元となる. 2番目, 3番目の項について変数を t から η に戻せば h_{ia} は

$$\begin{aligned}
h_{ia}(-\varepsilon \tilde{l}(y), y) &\sim \frac{\Gamma(y)}{2\pi} S_C(-K_0 M) \\
& - \frac{\Gamma(y)}{4\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{y-\delta} + \int_{y+\delta}^{\infty} \right\} \\
& \times \left\{ \frac{1}{(y-\eta)^2} \left(-\varepsilon \tilde{l}(y) - M + \sqrt{(-\varepsilon \tilde{l}(y) - M)^2 + (y-\eta)^2} \right) \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{K_0}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \oint_0^\infty \frac{\sec^4 \theta}{k - K_0 \sec^2 \theta} \\
& \times \cos(k(-\varepsilon \tilde{l}(y) - M) \cos \theta) \cos(k(y-\eta) \sin \theta) dk d\theta \\
& - K_0 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sec^4 \theta \sin(K_0(-\varepsilon \tilde{l}(y) - M) \sec \theta) \\
& \times \cos(K_0(y-\eta) \sec^2 \theta \sin \theta) d\theta \Big\} d\eta
\end{aligned} \tag{C.0.5}$$

となる¹⁴⁾.

次に内部前方領域について考える. $\eta \equiv y + \varepsilon t$ とし, さらに $\xi \equiv \varepsilon \tilde{\xi}$ と変数変換する. 内部前方領域から生じる波高 h_{if} は以下ようになる.

$$\begin{aligned}
h_{if}(-\varepsilon \tilde{l}(y), y) &= \frac{1}{4\pi} \oint_{-\frac{\varepsilon}{t}}^{\frac{\varepsilon}{t}} \int_{-\tilde{l}(y)}^{\frac{M}{\varepsilon}} \left\{ \mu(\varepsilon \tilde{\xi}, y) + \frac{\partial \mu}{\partial y}(\varepsilon \tilde{\xi}, y) \varepsilon t + O(\varepsilon^2) \right\} \\
& \times \left\{ \frac{1}{t^2} \left(1 + \frac{-\tilde{l}(y) - \tilde{\xi}}{\sqrt{(-\tilde{l}(y) - \tilde{\xi})^2 + t^2}} \right) \right. \\
& - \frac{K_0 \varepsilon^2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \oint_0^\infty \frac{k \sec^3 \theta}{k - K_0 \sec^2 \theta} \\
& \times \sin(k(-\tilde{l}(y) - \tilde{\xi}) \cos \theta) \cos(-k\varepsilon t \sin \theta) dk d\theta \\
& - K_0^2 \varepsilon^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sec^5 \theta \cos(K_0(-\tilde{l}(y) - \tilde{\xi}) \sec \theta) \\
& \times \cos(-K_0 \varepsilon t \sec^2 \theta \sin \theta) d\theta \Big\} d\tilde{\xi} dt
\end{aligned} \tag{C.0.6}$$

第1近似的には $\mu(\varepsilon \tilde{\xi}, \eta)$ が $\mu(\varepsilon \tilde{\xi}, y)$ となつて変化しないので, 流れは Fig.22 に示すように浸水面の部分に強さ $\mu(\xi, y)$ の幅の大きな渦輪が分布し, 後流面には $\Gamma(y)$ の渦輪が存在したものを考えることができる. ここでも内部前方領域と同様に t の積分範囲を $[-\delta/\varepsilon, \delta/\varepsilon] = [-\infty, \infty] - [-\infty, -\delta/\varepsilon] - [\delta/\varepsilon, \infty]$ とたしあわせると, 1番目の項は2次元の流れを表し, h_{if} は以下ようになる.

$$\begin{aligned}
h_{if}(-\varepsilon \tilde{l}(y), y) &\sim \frac{\Gamma(y)}{2\pi} \left\{ S_C(-K_0 \varepsilon \tilde{l}(y)) - S_C(-K_0 M) \right\} \\
& + \frac{1}{2\pi} \int_{-\tilde{l}(y)}^0 \left\{ -\frac{1}{-\tilde{l}(y) - \tilde{\xi}} \right. \\
& + K_0 \varepsilon S_S(K_0 \varepsilon(-\tilde{l}(y) - \tilde{\xi})) \Big\} \mu(\varepsilon \tilde{\xi}, y) d\tilde{\xi} \\
& - \frac{1}{4\pi} \int_{-\tilde{l}(y)}^{\frac{M}{\varepsilon}} \mu(\varepsilon \tilde{\xi}, y) \left(\frac{2\varepsilon}{\delta} + O\left(\frac{\varepsilon^2}{\delta^2}\right) \right) d\tilde{\xi}
\end{aligned} \tag{C.0.7}$$

2番目, 3番目の項からの寄与は高々 $O(\varepsilon/\delta)$ であることが分かる.

それぞれの領域から生じる波高を変数をもどして合成すると、スプレールートライン上での波高は以下ようになる。

$$\begin{aligned}
h(-\varepsilon \tilde{l}(y), y) &\sim -\frac{1}{2\pi} \int_{-l(y)}^0 \frac{\mu(\xi, y)}{-\varepsilon \tilde{l}(y) - \xi} d\xi + S_C(-K_0 \varepsilon \tilde{l}(y)) \\
&+ \frac{1}{4\pi} \left\{ \int_{-1}^{y-\delta} + \int_{y+\delta}^1 \right\} \Gamma(\eta) \left\{ \frac{1}{(y-\eta)^2} \left(-\varepsilon \tilde{l}(y) + \sqrt{\varepsilon^2 \tilde{l}(y)^2 + (y-\eta)^2} \right) \right. \\
&+ \frac{K_0}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \oint_0^\infty \frac{\sec^4 \theta}{k - K_0 \sec^2 \theta} \\
&\times \cos(-k \varepsilon \tilde{l}(y) \cos \theta) \cos(k(y-\eta) \sin \theta) dk d\theta \\
&- K_0^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sec^4 \theta \sin(-K_0 \varepsilon \tilde{l}(y) \sec \theta) \\
&\times \cos(K_0(y-\eta) \sec^2 \theta \sin \theta) d\theta \Big\} d\eta \\
&- \frac{\Gamma(y)}{4\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{y-\delta} + \int_{y+\delta}^\infty \right\} \\
&\times \left\{ \frac{1}{(y-\eta)^2} \left(-\varepsilon \tilde{l}(y) - M + \sqrt{(-\varepsilon \tilde{l}(y) - M)^2 + (y-\eta)^2} \right) \right. \\
&+ \frac{K_0}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \oint_0^\infty \frac{\sec^4 \theta}{k - K_0 \sec^2 \theta} \\
&\times \cos(k(-\varepsilon \tilde{l}(y) - M) \cos \theta) \cos(k(y-\eta) \sin \theta) dk d\theta \\
&- K_0 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sec^4 \theta \sin(K_0(-\varepsilon \tilde{l}(y) - M) \sec \theta) \\
&\times \cos(K_0(y-\eta) \sec^2 \theta \sin \theta) d\theta \Big\} d\eta \quad (C.0.8)
\end{aligned}$$

第4項目の η に関する積分は $\infty, -\infty$ で0に収束すると考えられる。第3項は $\eta \rightarrow y(\eta \cong y \pm \delta)$ のとき $\Gamma(\eta) \rightarrow \Gamma(y)$ であるので、第4項目と合わせて核関数の特異性を相殺することになり、 $\delta \rightarrow 0$ の極限をとっても第3項と第4項の和は有限値をとる。すなわち発散積分の有限部分をとることを意味し、その和を I とすると数学的には

$$\begin{aligned}
I &\equiv \frac{1}{4\pi} \oint_{-1}^1 \Gamma(\eta) \left\{ \frac{1}{(y-\eta)^2} \left(-\varepsilon \tilde{l}(y) + \sqrt{\varepsilon^2 \tilde{l}(y)^2 + (y-\eta)^2} \right) \right. \\
&+ \frac{K_0 b}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \oint_0^\infty \frac{\sec^4 \theta}{k - K_0 \sec^2 \theta} \\
&\times \cos(-k \varepsilon \tilde{l}(y) \cos \theta) \cos(k(y-\eta) \sin \theta) dk d\theta \\
&- (K_0 b)^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sec^4 \theta \sin(-K_0 b \varepsilon \tilde{l}(y) \sec \theta)
\end{aligned}$$

$$\times \cos(K_0 b(y-\eta) \sec^2 \theta \sin \theta) d\theta \Big\} d\eta \quad (C.0.9)$$

と書くことができる。 I には ε についての高次項が含まれるのでこれを展開し、さらに発散波の寄与は小さいと考えることにする。このとき h は

$$\begin{aligned}
h(-\varepsilon \tilde{l}(y), y) &\approx \frac{\Gamma(y)}{2\pi} S_C(-K_0 \varepsilon \tilde{l}(y)) \\
&+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\varepsilon \tilde{l}(y)}^0 \left\{ -\frac{1}{-\varepsilon \tilde{l}(y) - \xi} + K_0 S_S(K_0(-\varepsilon \tilde{l}(y) - \xi)) \right\} \mu(\xi, y) d\xi \\
&+ \frac{1}{4\pi} \oint_{-1}^1 \frac{\Gamma(\eta)}{|y-\eta|} d\eta \quad (C.0.10)
\end{aligned}$$

となり、(4.2.12)式の結果を得る。

図表一覧

Photo.1 Observation of wetted surface of planing ship model

Photo.2 Observation of wetted surface of high aspect ratio planing plate

Fig.1 Coordinate system and definitions of basic quantities

Fig.2 Flow configuration around a planing ship represented by horseshoe vortices

Fig.3 Direct flow and reverse flow

Fig.4 Flow configuration around a planing ship represented
by horseshoe vortices and vortex lattice on the plate

Fig.5 Admissible types of the solution of wetted length in the center plane without gravitational
effects

Fig.6 Wetted length to still water length at the centerline obtained by the variational method

Fig.7 Calculated spray root lines to variable restricted conditions

Fig.8 Measured spray root lines corresponding to various restrained conditions

Fig.9 Velocity potential S_s and wave height S_c by the clockwise point vortex of the strength 2π on
the still water surface

Fig.10 Admissible types of the solution of Froude number based on wetted length of centerline in
running condition

Fig.11 Relation between Froude number based on calm water length and Froude number based on
wetted length at centerline in running condition

Fig.12 Wetted surface area of planing plate with and without gravity effect

Fig.13 Comparison calculate result of wetted surface area of planing plate with the experimental one

Fig.14 Flow model of a slender planing plate

Fig.15 Trial function for the variational principal used for a slender planing plate

Fig.16 Comparison the calculated wetted length of slender planing plate with the experimental one

Fig.17 Variation of trim angle fraction to initial trim angle in the free running condition

Fig.18 Drag coefficient of planing ship for various still water length

Fig.19 Definition of outer and inner region

Fig.20 Flow configuration in outer region represented by horseshoe vortices

Fig.21 Flow configuration in inner off region represented by horseshoe vortex

Fig.22 Flow configuration in inner fore region represented by vortex lattice

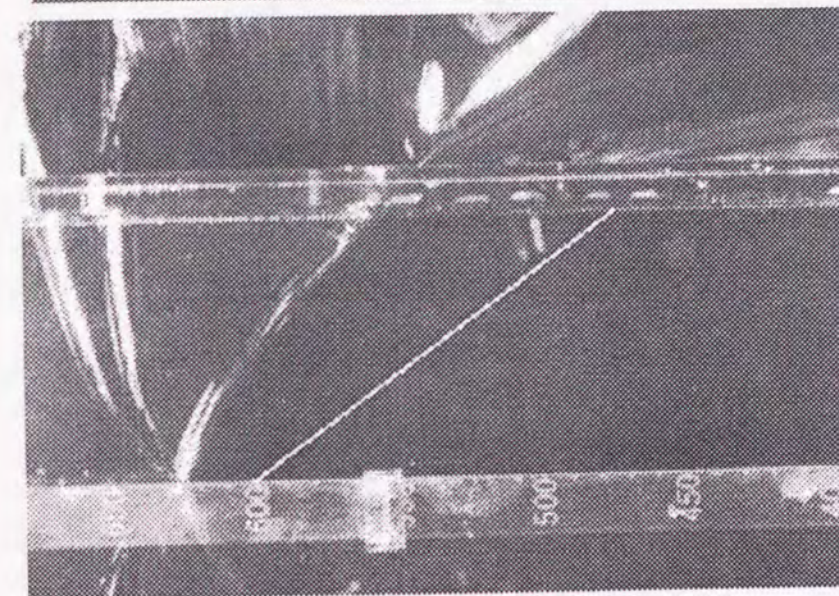
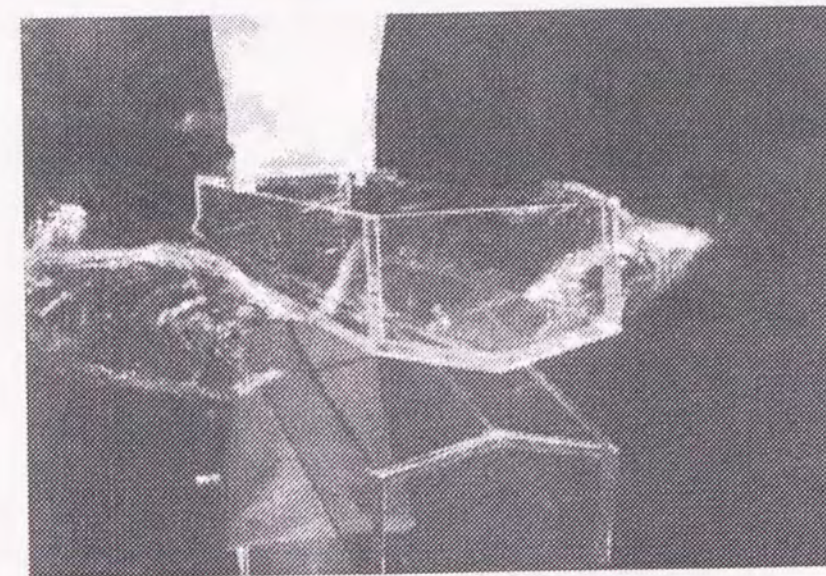


Photo.1 Observation of wetted surface of planing ship model
(white line : calm water line)

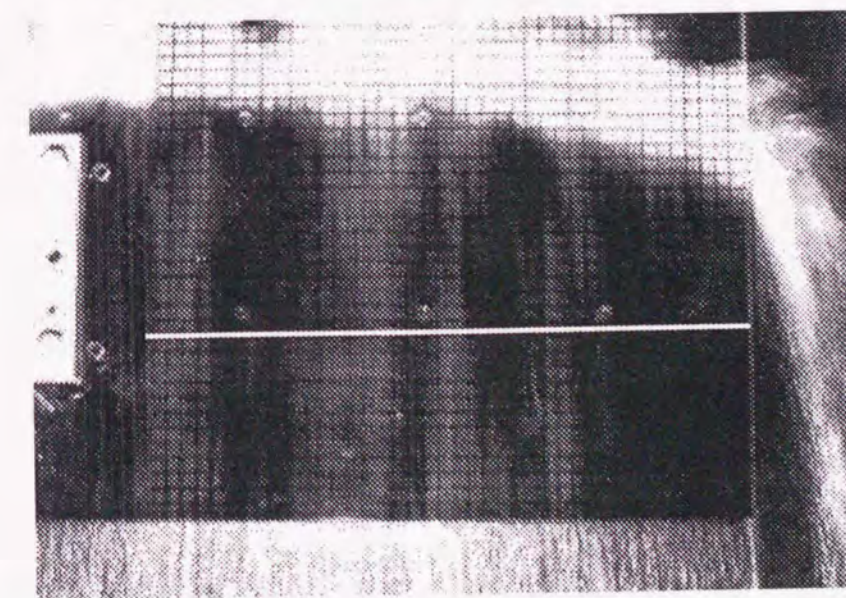


Photo.2 Observation of wetted surface of high aspect ratio planing plate
(white line : calm water line)

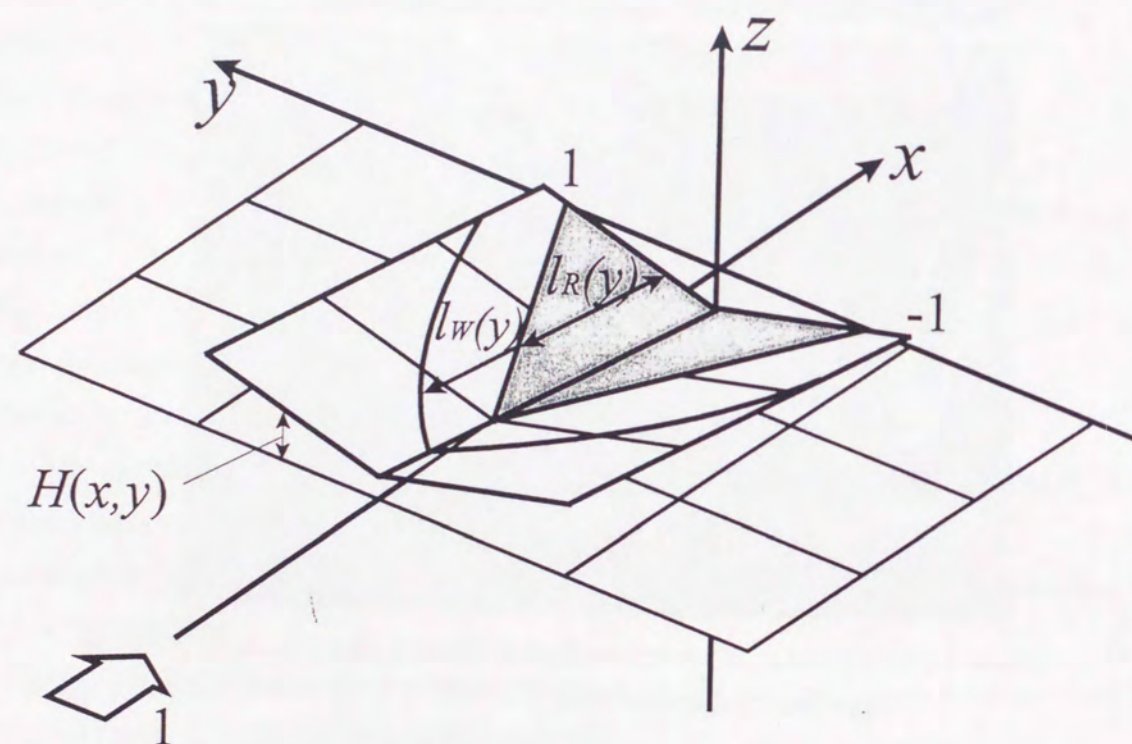


Fig.1 Coordinate system and definitions of basic quantities

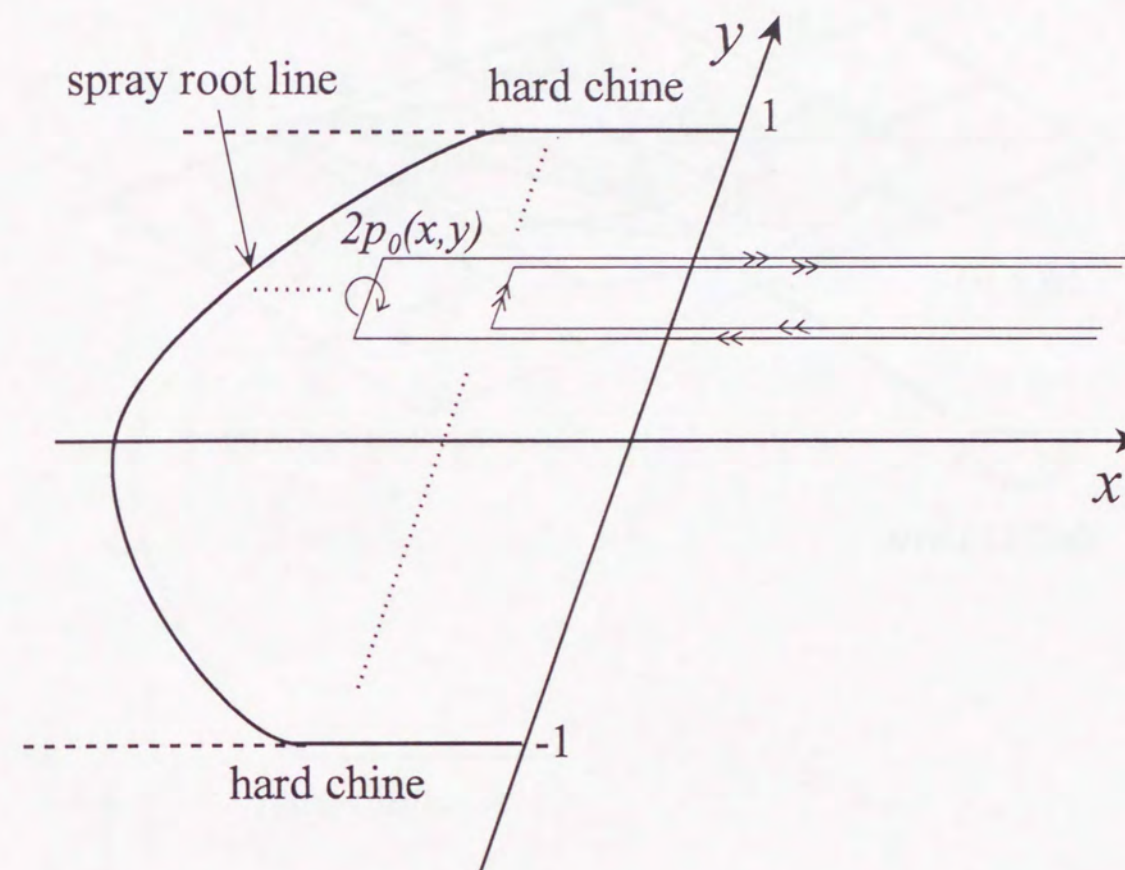


Fig.2 Flow configuration around a planing ship represented by horseshoe vortices

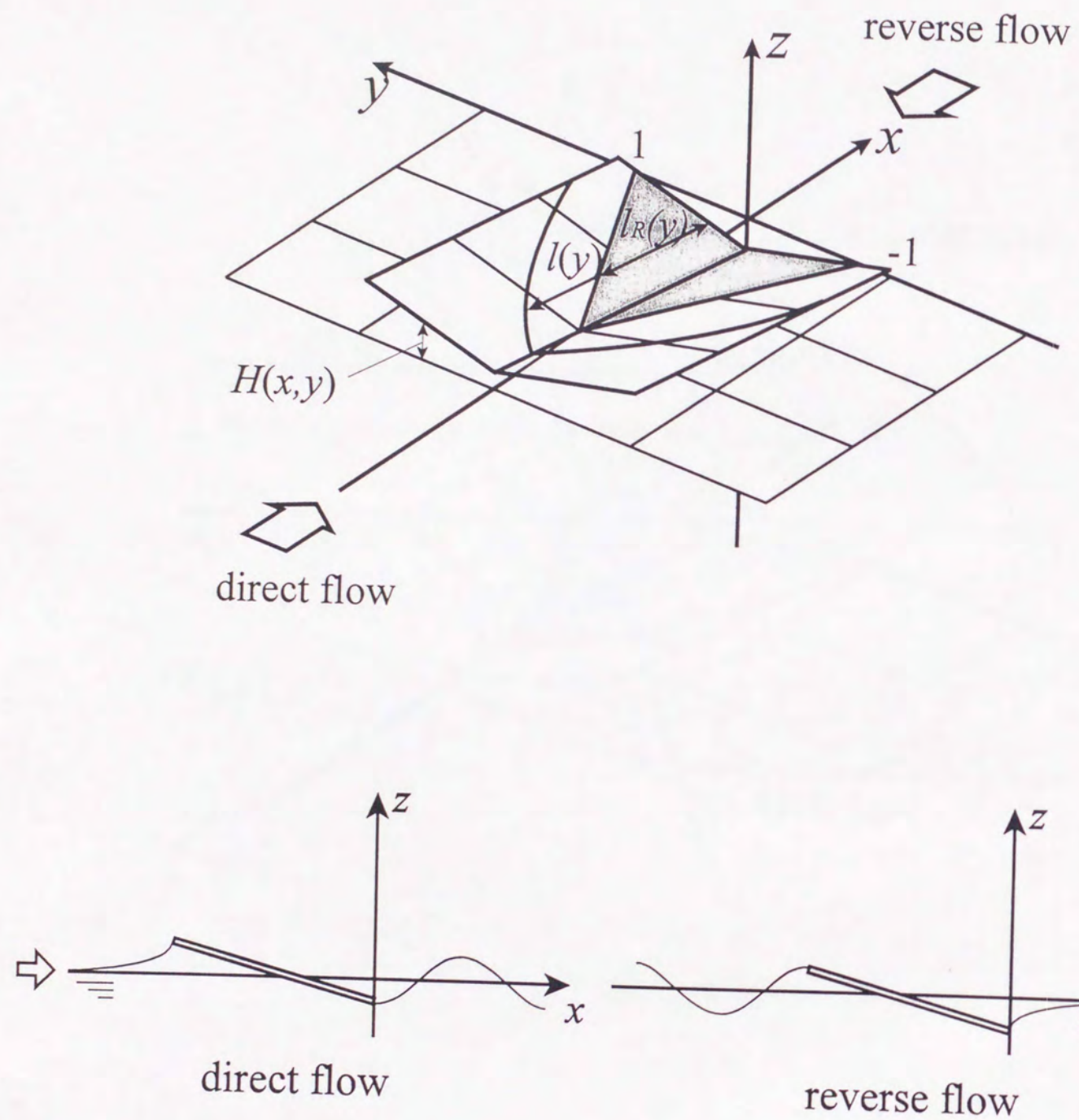


Fig.3 Direct flow and reverse flow

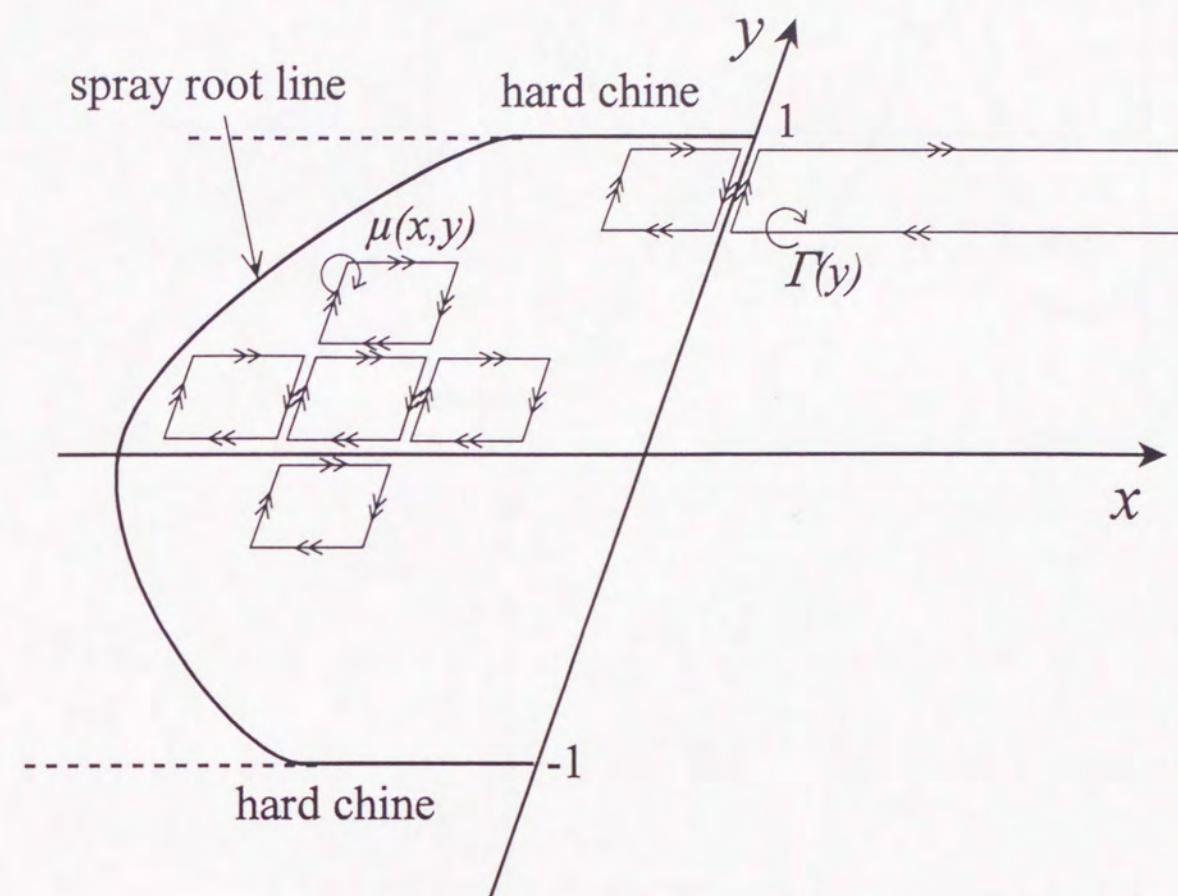


Fig.4 Flow configuration around a planing ship represented by horseshoe vortices and vortex lattice on the plate

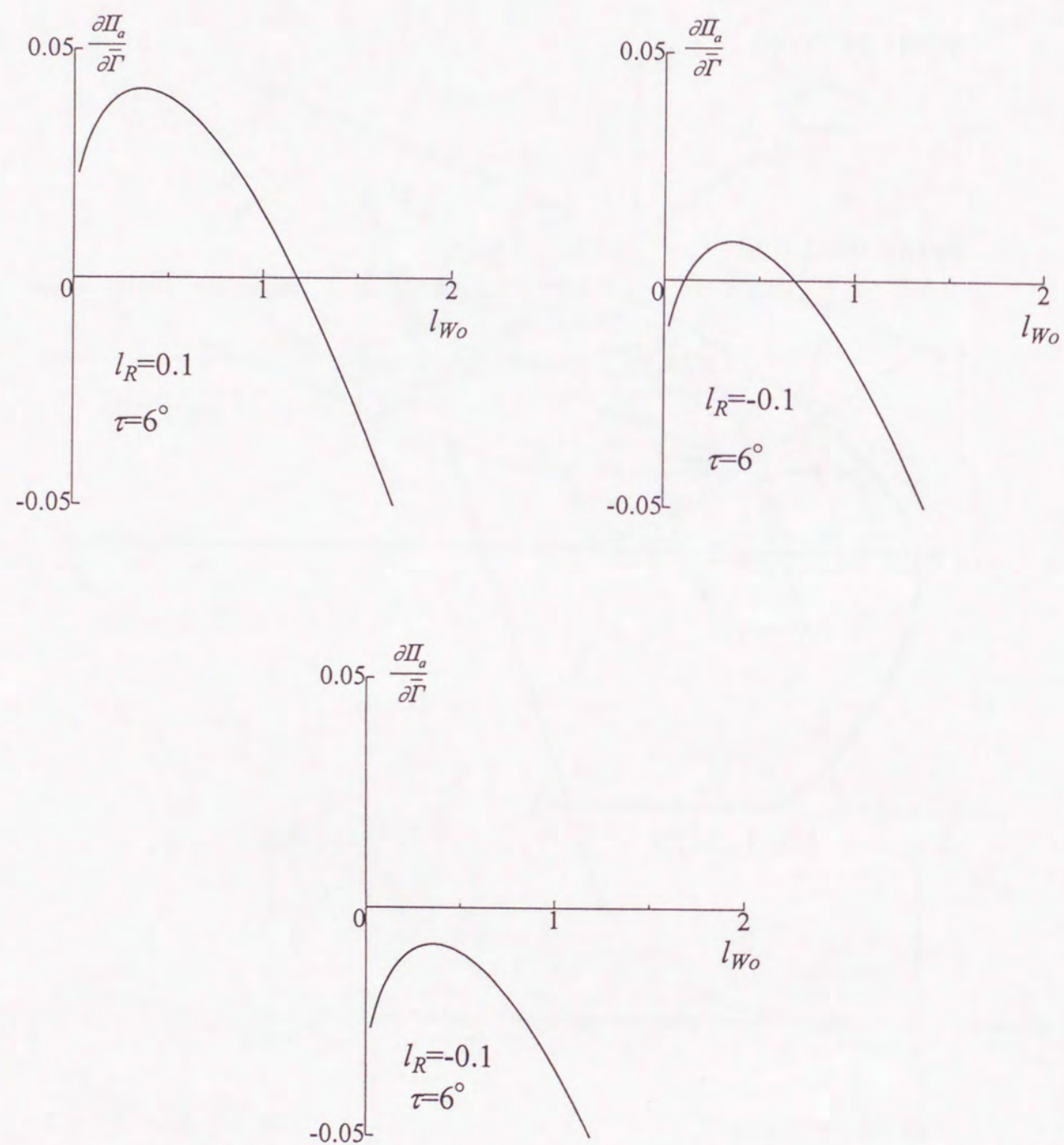


Fig.5 Admissible types of the solution of the wetted length in the center plane without gravitational effects

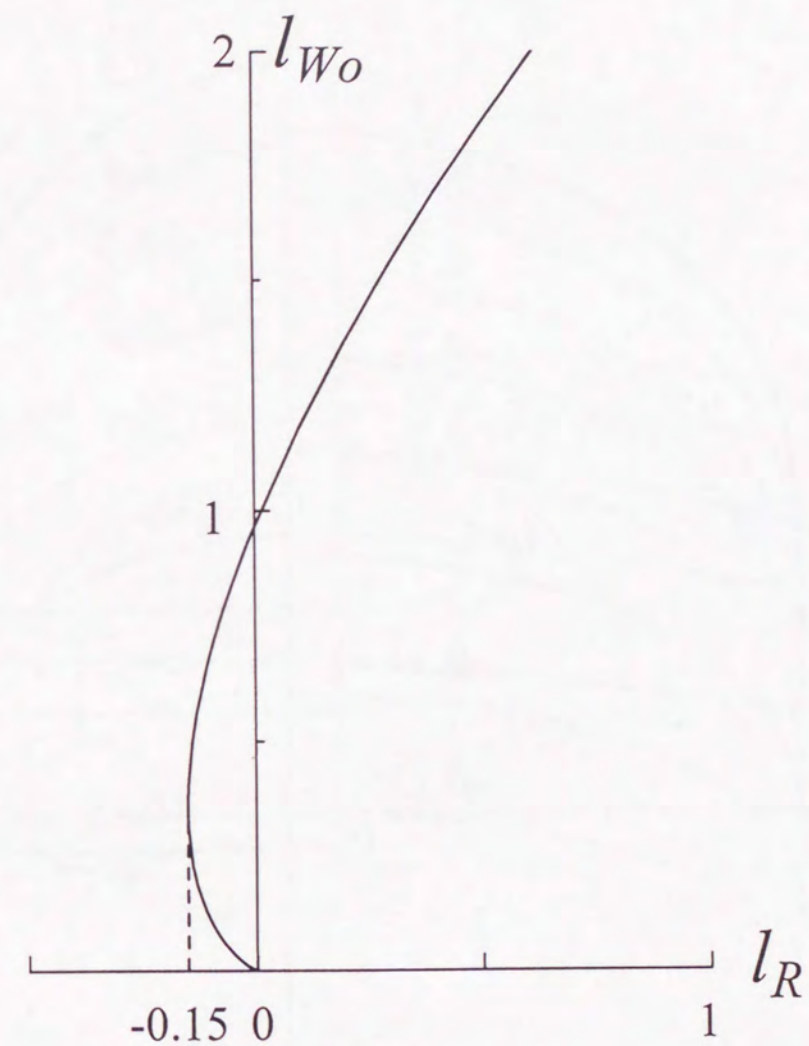


Fig.6 Wetted length to still water length at the centerline obtained by the variational method

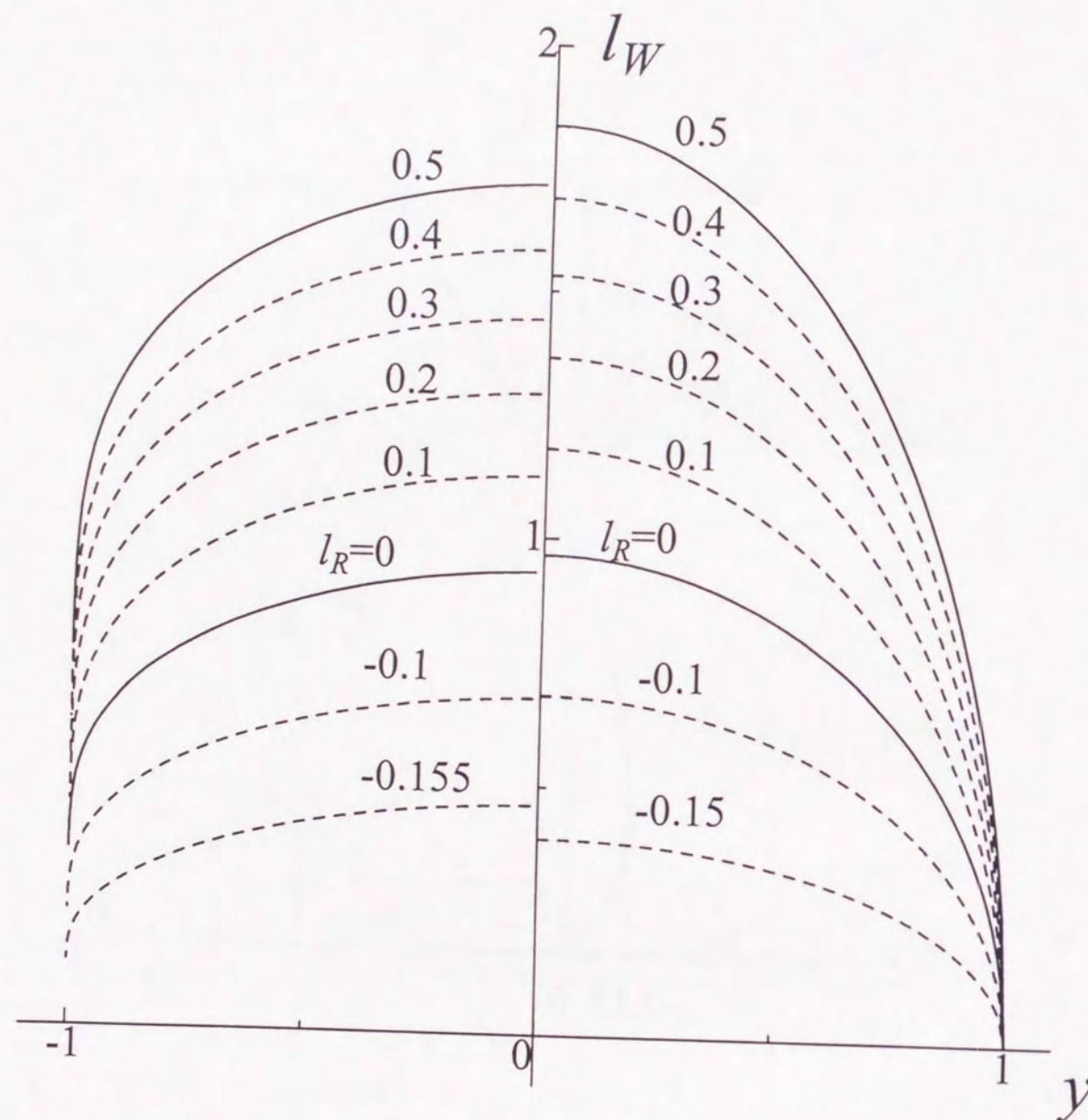


Fig.7 Calculated spray root lines to variable restricted conditions.
 right side : by the present variational method
 left side : results of the solution of integral equation by Matsumura et al.

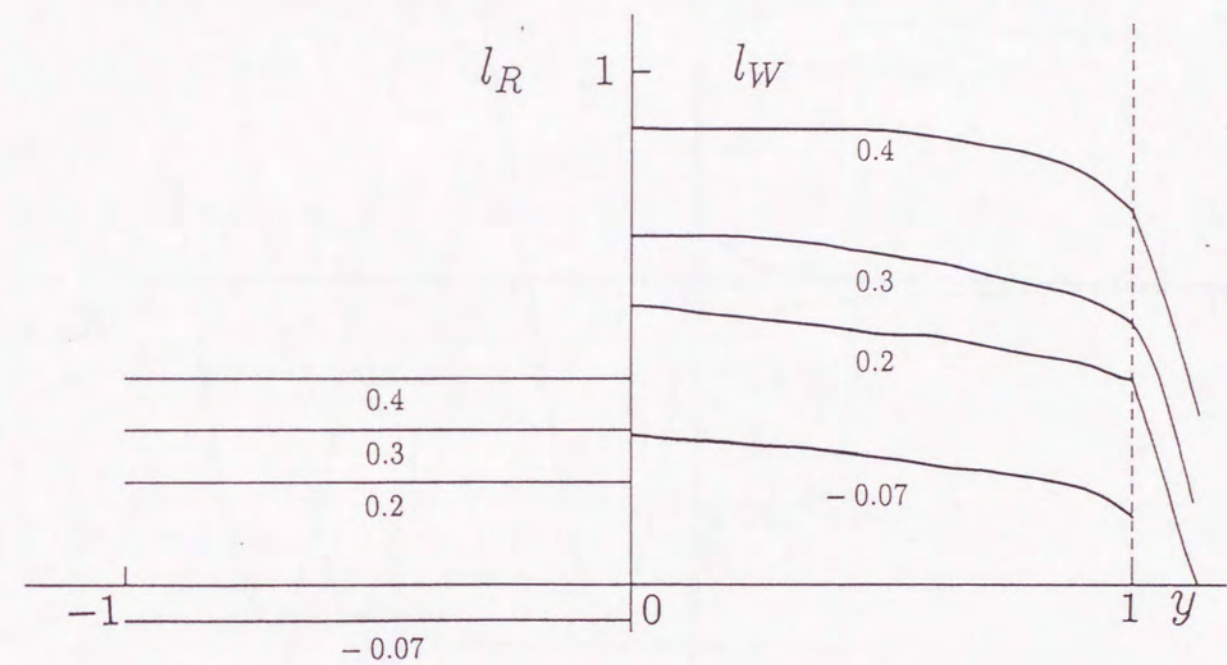


Fig.8 Measured spray root lines corresponding to various restrained conditions
 left side : still water lines
 right side : spray root lines

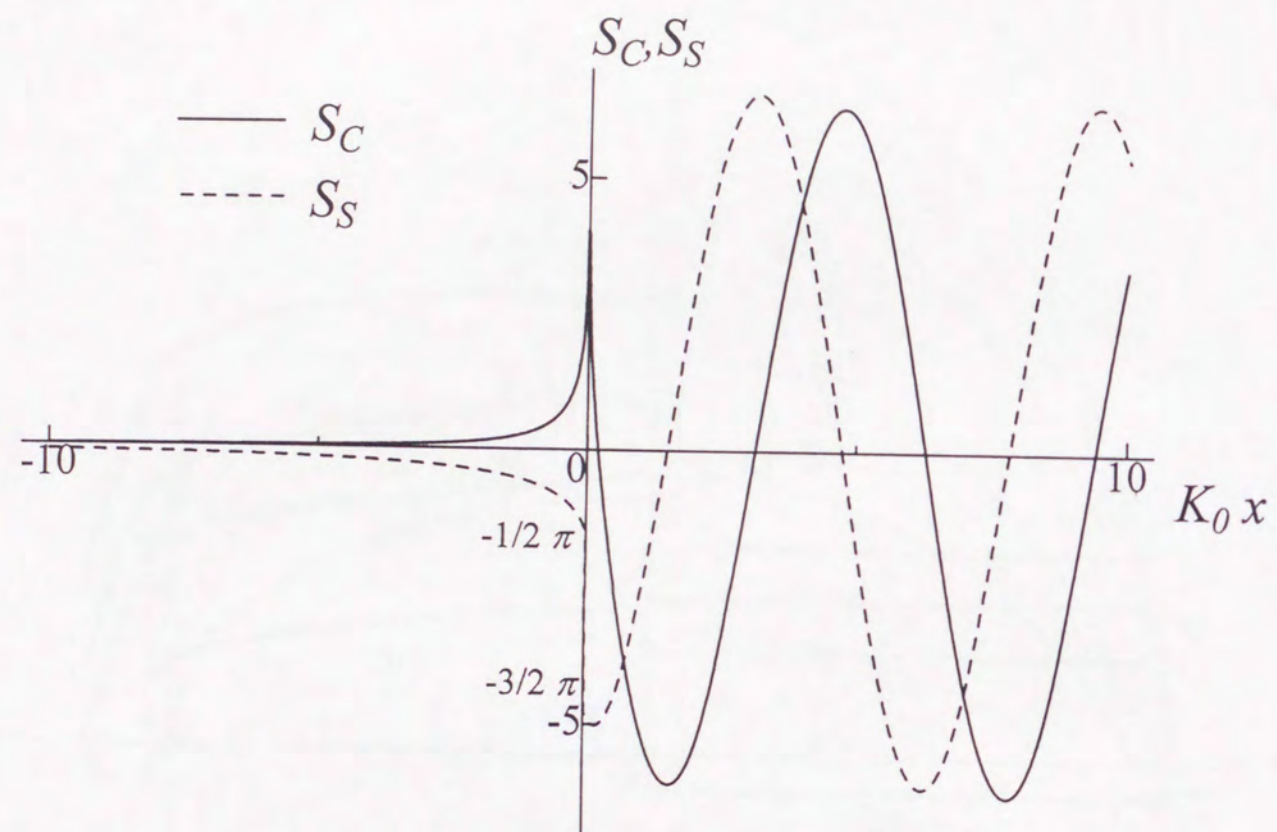


Fig.9 Velocity potential S_S and wave height S_C by the clockwise point vortex of the strength 2π on the still water surface

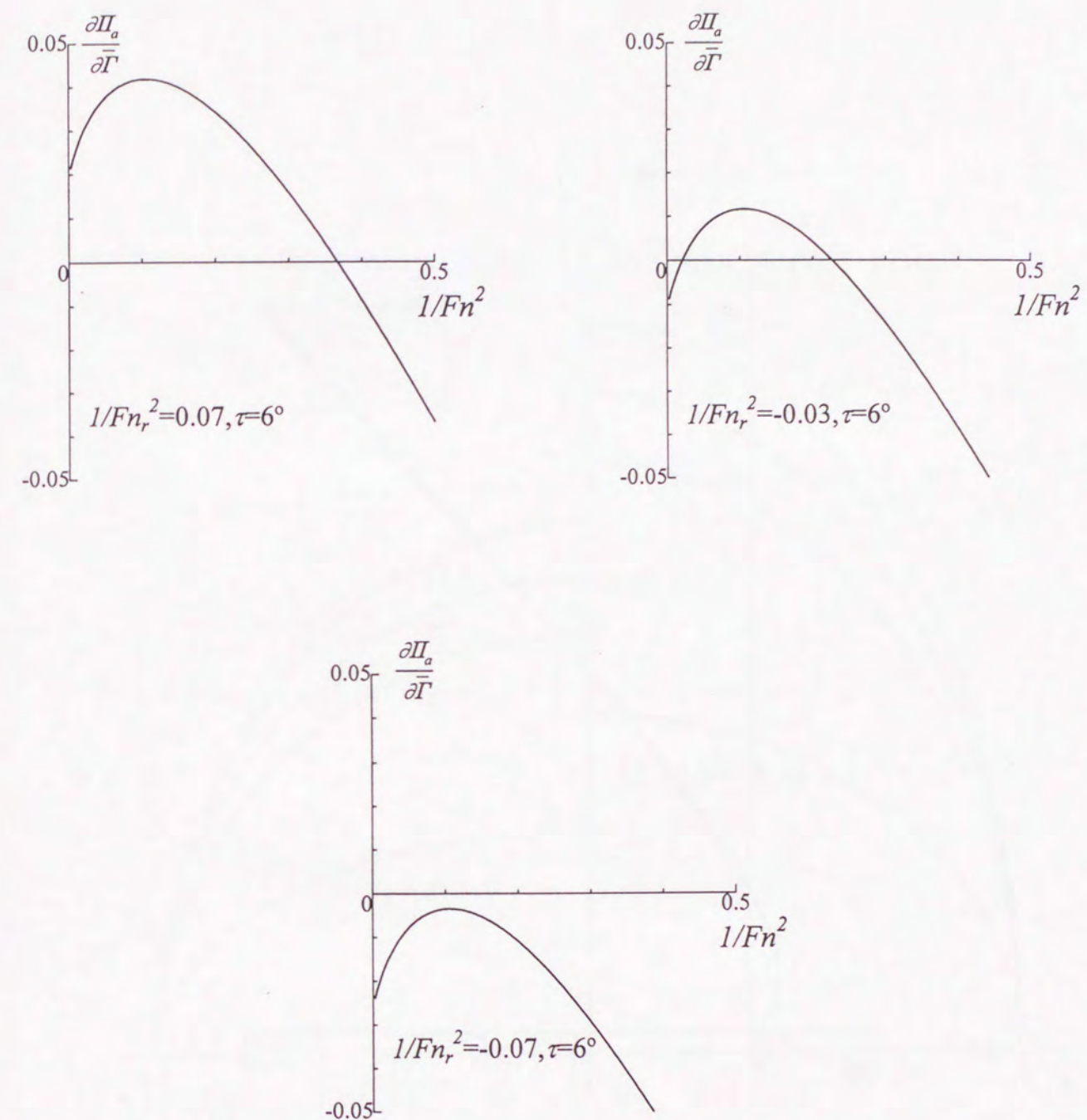


Fig.10 Admissible types of the solution of Froude number based on wetted length of centerline in running condition

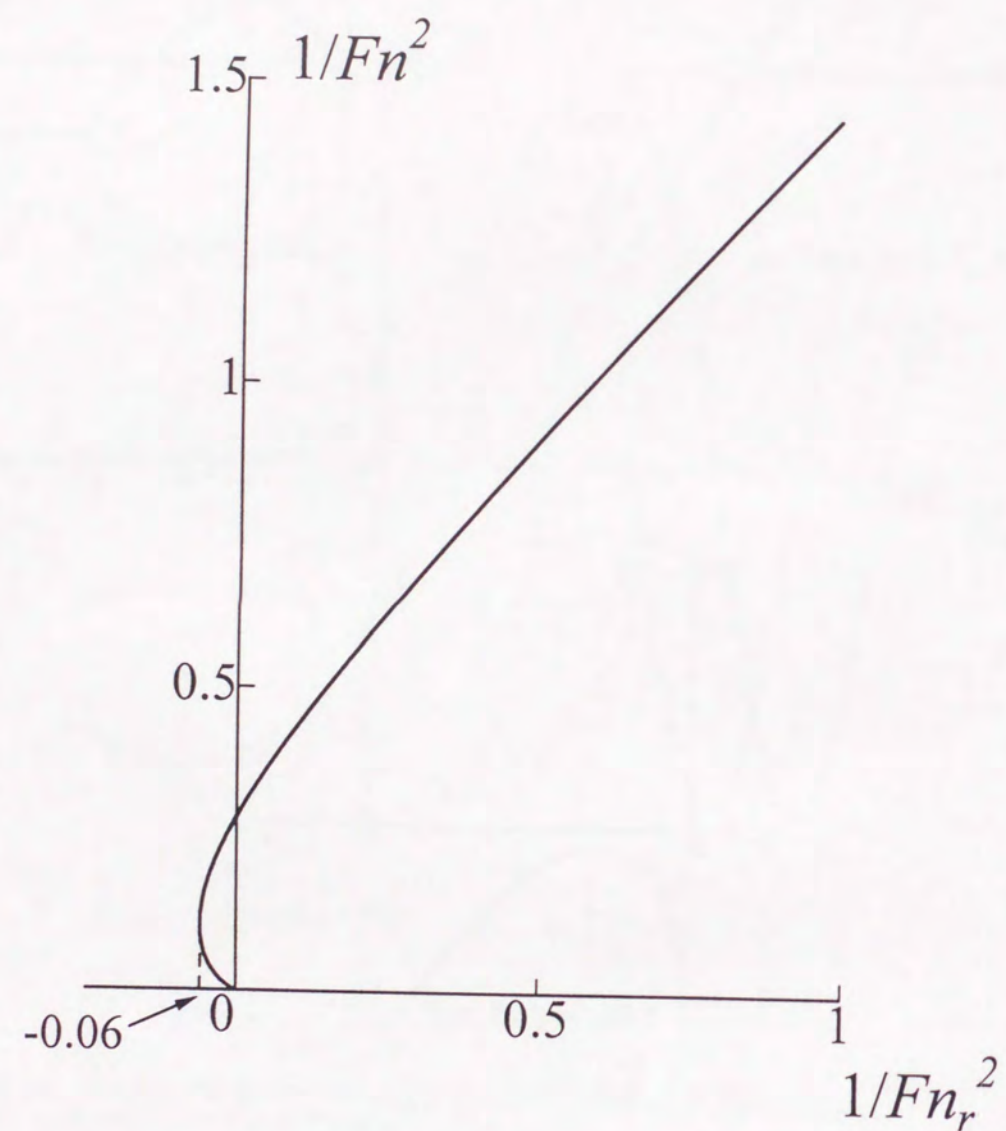


Fig.11 Relation between Froude number based on calm water length and Froude number based on wetted length at centerline in running condition

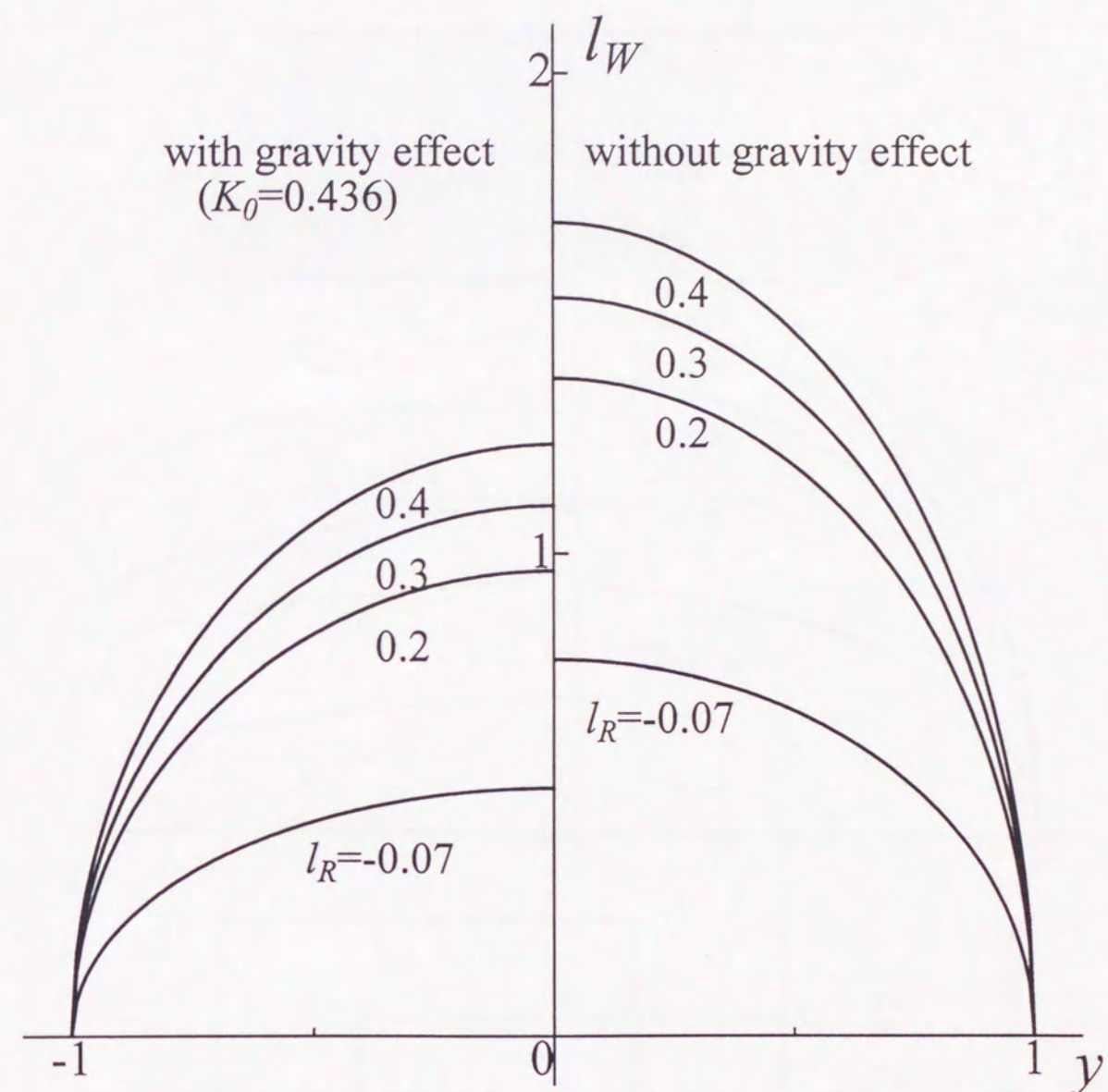


Fig.12 Wetted surface area of planig plate with and without gravity effect

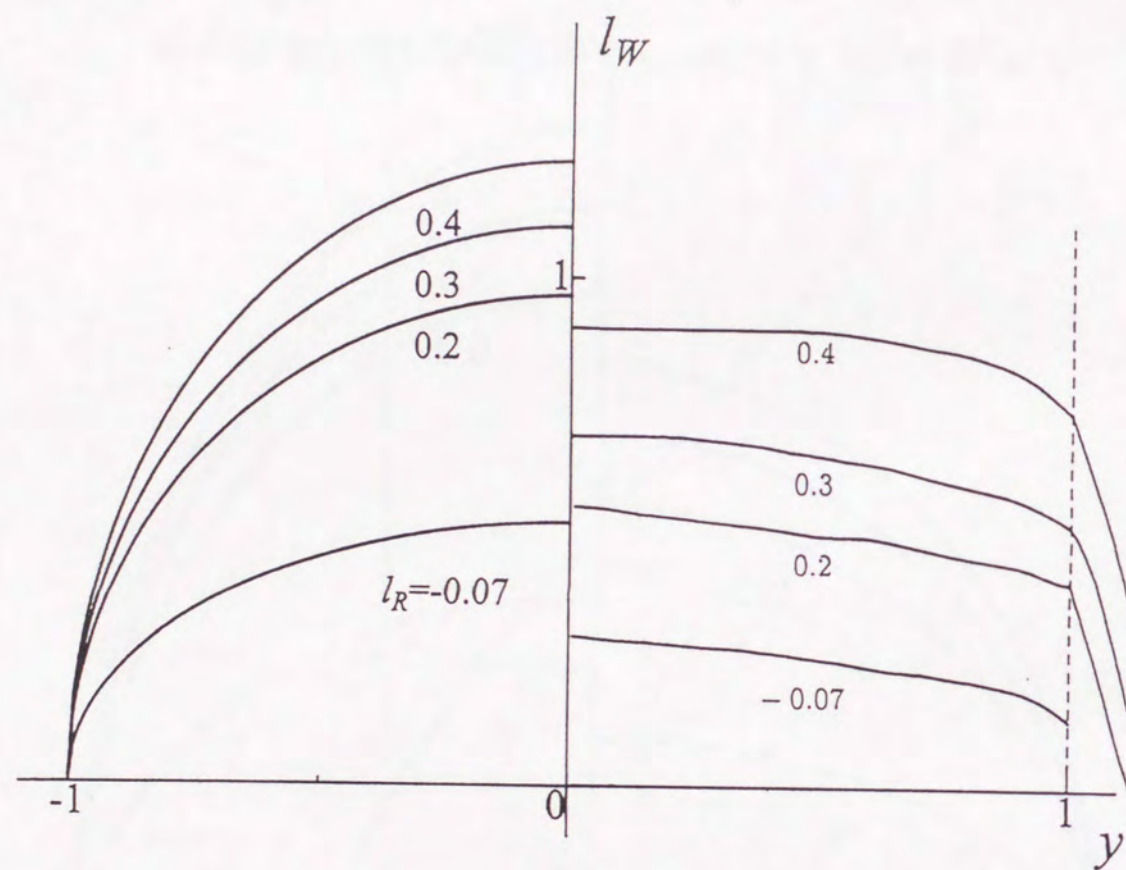


Fig.13 Comparison calculate result of wetted surface area of planing plate with the experimental one ($K_0 = 0.436$)

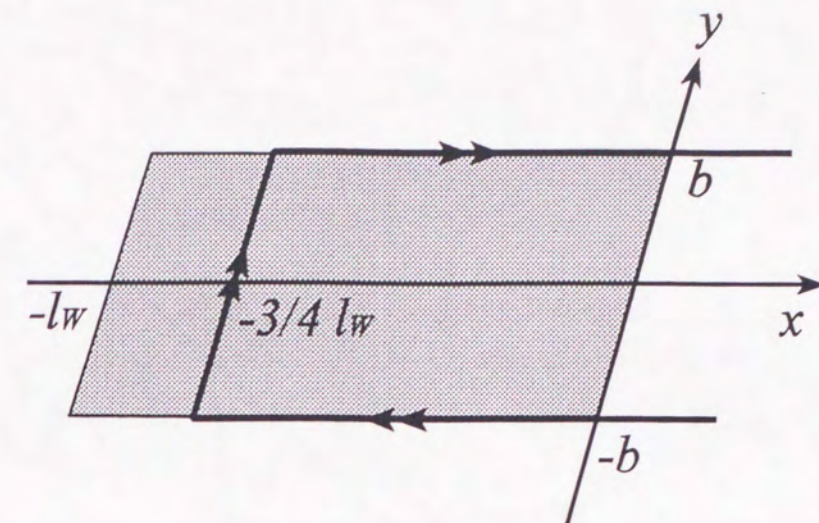


Fig.14 Flow model of a slender planing plate

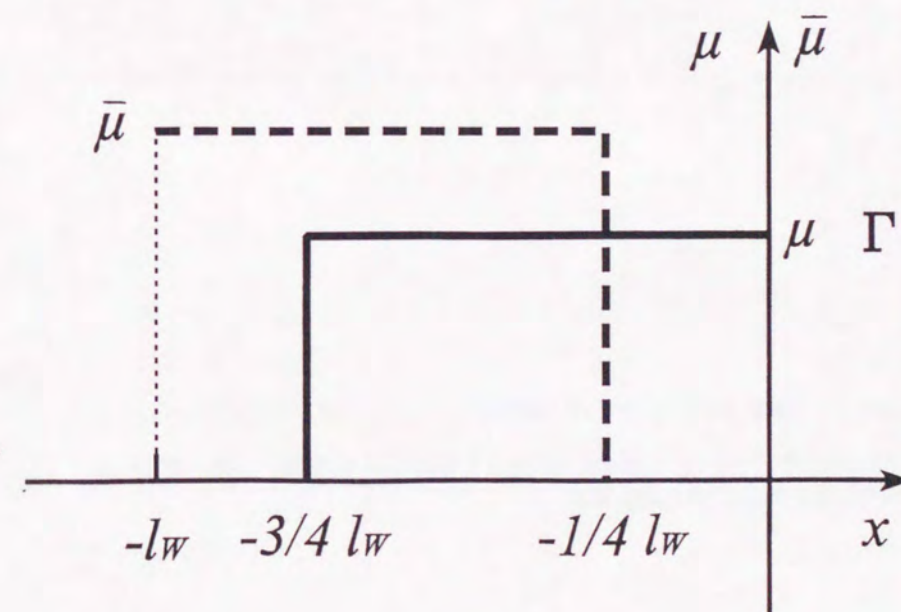


Fig.15 Trial function for the variational principal used for a slender planing plate

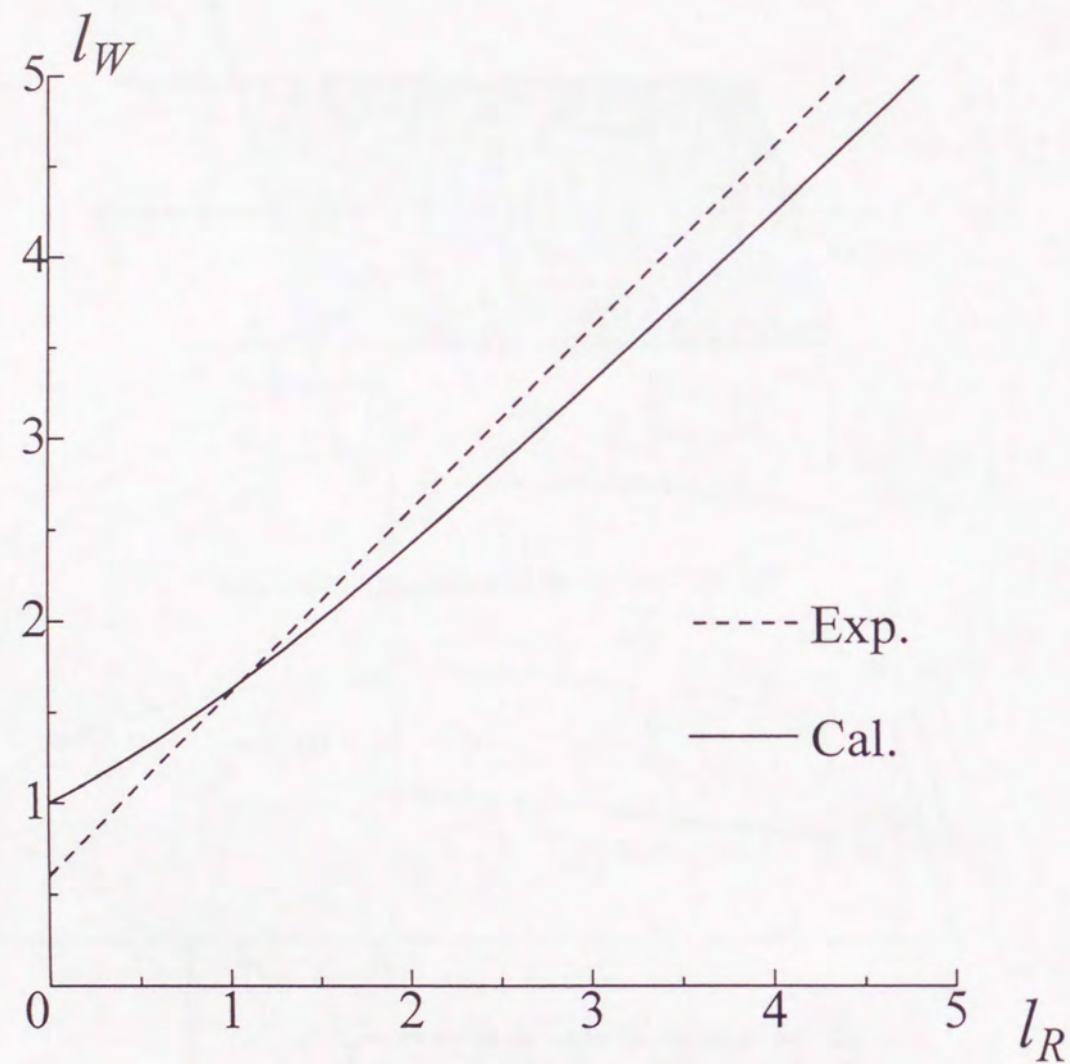


Fig.16 Comparison the calculated wetted length of slender planing plate with the experimental one

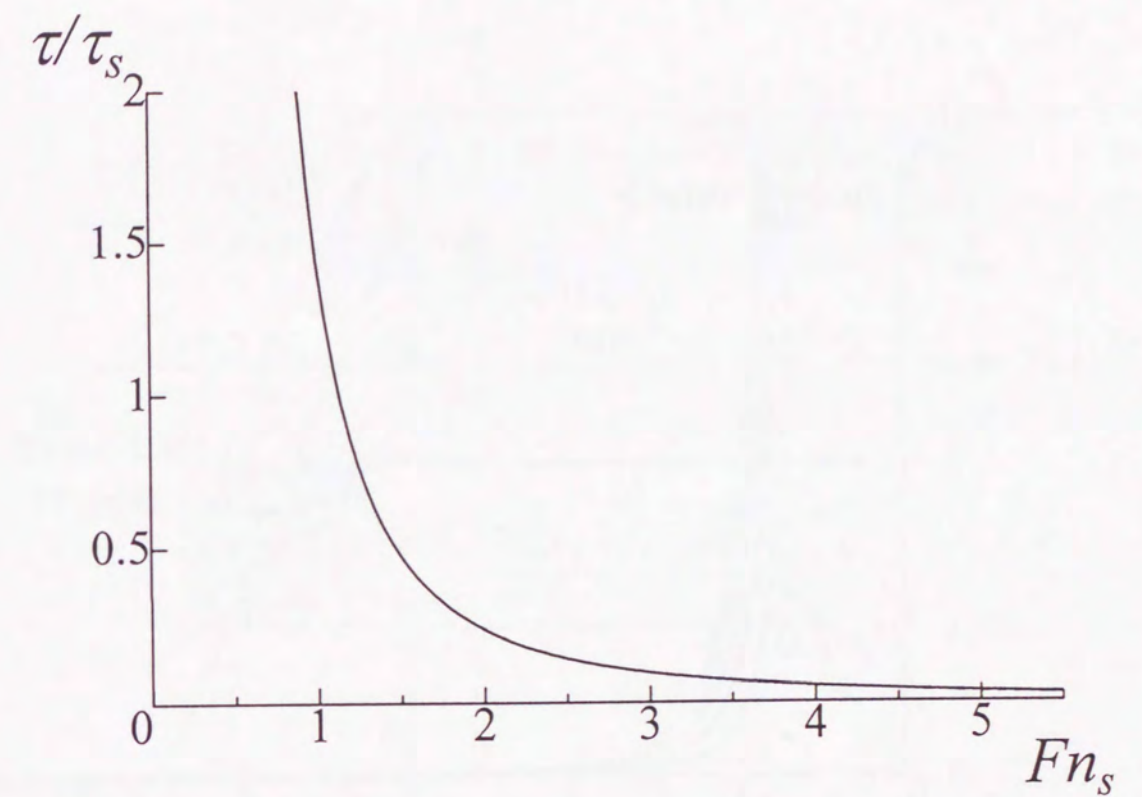


Fig.17 Variation of trim angle fraction to initial trim angle in free running condition

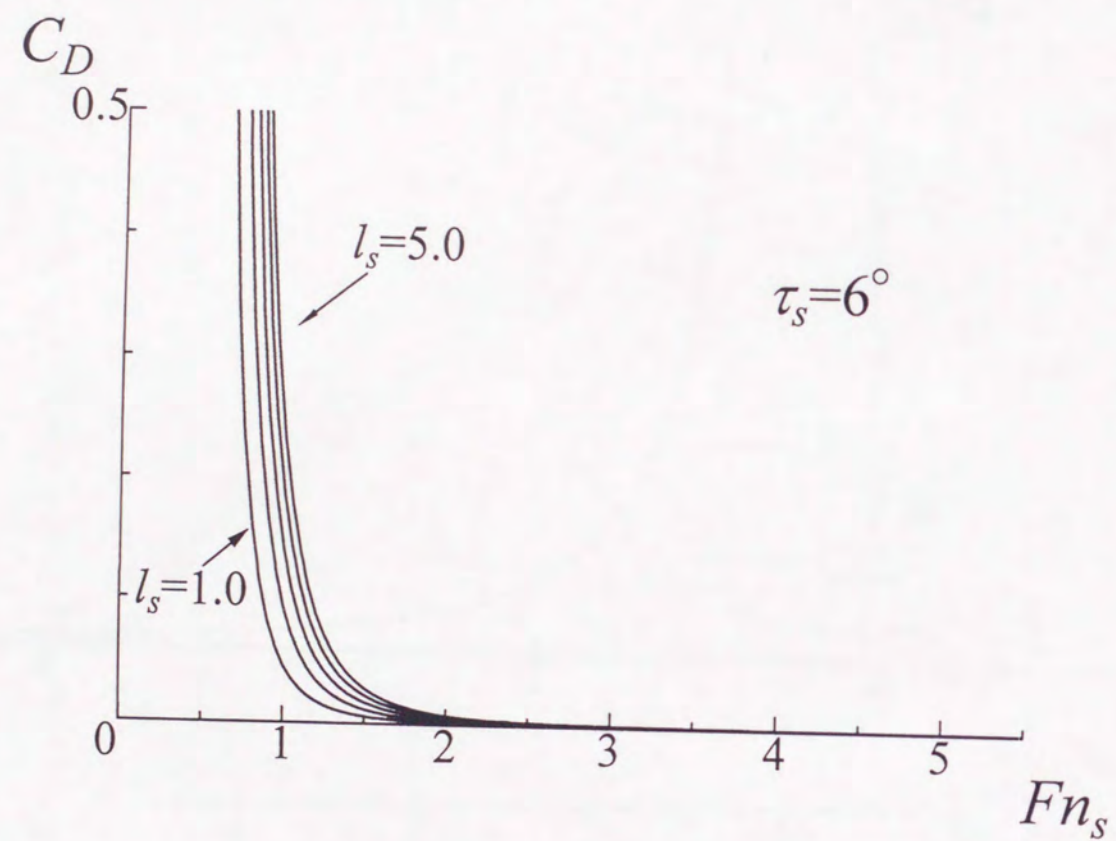


Fig.18 Drag coefficient of planing ship for various still water length

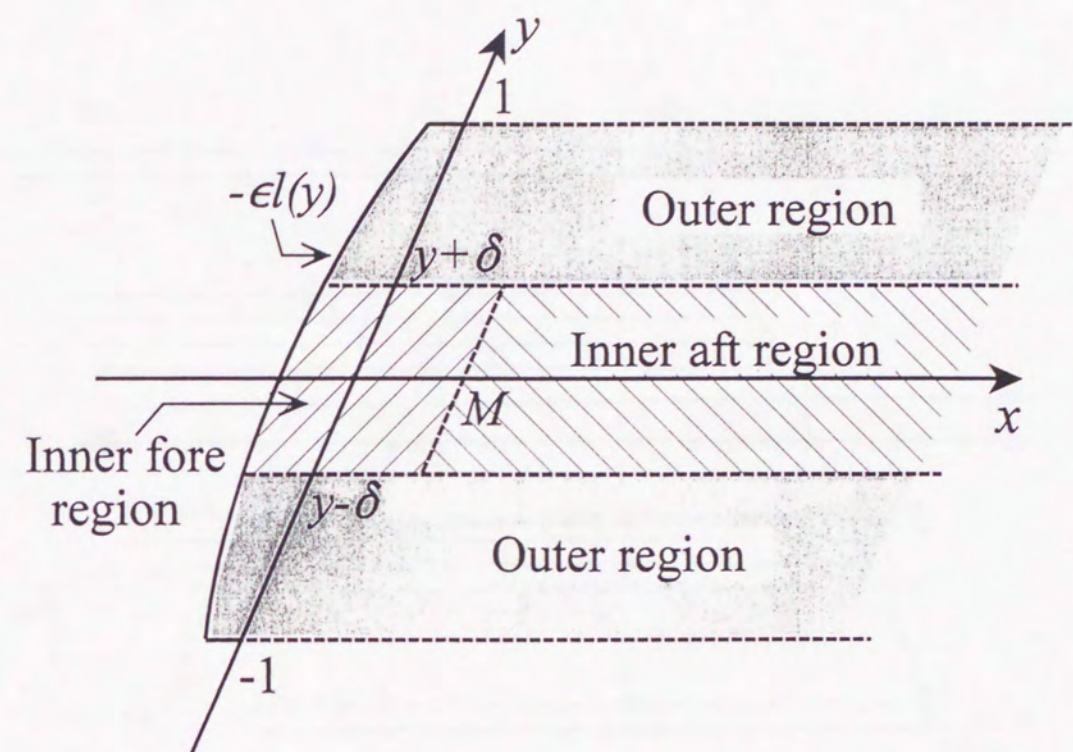


Fig.19 Definition of outer and inner region



Fig.20 Flow configuration in outer region represented by horseshoe vortices

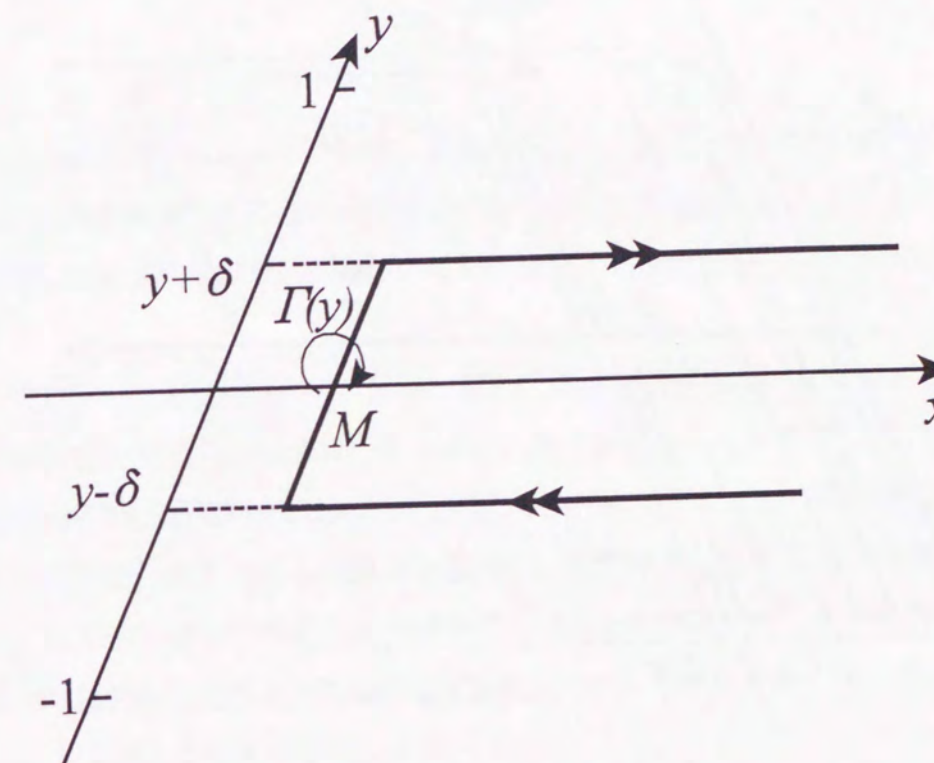


Fig.21 Flow configuration in inner off region represented by horseshoe vortex

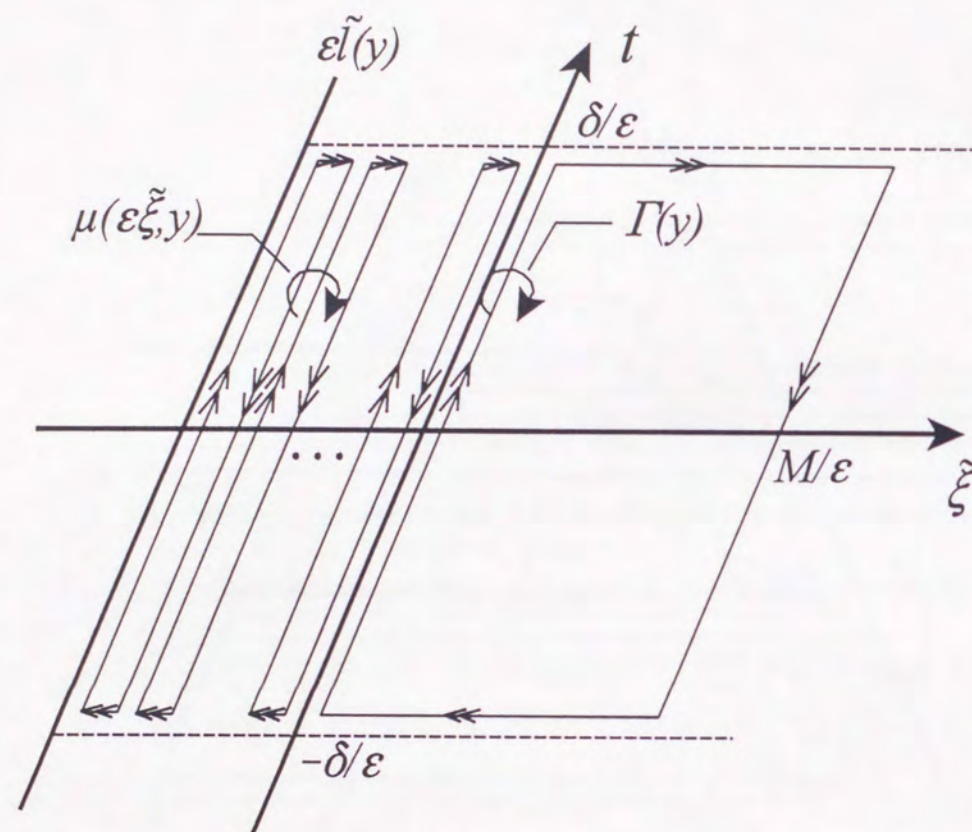


Fig.22 Flow configuration in inner fore region represented by vortex lattice

謝辞

本論文を終えるにあたって、貴重なご指導を賜り、主査としてご審査いただきました大阪大学教授浜本剛実先生に心からの感謝の意を表し、厚くお礼申し上げます。また、著者が研究室に配属されて以来、ご指導いただいた大阪大学教授鈴木敏夫先生に厚くお礼申し上げます。

本研究のテーマを著者に与え、終始一貫して温かいご指導をいただきました大阪大学助教授松村清重先生に心から感謝の意を表し、厚くお礼申し上げます。

論文提出の際ご審査いただきました大阪大学教授内藤林先生に厚くお礼申し上げます。多くのご助言、また折にふれ温かい激励をいただきました大阪大学助手鈴木博善先生、ならびに日立造船技術研究所の田中寿夫博士に心から感謝いたします。

大阪大学松村研究室の学生諸氏には本論論文の執筆のあたり多くのご協力をいただきました。心よりお礼申し上げます。

最後に、著者の心の支えでありつづけてくれた、著者の家族に深く感謝いたします。

