



Title	Perfect Crystals for $U_q(G_2(1))$
Author(s)	山根, 重紀
Citation	大阪大学, 1998, 博士論文
Version Type	
URL	https://hdl.handle.net/11094/41493
rights	
Note	著者からインターネット公開の許諾が得られていないため、論文の要旨のみを公開しています。全文のご利用をご希望の場合は、 ＜a href="https://www.library.osaka-u.ac.jp/thesis/#closed">https://www.library.osaka-u.ac.jp/thesis/#closed >大阪大学の博士論文についてをご参照ください。

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

氏 名	やまね しげのり 山 根 重 紀
博士の専攻分野の名称	博 士 (理 学)
学 位 記 番 号	第 1 4 1 7 4 号
学 位 授 与 年 月 日	平 成 10 年 10 月 14 日
学 位 授 与 の 要 件	学位規則第 4 条第 1 項該当 基礎工学研究科 数理系専攻
学 位 論 文 名	Perfect Crystals for $U_q(G_2^{(1)})$ ($U_q(G_2^{(1)})$ の完全結晶基底)
論 文 審 査 委 員	(主査) 教 授 伊 達 悦 朗 (副査) 教 授 亀 高 惟 倫 教 授 稲 垣 宣 生 教 授 中 村 佳 正 助教授 尾 角 正 人

論 文 内 容 の 要 旨

crystal base は量子展開環の構造を解析する 1 つの手段として導入され、量子展開環の組合せ論的な性質を扱うことができる。perfect crystal は affine リー環に関する量子展開環の crystal base で、格子模型の研究の応用等に用いられている。

既に affine リー環の中で、比較的構造の簡単な $A_n^{(1)}$ 型, $B_n^{(1)}$ 型等に関する量子展開環の表現で perfect crystal の構造を持つ例は、柏原等の研究により発見されている。しかしながら、一般的に構造の複雑な例外型リー環を affine 化したリー環に関する量子展開環の表現の中で、perfect crystal の構造を持つものは発見されていなかった。この度の研究では、例外型の中で最もランクの低い G_2 型を affine 化したリー環に関する量子展開環 $U_q(G_2^{(1)})$ の表現で、perfect crystal の構造を持つ例を見つけることができた。

この研究を行なうに当たって、与えられた表面が perfect crystal の構造を持つ可能性があるか、否かを判定するプログラムを作成した。まず、次元の低い表現でこれを用い、次元の高い表現で perfect crystal の構造を持つものを予想し、証明を行なった。主な結果は以下の通りである。

Proposition 任意の整数 $l \geq 1$ に対して $U_q(G_2)$ の crystal base として

$$b^*(B^l) \cong \bigoplus_{k=0}^l B(k\Lambda_1),$$

また、 $U_q(A_2)$ の crystal base として

$$b^*(B^l) \cong \bigoplus_{k=0}^{\lfloor \frac{l-1}{2} \rfloor} \bigoplus_{h \leq j_1, j_0 \leq l-h} B(j_1\Lambda_1 + j_0\Lambda_0),$$

となる $U_q(G_2^{(1)})$ としての crystal base B^l が存在する。

Theorem crystal base B^l は level l の perfect crystal である。

さらに、先ほどのプログラムを用いて $E_6^{(1)}$ 型, $F_4^{(1)}$ 型等についても perfect crystal の構造を持つ表現の例を予想することができた。

論文審査の結果の要旨

本論文は、アフィン量子展開環 $U_q(\mathfrak{g})$ 特に $U_q(G_2^{(1)})$ の完全結晶基底に関する研究の成果をまとめたものである。

アフィン量子展開環の完全結晶基底の概念はリー環に対応する二次元格子模型の一点関数の計算をめぐる研究のなかで導入されたものである。古典型のアフィン量子展開環に関してはいくつかの完全結晶基底の例の系列がみついている。しかしながら例外型のアフィン量子展開環に関しては例は知られていなかった。

本研究では与えられた量子展開環の有限次元表現が対応するアフィン量子展開環の表現に持ち上がるかどうか、さらにそのような場合に、対応する表現に組み合わせ的な意味で完全結晶基底が存在するかどうかを判定するプログラムを作成し、それをを用いての例の計算を通して完全結晶基底を持つ表現の候補の系列を見だし、例外型アフィン量子展開環のうちで一番小さい $U_q(G_2^{(1)})$ の場合にその候補が実際に完全結晶基底を持つことを証明している。

古典型のアフィン量子展開環の場合には対応する Dynkin 図形の対称性などを用いて完全結晶基底の存在が証明されているが、例外型の場合にはそのような対称性はない。本論文では、まず、上に述べたプログラムを用いた計算例を通して当該の表現の系列に関しては結晶基底が表現のレベルに関して入れ子の構造を持っているという実験事実を見いだしている。さらに、 $U_q(G_2^{(1)})$ の $U_q(A_2)$, $U_q(G_2)$ それぞれに同型な部分環の構造を巧みに用い、併せてこの実験事実を取り込むことにより完全結晶基底の存在を証明している。

以上のように本論文は、例外型のアフィン量子展開環の完全結晶基底の系列の存在に関して初めてまとめたものであり、博士（理学）の学位論文として価値あるものと認める。