

Title	Stability and bifurcation of circular Kirchhoff elastic rods
Author(s)	川久保, 哲
Citation	大阪大学, 2000, 博士論文
Version Type	
URL	https://hdl.handle.net/11094/41915
rights	
Note	著者からインターネット公開の許諾が得られていないため、論文の要旨のみを公開しています。全文のご利用をご希望の場合は、 〈a href="https://www.library.osaka-u.ac.jp/thesis/#closed"〉 大阪大学の博士論文について 〈/a〉 をご参照ください。

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

氏名	川久保 哲 ^{さとし}
博士の専攻分野の名称	博士(理学)
学位記番号	第 15137 号
学位授与年月日	平成12年3月24日
学位授与の要件	学位規則第4条第1項該当 理学研究科数学専攻
学位論文名	Stability and bifurcation of circular Kirchhoff elastic rods (円状の Kirchhoff 弾性棒の安定性と分岐)
論文審査委員	(主査) 教授 小磯 憲史 (副査) 教授 満洲 俊樹 教授 坂根 由昌 講師 大津 幸男

論文内容の要旨

放置したときに直線になるようなピアノ線を用意し、それを振って、その両断面を溶接して滑らかな閉曲線の形にする。この時、このピアノ線の輪はどのような形で安定あるいは平衡状態になるだろうか。本論文では Kirchhoff の数学的モデルを用いて上のようなことを考察した。具体的には、3次元 Euclid 空間内の速さが1の滑らかな閉曲線 γ と、 γ に沿った滑らかな単位法ベクトル場 M の組 $\{\gamma, M\}$ を考える。 ε を正定数とし、 k で γ の曲率を表す。曲げと振れによって蓄えられるエネルギー

$$F(\{\gamma, M\}) = \int_{\gamma} k^2 ds + \varepsilon \int_{\gamma} |\nabla_s^\perp M|^2 ds$$

が、溶接の仕方を定式化した準周期条件の下で臨界になるような $\{\gamma, M\}$ を閉振れ弾性曲線とよぶ。これは上のようなピアノ線の輪の平衡状態のモデルと考えられる。

閉振れ弾性曲線で最も簡単なものは γ が円で、 M が γ のまわりを角速度一定で回るものである。角速度の大きさに関らずこのような $\{\gamma, M\}$ はエネルギーの臨界点であるが、この $\{\gamma, M\}$ の安定性を考察し、次を得た。

定理 1. n を正の整数、 a, r を実数とし、 $\{\gamma, M\}$ を $\gamma(s)$ が半径 r の n 重の円で、 $M(s) = R(as)N(s)$ と表される閉振れ弾性曲線とする。ここで N は γ の単位主法線ベクトル場、 $R(\phi)$ は法束での角 ϕ の回転をあらわす。 $A(n, a, r)$ を $|m| < n\sqrt{1 + \varepsilon^2 a^2 r^2}$, $m \neq 0, m \neq \pm n$ をみたす整数 m の個数とする。 $\text{Ind}(\{\gamma, M\})$ で $\{\gamma, M\}$ の Morse 指数を表す時、次が成立する。

$$A(n, a, r) \leq \text{Ind}(\{\gamma, M\}) \leq 18A(n, a, r)$$

従って、 $n \geq 2$ ならば $\{\gamma, M\}$ は不安定である。また $n=1$ の時は、 $\varepsilon^2 a^2 r^2 < 3$ ならば安定であり、 $\varepsilon^2 a^2 r^2 > 3$ ならば不安定になる。

このことは次のような現象に対応している。ピアノ線を振らずに1重の円の形にすると、この場合は形は崩れない。そして少しずつ振っていても最初のうちは円の形を保ったままであるが、ある程度振ったところで不安定性が生じ、円の形を保てられなくなる。この時、ピアノ線がどのような形の曲線に変形していくのかということについては、Shi-Hearst (1994) や Langer-Singer (1996) と同様な楕円関数による表示を用いて、円からの分岐解に関する次の結果を得た。

定理 2. $r > 0$ とし、 m, n を $m > n$ をみたす正の整数とする。閉振れ弾性曲線の滑らかな族 $\{\gamma_\lambda, M_\lambda\}$ ($|\lambda| \ll 1$) で次を満たすものが構成できる。 γ_0 は半径 r の n 重の円であり、各 γ_λ は、 γ_0 を含む平面に垂直で γ_0 の中心を通るような直

線を軸とする角度 $2n\pi/m$ の回転で不変である。また、 m と n が互いに素で $n \neq 1$ ならば、各 $\lambda (\neq 0)$ に対して γ_λ は (m, n) トレース結び目である。さらに、ある条件の下では、円の閉捩れ弾性曲線からなる滑らかな変形は上で構成したものに限る。

論文審査の結果の要旨

弾性曲線は1次元弾性体のもっとも単純なモデルとして古くから研究されている。川久保君はまず閉じたねじれ弾性曲線を分類した。さらにそれを用いて、円にねじれを与えた場合に安定性がどのように変化するか、その結果形状がどのように変化するかを研究した。そして、安定性に関して数学的に厳密な評価を与え、それに関連して物理現象として生ずる分岐解の数学的定式化を与えた。

よって、本論文は博士（理学）の学位論文として十分価値あるものと認める。