

|              |  |
|--------------|--|
| Title        | Finite topological $T_0$ -spaces   |
| Author(s)    | 大崎, 隆夫   |
| Citation     | 大阪大学, 1999, 博士論文   |
| Version Type |  |
| URL          | <a href="https://hdl.handle.net/11094/41927">https://hdl.handle.net/11094/41927</a>  |
| rights       |  |
| Note         | 著者からインターネット公開の許諾が得られていないため、論文の要旨のみを公開しています。全文のご利用をご希望の場合は、 <a href="https://www.library.osaka-u.ac.jp/thesis/#closed">〈a href="https://www.library.osaka-u.ac.jp/thesis/#closed"〉</a> 大阪大学の博士論文について <a>〉</a> をご参照ください。 |

*Osaka University Knowledge Archive : OUKA*

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

|               |   |
|---------------|---|
| 氏 名           | おお 大 崎 隆 夫  |
| 博士の専攻分野の名称    | 博 士 (理 学)   |
| 学 位 記 番 号     | 第 1 4 8 6 3 号   |
| 学 位 授 与 年 月 日 | 平 成 11 年 6 月 30 日   |
| 学 位 授 与 の 要 件 | 学位規則第 4 条第 1 項該当<br>理学研究科 数学専攻  |
| 学 位 論 文 名     | Finite topological $T_0$ -spaces.<br>( $T_0$ -有限位相空間の研究)                        |
| 論 文 審 査 委 員   | (主査)<br>教 授 坂 根 由 昌<br>(副査)<br>教 授 川 久 保 勝 夫 教 授 難 波 誠 教 授 藤 木 明<br>助教授 大 和 健 二 |

## 論 文 内 容 の 要 旨

有限位相空間とは有限個の点からなる位相空間のことである。そのような空間というと離散空間としか思われませんが、そのような空間は離散有限集合よりは、はるかに豊富な体系である。例えば、1966年に McCord は有限位相空間は有限単体複体と同じホモロジー群、ホモトピー群を持つことを示した。実際には彼は  $T_0$  分離公理を満たすような有限位相空間  $X$  に対して有限単体複体  $K(X)$  でその幾何学的実現  $|K(X)|$  から  $X$  への弱ホモトピー同値写像が存在するようなものの存在を示した。さらに有限単体複体  $K$  から、有限位相空間  $\mathcal{X}(K)$  をつくる方法も示した。また Stong は  $T_0$  分離公理を満たすような有限位相空間に対して、そのホモトピー同値類がその空間の core と呼ばれる部分空間の同相類によって分類可能なことを示した。また Kronheimer は位相空間の部分空間に対してデジタルイメージと呼ばれるものを定義し、デジタルイメージからの再構成からデジタルイメージに関連する Grid と呼ばれる有限位相空間への弱ホモトピー同値写像の存在を示した。しかしこの再構成は元の位相空間の部分集合との関わりは解っていなかった。

第 1 部では、元の部分空間が  $\mathbf{R}^n$  に滑らかに埋め込まれた  $n$  次元コンパクト境界付き多様体  $M$  であるときに、この再構成が元の部分空間とホモトピー同値なるようする方法を考案した。この再構成というのは一種の  $n$  次元閉直方体による近似であるので、比較的簡単に求めることが出来、それ自身が CW-複体である。よって、このホモトピー同値によって  $M$  のホモロジー群の計算をすることが出来る。三角形分割や CW-複体分割が同相であるのに対してホモトピー同値しか成り立たないが、これらの方法と異なり自動的に計算するプロセスを確立している点では有利である。

上記のように有限単体複体や、多様体の研究に対して有効な有限位相空間が存在することが解ったので、第 2 部では有限位相空間そのものを考えます。有限位相空間  $X$  とその core  $X_0$  に対して  $K(X)$  は  $K(X_0)$  に単体的に縮約することが示される。これは例えば同じ多様体の三角形分割が 2 つあったときに実際に単体複体の幾何学的実現としては同相であるにもかかわらず、有限位相空間としてはホモトピー同値にすらならないということを示している。これでは有限位相空間の有限単体複体に対する研究手段としての価値がなくなってしまうので、この問題を解決するためにこの論文の目的である reduction という操作を定義する。

有限位相空間  $X$  の点  $x$  の最小開近傍  $U_x$  と任意の点  $y$  の最小開近傍  $U_y$  の共通部分が弧状連結かつ 1 次元以上のホモトピー群がすべて 0 になるならば、等化写像  $p: X \rightarrow X/U_x$  は弱ホモトピー同値写像になる。ここで最小開近傍とはその点を含むすべての開集合の共通部分のことをいう。この操作を open reduction とよび、 $or(x)$  と書く。最小開近傍を閉包と言い換えて定義されたものを closed reduction とよび、 $cr(x)$  と書く。

このようにして定義された reduction によって、対応する有限単体複体のホモトピー型は変わらない。また、それ自身が core であるような有限位相空間でも reduction によって、ホモトピー群を変えないで、点の数がより少ない空間へ簡約することが出来る。

## 論文審査の結果の要旨

デジタルトポロジーの研究は、1960年代の後半にまでさかのぼることができるが、1990年頃の Kronheimer らの仕事により位相幾何学の手法を用いたより深い研究が開始された。本論文では、第一部でユークリッド空間内のコンパクト境界付きの多様体に対してもとの多様体とホモトピー同値なデジタルイメージが構成できる窓割りが存在することを示した。すなわち、もとの多様体から  $T_0$ -有限位相空間の作成を機械的に行うプロセスを見出した。これに引き続き第二部では、 $T_0$ -有限位相空間に対して、弱ホモトピー同値な写像が存在するようなより小さな  $T_0$ -有限位相空間を考えると、対応する有限単体複体はホモトピー同値になることに着目して、開縮約および閉縮約の概念を導入した。これにより、core とは異なるより小さな  $T_0$ -有限位相空間を構成することができるようになり、 $T_0$ -有限位相空間の分類問題に新しい方法をもたらすことになった。以上により本論文は博士（理学）の学位論文として十分価値あるものと認める。