Title	EXISTENCE OF SPIN STRUCTURES ON DOUBLE BRANCHED COVERING SPACES OVER FOUR-MANIFOLDS
Author(s)	永見, 誠二
Citation	大阪大学, 2000, 博士論文
Version Type	
URL	https://hdl.handle.net/11094/41934
rights	
Note	著者からインターネット公開の許諾が得られていないため、論文の要旨のみを公開しています。全文のご利用をご希望の場合は、大阪大学の博士論文についてをご参照ください。

氏名	永見誠二（ながみせいじ）
博士の専攻分野の名称	博士（理学）
学位記番号	第 15139 号
学位授与年月日	平成12年3月24日
学位授与の要件	学位規則第4条第1項該当 理学研究科数学専攻
学位論文名	EXISTENCE OF SPIN STRUCTURES ON DOUBLE BRANCHED COVERING SPACES OVER FOUR-MANIFOLDS （4次元多様体上の2重分岐被覆空間のスピン構造の存在）
論文審査委員	（主査） 教授 藤木　明 （副査） 教授 坂根 由昌　教授 満渕 俊樹　教授 小磯 憲史 助教授 大和 健二　助教授 作間　誠

論文内容の要旨

4次元多様体上の分岐被覆空間がスピン構造を許容するための条件を求めることは重要な問題であるが、統一的な結果というものはいまだ求められていない。この論文の目的は与えられた4次元多様体上の連結曲面で分岐する2重分岐被覆空間がスピン構造を許容するための必要十分条件を明らかにする事である。厳密には次の問題を考える。

問：Xを向きづけられた可微分連結閉4次元多様体で$H_1(X;Z_2)=0$を満たすもの。FをXに滑らかに埋め込まれた連結閉曲面で、Fで分岐する2重分岐被覆空間$\tilde{X}$が存在するものとする。このとき、$\tilde{X}$がスピン構造を許容するための必要十分条件を求めよ。

この問に答えるためにまず$\tilde{X}$が存在するための必要十分条件を求める必要がある。

補助定理1：問の状況で$\tilde{X}$が存在する事とFのXでのZ_2係数ホモロジー類$[F]_2\in H_2(X;Z_2)$がきえることは同値。

補助定理1よりFが向きづけ可能である場合$\tilde{X}$の存在を仮定すればFのXでのホモロジー類$[F]\in H_2(X;Z)$が次の形で与えられる事がわかる。

$[F]=a_Fx_F+\phi_F$, $x_F\in H_2(X;Z)$ 原始的類、$\phi_F\in H_2(X;Z)$ ねじれ元、a_F 偶数。

以後、$\tilde{X}$は存在するものとする。まず設定をしておく。

W：FのXの中での開管状近傍の補空間、$\pi:\tilde{X}\to X$：被覆写像、$\tilde{F}=\pi^{-1}(F)$、$\tilde{W}=\pi^{-1}(W)$とおく。このとき次が成り立つ。

補助定理2：Fが向きづけ可能かつa_Fが4の倍数ならば$H_1(\tilde{W}:Z_2)=Z_2$かつ生成元はメリヂアン。それ以外の場合には$H_1(\tilde{W}:Z_2)=0$。

次の補助定理は基本的に重要である。

補助定理3：$w_2(\tilde{X})=\pi^*w_2(X)+[\tilde{F}]_2^*$。ここで、$[\tilde{F}]_2^*$は$\tilde{F}$のポアンカレ双対。

問の状況において次のように場合わけを行う。

1　Xがスピンである場合。2　Xがスピンでない場合。

1の場合。補助定理2より$w_2(\tilde{X})=[\tilde{F}]_2^*$である事が分かる。よって$[\tilde{F}]_2^*$が消えるための必要十分条件を求めればよい。補助定理2を使った幾何学的考察より、$[\tilde{F}]_2^*$が消える事と、Fが向きづけ可能かつa_Fが4の倍数である事が同値である事がわかる。つまりXがスピンである場合に次がなりたつ。

Fが向きづけ不可能ならば $\tilde{X}$ はスピンではない。また、Fが向きづけ可能ならば $\tilde{X}$ がスピンである事と、Fが特性的ホモロジー類の2倍となる事は同値。

2の場合。Fが向きづけ可能である場合、$\tilde{W}$がスピンである事と［F］が特性的ホモロジー類の2倍である事が同値である事が代数的手法によりわかる。よって $\tilde{X}$ がスピンであるためには［F］が特性的ホモロジー類の2倍である事が必要となる事がわかる。また逆に［F］が特性的ホモロジー類の2倍である場合、補助定理2、3を使った幾何学的考察により、$\tilde{X}$ がスピンとなる事がわかる。

またFが向きづけ不可能である場合、$\tilde{W}$がスピンとならない事が代数的手法によりわかる。

1と2の場合を統一して記述すると次の定理が得られる。

「定理：Xを向きづけられた可微分連結閉4次元多様体で $H_1(X;\mathbb{Z}_2)=0$ を満たすもの。FをXに滑らかに埋め込まれた連結閉曲面でFで分岐する2重分岐被覆空間 $\tilde{X}$ が存在するものとする。このとき

Fが向きづけ不可能ならば $\tilde{X}$ はスピンではない。

Fが向きづけ可能ならば $\tilde{X}$ がスピンである事と、［F］が特性的ホモロジー類の2倍となる事は同値。」

論文審査の結果の要旨

申請者は、向き付けられた4次元可微分多様体の二重分岐被覆について、これがスピン構造を許すための必要十分条件を、多様体の $\mathbb{Z}_2$- 係数2次ベッチ数が零である、という仮定のもとで、分岐曲面の定めるコホモロジー類ともとの多様体の特性元の関係として表した。

このような結果は、複素曲面に対して以外は、これまで統一的には得られておらず、博士（理学）の学位論文として十分価値あるものと認める。