氏名	青木尚代（あおきひさよ）
博士の専攻分野の名称	博士（理学）
学位記番号	第 15133 号
学位授与年月日	平成12年3月24日
学位授与の要件	学位規則第4条第1項該当 理学研究科数学専攻
学位論文名	Etale Endomorphisms of Smooth Affine Surfaces （非特異アファイン曲面のエタール自己準同型射について）
論文審査委員	（主査） 教授 宮西 正宜 （副査） 教授 日比 孝之　教授 藤木 明　教授 臼井 三平 助教授 今野 一宏

論文内容の要旨

Jacobian予想「アフィン空間 A^n の自己準同型射 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) : \mathrm{A}^n \to \mathrm{A}^n$ について、その Jacobian 行列式 $|\partial\alpha / \partial x|$ が非零定数であるとき、α は自己同型射である」を次のように一般化する。

一般 Jacobian 予想「複素数体上定義された非特異代数多様体 X のエタール自己準同型射 $\alpha : X \to X$ は有限射である」

本論文では、2次元のアフィン平面 A^2 上の既約代数曲線 C とその補空間 $X := \mathrm{A}^2 - C$ について、一般 Jacobian 予想が X について成立するかどうかを考えた。

$f = 0$ を C の定義式とするとき、X の対数的小平次元 $\bar{\kappa}(X)$ によって、f とエタール自己準同型射 $\alpha : X \to X$ は次のように分類できる。一般型の場合、すなわち、$\bar{\kappa}(X) = 2$ の場合には、α はいつも自己同型射になることが知られているので、ここでは考えない。

まず、$\bar{\kappa}(X) = -\infty$ の場合には、Abhyankar-Moh-鈴木の定理により、f は A^2 の座標 (x, y) の1つ $f = x$ と取れて、α は次のように定まる。

$$\alpha^*(x) = cx^n,\ a^*(y) = \frac{x^r y + g(x)}{x^m},\ c,\ g(x) \in \mathrm{C}[x].$$

従って、α は有限射となる。

$\bar{\kappa}(X) \geq 0$ の場合には、untwisted A^1_* －ファイブレーション $\rho : X \to B$ が存在することが分かる。ここで、$B \cong \mathrm{P}^1, \mathrm{A}^1, \mathrm{A}^1_*$ である。この A^1_* －ファイブレーションを用いて、f は次のように分類される。

(1) ρ が A^1_* －ファイブレーション $\tilde{\rho} : \mathrm{A}^2 \to \tilde{\mathrm{B}}$ に拡張できる場合。このとき、$\tilde{\rho}$ の一般ファイバーは generically rational polynomial で、C は ρ のファイバーの既約成分で、A^1_* に同型である。このとき、f も generically rational polynomial となり、次の形で表される。

(i) $f \sim x^a y^b + 1,\ a,\ b > 0,\ \gcd(a, b) = 1$。ここで、$a > 1,\ b > 1$ ならば $\bar{\kappa}(X) = 1$ であり、$a = 1$ または $b = 1$ ならば $\bar{\kappa}(X) = 0$ である。

(ii) $f \sim x^a (x^l y + p(x))^b + 1,\ a,\ b,\ l,\ > 0,\ \gcd(a, b) = 1,\ p(x) \in k[x],\ \deg p(x) < l,\ p(0) \neq 0$。ここで、$b > 1$ ならば $\bar{\kappa}(X) = 1$ であり、$b = 1$ ならば $\bar{\kappa}(X) = 0$ である。

(2) ρ が A^1 －ファイブレーション $\tilde{\rho} : \mathrm{A}^2 \to B$ に拡張できる場合。このとき、ρ の一般ファイバーは A^2 の中で閉でなく、1座点が加わって A^1 と同型な曲線となる。新たに加わる点は曲線 C 上の点で、曲線 C は A^1 －ファイブレー

ション$\tilde{\rho}$の切断（cross-section）となる。$B \cong \mathrm{A}^1$だから、$\tilde{\rho}$のファイバーはすべてA^1に同型になり、$x = \lambda$で定義されるとして良い。このとき、Cの定義式は

$$f(x, y) = a_0(x)y^n + a_1(x)y^{n-1} + \cdots + a_n(x)$$

とかけるが、Cが$\tilde{\rho}$の切断になっていることから、

$$f(x, y) \sim a_0(x)y + a_1(x),\ \gcd(a_0, a_1) = 1,\ \deg a_0(x) < \deg a_1(x)$$

という条件を満たす。このとき、いつも$\bar{\kappa}(X) = 1$である。

(3) ρがbase pointをもつlinear pencil Λに拡張される場合。このとき、ρの一般ファイバーのA^2における閉包は、A^1_*に1座点を加えた位相的可縮曲線となり、曲線CもΛのメンバーとなる。Lin-Zaidenbergの定理により、Λのメンバーは$x^m - \lambda y^n = 0$, $\gcd(m, n) = 1$とかける。ただし、$\lambda \in \mathrm{A}^1 \cup \{\infty\}$である。$C \cong \mathrm{A}^1_*$だから、その定義式は$f(x, y) \sim x^m - y^n$であるとして良い。このときも、$\bar{\kappa}(X) = 1$である。

上の4つの場合に、エタール自己準同型射$\alpha: X \to X$を定めることができるが、複雑であるので、$(1-i)$と(3)の場合にその形を与える。

$(1-i)$ $a > 1$, $b > 1$の場合は、αはいつも自己同型射である。$a = 1$または$b = 1$の場合には、$a = 1$としてよい。このとき、α^*は次のように与えられる。

$$\alpha^*(x) = r(xy^b+1)^u\frac{(xy^b+1)^m - 1}{y^b},\ \alpha^*(y) = sy(xy^b+1)^v.$$

ただし、$r, s \in k^*$, $u, v, m \in Z$で、次のどちらかの条件を満たす。

(†) $rs^b = 1,\ u + bv = 0,\ c = 1,\ w = m$

(††) $rs^b = -1,\ u + bv = -m,\ c = 1,\ w = -m.$

このとき、αは有限射ではない。

(3) このとき、αはいつも有限射になる。さらに、αは次のように定まる。

$$\alpha^*(x) = rf^u x,\ \alpha^*(y) = sf^v y.$$

ただし、$r, s \in k^*$, $r^n = s^m$, $u, v \in \mathrm{Z}$.

論文審査の結果の要旨

一般化されたJacobian予想「複素数体上定義された非特異代数多様体Xのエタール自己準同型射$\alpha: X \to X$は有限射である。」を、アフィン平面既約曲線Cの補集合$X := \mathrm{A}^2 - C$に対して検証した。これから$X = \mathrm{A}^2$の場合、既約曲線Cを保つようなエタール自己準同型射αは自己同型射になることが分かる。このように提出された論文は博士（理学）の学位論文として十分価値あるものと認める。