



Title	Etale Endomorphisms of Smooth Affine Surfaces
Author(s)	青木, 尚代
Citation	大阪大学, 2000, 博士論文
Version Type	
URL	https://hdl.handle.net/11094/41935
rights	
Note	著者からインターネット公開の許諾が得られていないため、論文の要旨のみを公開しています。全文のご利用をご希望の場合は、 ＜a href="https://www.library.osaka-u.ac.jp/thesis/#closed">https://www.library.osaka-u.ac.jp/thesis/#closed >大阪大学の博士論文についてをご参照ください。

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

氏 名	青 木 尚 代
博士の専攻分野の名称	博 士 (理 学)
学 位 記 番 号	第 1 5 1 3 3 号
学 位 授 与 年 月 日	平成 12 年 3 月 24 日
学 位 授 与 の 要 件	学位規則第 4 条第 1 項該当 理学研究科数学専攻
学 位 論 文 名	Etale Endomorphisms of Smooth Affine Surfaces (非特異アフィン曲面のエタール自己準同型射について)
論 文 審 査 委 員	(主査) 教 授 宮西 正宜 (副査) 教 授 日比 孝之 教 授 藤木 明 教 授 臼井 三平 助教授 今野 一宏

論 文 内 容 の 要 旨

Jacobian 予想「アフィン空間 A^n の自己準同型射 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n): A^n \rightarrow A^n$ について、その Jacobian 行列式 $|\partial\alpha/\partial x|$ が非零定数であるとき、 α は自己同型射である」を次のように一般化する。

一般 Jacobian 予想「複素数体上定義された非特異代数多様体 X のエタール自己準同型射 $\alpha: X \rightarrow X$ は有限射である」

本論文では、2次元のアフィン平面 A^2 上の既約代数曲線 C とその補空間 $X := A^2 - C$ について、一般 Jacobian 予想が X について成立するかどうかを考えた。

$f=0$ を C の定義式とすると、 X の対数的小平次元 $\bar{\kappa}(X)$ によって、 f とエタール自己準同型射 $\alpha: X \rightarrow X$ は次のように分類できる。一般型の場合、すなわち、 $\bar{\kappa}(X) = 2$ の場合には、 α はいつも自己同型射になることが知られているので、ここでは考えない。

まず、 $\bar{\kappa}(X) = -\infty$ の場合には、Abhyankar-Moh-鈴木の定理により、 f は A^2 の座標 (x, y) の 1 つ $f=x$ と取れて、 α は次のように定まる。

$$\alpha^*(x) = cx^n, \alpha^*(y) = \frac{x'y + g(x)}{x^m}, \quad c, g(x) \in \mathbb{C}[x].$$

従って、 α は有限射となる。

$\bar{\kappa}(X) \geq 0$ の場合には、untwisted A^1 -ファイブレーション $\rho: X \rightarrow B$ が存在することが分かる。ここで、 $B \cong P^1, A^1, A^1$ である。この A^1 -ファイブレーションを用いて、 f は次のように分類される。

(1) ρ が A^1 -ファイブレーション $\tilde{\rho}: A^2 \rightarrow \tilde{B}$ に拡張できる場合。このとき、 $\tilde{\rho}$ の一般ファイバーは generically rational polynomial で、 C は ρ のファイバーの既約成分で、 A^1 に同型である。このとき、 f も generically rational polynomial となり、次の形で表される。

(i) $f \sim x^a y^b + 1, a, b > 0, \gcd(a, b) = 1$ 。ここで、 $a > 1, b > 1$ ならば $\bar{\kappa}(X) = 1$ であり、 $a = 1$ または $b = 1$ ならば $\bar{\kappa}(X) = 0$ である。

(ii) $f \sim x^a (x'y + p(x))^b + 1, a, b, l > 0, \gcd(a, b) = 1, p(x) \in k[x], \deg p(x) < l, p(0) \neq 0$ 。ここで、 $b > 1$ ならば $\bar{\kappa}(X) = 1$ であり、 $b = 1$ ならば $\bar{\kappa}(X) = 0$ である。

(2) ρ が A^1 -ファイブレーション $\tilde{\rho}: A^2 \rightarrow B$ に拡張できる場合。このとき、 ρ の一般ファイバーは A^2 の中で閉でなく、1 座点加わって A^1 と同型の曲線となる。新たに加わる点は曲線 C 上の点で、曲線 C は A^1 -ファイブレーション

シヨン $\tilde{\rho}$ の切断 (cross-section) となる。 $B \cong A^1$ だから、 $\tilde{\rho}$ のファイバーはすべて A^1 に同型になり、 $x = \lambda$ で定義されるとして良い。このとき、 C の定義式は

$$f(x, y) = a_0(x)y^n + a_1(x)y^{n-1} + \cdots + a_n(x)$$

とかけるが、 C が $\tilde{\rho}$ の切断になっていることから、

$$f(x, y) \sim a_0(x)y + a_1(x), \gcd(a_0, a_1) = 1, \deg a_0(x) < \deg a_1(x)$$

という条件を満たす。このとき、いつも $\bar{\kappa}(X) = 1$ である。

- (3) ρ が base point をもつ linear pencil Λ に拡張される場合。このとき、 ρ の一般ファイバーの A^2 における閉包は、 A^1 に 1 座点を加えた位相的可縮曲線となり、曲線 C も Λ のメンバーとなる。Lin-Zaidenberg の定理により、 Λ のメンバーは $x^m - \lambda y^n = 0$, $\gcd(m, n) = 1$ とかける。ただし、 $\lambda \in A^1 \cup \{\infty\}$ である。 $C \cong A^1$ だから、その定義式は $f(x, y) \sim x^m - y^n$ であるとして良い。このときも、 $\bar{\kappa}(X) = 1$ である。

上の 4 つの場合に、エタール自己準同型射 $\alpha: X \rightarrow X$ を定めることができるが、複雑であるので、(1-i) と (3) の場合にその形を与える。

- (1-i) $a > 1, b > 1$ の場合は、 α はいつも自己同型射である。 $a = 1$ または $b = 1$ の場合には、 $a = 1$ としてよい。

このとき、 α^* は次のように与えられる。

$$\alpha^*(x) = r(xy^b + 1)^u \frac{(xy^b + 1)^m - 1}{y^b}, \quad \alpha^*(y) = sy(xy^b + 1)^v.$$

ただし、 $r, s \in k^*$, $u, v, m \in \mathbb{Z}$ で、次のどちらかの条件を満たす。

$$(\dagger) \quad rs^b = 1, u + bv = 0, c = 1, w = m$$

$$(\dagger \dagger) \quad rs^b = -1, u + bv = -m, c = 1, w = -m.$$

このとき、 α は有限射ではない。

- (3) このとき、 α はいつも有限射になる。さらに、 α は次のように定まる。

$$\alpha^*(x) = rf^u x, \quad \alpha^*(y) = sf^v y.$$

ただし、 $r, s \in k^*$, $r^n = s^m$, $u, v \in \mathbb{Z}$.

論文審査の結果の要旨

一般化された Jacobian 予想「複素数体上定義された非特異代数多様体 X のエタール自己準同型射 $\alpha: X \rightarrow X$ は有限射である。」を、アフィン平面既約曲線 C の補集合 $X := A^2 - C$ に対して検証した。これから $X = A^2$ の場合、既約曲線 C を保つようなエタール自己準同型射 α は自己同型射になることが分かる。このように提出された論文は博士 (理学) の学位論文として十分価値あるものと認める。