Title	Sur les représentations uniformément bornées et le théorème de convolution de Kunze-Stein
Author(s)	Lohoué, Noël
Citation	Osaka Journal of Mathematics. 1981, 18(2), p. 465-480
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/4194
rights	
Note	

Lohoue, N.
Osaka J. Math.
18 (1981), 465–480

SUR LES REPRESENTATIONS UNIFORMEMENT BORNEES ET LE THEOREME DE CONVOLUTION DE KUNZE-STEIN

NOËL LOHOUE

(Received December 12, 1979)

Le but de ce travail est de construire des représentations uniformément bornées des groupes de Lie semi-simples non compacts et de montrer comment en déduire aisément le théorème de convolution de Kunze-Stein pour les groupes de Lie semi-simples de rang un.

Nous montrons directement que certaines fonctions sont des multiplicateurs sur les espaces de la série complémentaire. Ce qui nous semble intéressant en soi, compte-tenu de certains espaces considérés par Folland et Stein sur les groupes de Lie nilpotents (voir [2]) et un théorème de Strichartz sur les espaces $\mathcal{L}^r_\alpha$ (voir [10]).

Le dernier théorème de cet article complète, le thèorème 2 de l'article [1] pour les groupes de rang un.

1. Préliminaire

1. Soit G un groupe de Lie semi-simple connexe, de centre fini, non compact. On considère une décomposition d'Iwasawa $G=KAN$.

Dans un premier temps, on suppose que la dimension de A est égale à un. On note $\mathcal{G}_\alpha$, resp. $\mathcal{G}_{2\alpha}$, le sous-espace radiciel, pour la racine positive α de dimension p, resp. 2α, de dimension q.

Soit $\rho=(p\alpha+2q\alpha)/2$ la demi-somme des racines positives comptées avec leur multiplicité. On note V le sous-groupe opposé à N par l'involution de Cartan. V s'identifie à $\boldsymbol{R}^p\times\boldsymbol{R}^q$ par l'application exponentielle et la mesure de Haar sur V est la mesure $dX\,dY$.

Soit $B=MAN$ où M est le centralisateur de A dans K. Alors presque tout $g\in G$ s'écrit $g=bv$, $b\in B$, $v\in V$. Pour tout $g\in G$, on note $b(g)$ la composante de g dans b. Soit w le seul élément non trivial du groupe de Weyl de G.

On note μ le caractère $\mu(a)=e^{2\rho[\log[(a)]}$ de A qui s'étend comme d'habitude en une fonction mesurable sur G. Par la suite on notera, pour tout $v\in V$, $|v|=\{\mu[b(vw)]\}^{-1/2(p+2q)}$.

2. Pour tout $0<\beta<1$, on considère l'opérateur d'entrelacement:

$$[\mathfrak{A}(\beta)f](v_0)=\frac{1}{\gamma(\beta)}\int_V \mu^{(1-\beta)/2}[b(vw)]f(vv_0)dv$$

où f est une fonction de classe $C_c^\infty(V)$ et:

$$\gamma(\beta)=\frac{\Gamma(p+q)\Gamma[(p+2q)\beta/2]\Gamma[\{(p+2q)\beta+p\}/4]}{\Gamma[(p+q)/2]\Gamma[\{(p+2q)\beta+p\}/2]\Gamma\{(p+2q)\beta/4+q/2\}}$$

Γ est la fonction spéciale classique.

On sait alors que l'application $\beta\mapsto[\mathfrak{A}(\beta)f](v_0)$ définie à priori dans la bande $0<Re\,\beta<1$, s'étend en une fonction méromorphe dans le plan complexe telle que:

$$\mathfrak{A}(-\beta)\mathfrak{A}(\beta)f=f.$$

On sait par ailleurs que si $0<\beta<1/(p+2q)$, l'opérateur $\mathfrak{A}(\beta)$ est défini positif: pour toute $f\in C_c^\infty(V)$, $\langle\mathfrak{A}(\beta)f,f\rangle=\int_V [\mathfrak{A}(\beta)f](v)\bar{f}(v)dv>0$.

Pour toute $f\in C_c^\infty(V)$ on pose:

$$\|f\|^2_{\mathcal{H}_{\pm\beta}(V)}=\langle\mathfrak{A}(\pm\beta)f,f\rangle$$

et on note $\mathcal{H}_{\pm\beta}(V)$ le complété de $C_c^\infty(V)$ pour la norme ci-dessus.

On définit une représentation unitaire $\pi_{\pm\beta}$ de G sur $\mathcal{H}_\beta$ par la formule:

$$\forall f\in\mathcal{H}_{\pm\beta},\ \pi_{\pm\beta}(g)f(v)=\{\mu[b(vg)]\}^{(1\pm\beta)/2}f[g(v)]\quad\text{où}\quad vg=b(vg)g(v).$$

3. Par ailleurs, on peut voir, d'après la formule 2 que la forme sesquilinéaire $(f,g)\to\int_V f(v)\bar{g}(v)dv$ identifie $\mathcal{H}_{+\beta}(V)$ au dual de $\mathcal{H}_{-\beta}(V)$ et que:

$$\left|\int_V f(v)\bar{g}(v)dv\right|\leqslant[\langle\mathfrak{A}(-\beta)f,f\rangle]^{1/2}[\langle\mathfrak{A}(\beta)g,g\rangle]^{1/2}.$$

Les résultats décrits ci-dessus sont implicitement contenus dans [5] et démontrés dans un preprint non publié de R. Lipsman. Nous les étudierons aussi en détail dans un travail en préparation.

Dans toute la suite k désignera une constante absolue.

Pour établir le résultat principal de ce travail, il nous semble utile d'introduire les espaces de Lorentz.

La notion de réarrangement décroissant d'une fonction sur un espace mesuré est classique en analyse; on pourra consulter le livre classique de E.M. Stein et Weiss ([11] page 189).

DÉFINITION. Soient f: $V\mapsto \boldsymbol{C}$ une fonction mesurable et f^* sa réarrangée décroissante. Soit (r, s) un couple de nombres réels

On note $L_{r,s}(V)$ l'espace des fonctions f telles que:

$$\|f\|_{r,s}^{s} = (s/r)\int_0^{+\infty} [t^{1/r}f^*(t)]^s \frac{dt}{t} < +\infty$$

quand $1 \leqslant r < +\infty$, $1 \leqslant s < \infty$, et

$$\|f\|_{r,s} = \sup_{t>0} t^{1/r}f^*(t) < \infty$$

quand $1 \leqslant r \leqslant \infty$, $s = +\infty$.

Nous voulons prouver le premier lemme suivant:

Lemme 1. *On pose* $r_\beta = 2/(1-\beta)$; *soit* f *une fonction de* $\mathcal{H}_{-\beta}(V)$ *alors*:

$$\|f\|_{r_\beta,2} \leqslant k\|f\|_{\mathcal{H}_{-\beta}(V)}.$$

Preuve du lemme.

La démonstration de ce résultat est une conséquence de l'assertion suivante: Soit $\alpha > 0$ et soit $E_\alpha = \{v \in V,\ \mu^{(1-\beta)/2}[b(vw)] > \alpha\}$ alors la mesure $|E_\alpha|$ de E_α ne dépasse pas $k\alpha^{-1/(1-\beta)}$.

Si l'on identifie V à $\boldsymbol{R}^p \times \boldsymbol{R}^q$ par l'application exponentielle, pour une constante c bien choisie, d'après [9],

$$\mu[b(\exp X \exp Y w)] = (c^2\|X\|^4 + c\|Y\|^2)^{-(p+2q)/2}.$$

On identifie E_α à son image réciproque par l'application exponentielle.

Alors $(X, Y) \in E_\alpha$ si et seulement si

$$(c^2\|X\|^4 + c\|Y\|^2)^{1/4} \leqslant \alpha^{-1/(1-\beta)(p+2q)}.$$

Par conséquent:

$$|E_\alpha| = c^{-((p+2q)/2)} \int_{\|x\|^4 + \|Y\|^2 \leqslant \alpha^{-4/(1-\beta)(p+2q)}} dX\, dY \leqslant k\alpha^{-1/(1-\beta)}.$$

Soit $s_\beta = \dfrac{2}{1+\beta}$, d'après le théorème de Hunt (voir [4]), il existe une constante k telle que pour toute $f \in C_c^\infty(V)$,

$$\|\mathcal{A}(\beta)f\|_{r_\beta,2} \leqslant k\|f\|_{s_\beta,2}.$$

Par ailleurs, on sait que $L_{s_\beta,2}(V)$ est l'espace dual de $L_{r_\beta,2}(V)$ d'après [4]; il s'en suit que:

$$|\langle \mathcal{A}(\beta)g, g\rangle| \leqslant k\|g\|_{s_\beta,2}^2,$$

où $g \in C_c^\infty(V)$.

La remarque 3 du préliminaire permet alors de conclure.

Proposition 2. *Soit φ: $V \mapsto \boldsymbol{C}$ une fonction mesurable et bornée; on pose:*

$$\Phi(v) = \int_V |\varphi((vv_1) - \varphi(v_1)|^2 \mu[b(v_1)]^{(1+\beta)/2} dv_1$$

où $0 < \beta$ *est un nombre réel* $< \dfrac{1}{p+2q}$.

Si Φ est dans $L_{1/\beta, \infty}(V)$, φ est un multiplicateur de $\mathcal{H}_\beta$: il existe une constante $k > 0$ telle que pour toute f dans $\mathcal{H}_\beta$, φf appartienne à $\mathcal{H}_\beta$ et $||\varphi f||_{\mathcal{H}_\beta} \leqslant k ||f||_{\mathcal{H}_\beta}$.

Preuve de la proposition.

La preuve de cette proposition découlera de l'expression locale de la norme $\mathcal{H}_{-\beta}$.

Expression locale de la norme dans $\mathcal{H}_{-\beta}$.

Soit $v = \exp X \exp Y$, $X \in \mathcal{G}_{-\alpha}$, $Y \in \mathcal{G}_{-2\alpha}$.

Soit f une fonction $C_c^\infty(V)$, trouvons une expression locale de la norme de f dans $\mathcal{H}_{-\beta}$.

Soit N un entier assez grand pour que le support de f soit contenu dans $S = \{v, |v| \leqslant N\}$ et tel que si v_1 et v_2 sont dans le support de f, $vv_1^{-1} \in S$. On note χ_S, la fonction caractéristique de S.

Exprimons:

$$\begin{aligned}
&\int_V \int_V |f(v) - f(v_1)|^2 \mu^{(1-\beta)/2}[b(vv_1^{-1}w)] \chi_S(vv_1^{-1}) dv dv_1 \\
&= \int_V \int_V |f(v)|^2 \mu^{(1-\beta)/2}[b(vv_1^{-1}w)] \chi_S(vv_1^{-1}) dv\, dv_1 \\
&+ \int_V \int_V |f(v_1)|^2 \mu^{(1-\beta)/2}[b(vv_1^{-1}w)] \chi_S(vv_1^{-1}) dv\, dv_1 \\
&- \int_V \int_V \bar{f}(v_1) f(v) \mu^{(1-\beta)/2}[b(vv_1^{-1}w) \chi_S(vv_1^{-1}) dv dv_1 \\
&- \int_V \int_V \bar{f}(v) f(v_1) \mu^{(1-\beta)/2}[b(vv_1^{-1}w)] \chi_S(vv_1^{-1}) dv\, dv_1 \\
&= I_1 + I_2 - I_3 - I_4
\end{aligned}$$

I_1 et I_2 sont de même nature, ainsi que I_3 et I_4.

$$\begin{aligned}
I_1 = I_2 &= ||f||^2_{L_2(V)} \int_V \mu^{(1-\beta)/2}[b(vw)] \chi_S(v) dv \\
&= ||f||^2_{L_2(V)} \int_{(c^2||X||^4 + c||Y||^2) \leqslant N^4} \frac{dX dY}{(c^2||X||^4 + c||Y||^2)^{(1-\beta)(p+2q)/4}} \\
&= \frac{c^{(p+2q)/2} N^{\beta(p+2q)}}{\beta(p+2q)} ||f||_2^2 .
\end{aligned}$$

Il s'en suit que:

$$\langle \mathcal{A}(\beta)f,f\rangle = -\frac{1}{2\gamma(\beta)}\iint_{V\times V}|f(v)-f(v_1)|^2\mu^{(1-\beta)/2}[b(vv_1^{-1}w)]\chi_S(vv_1^{-1})dv\,dv_1 + \frac{N^{\beta(p+2q)}}{\beta\gamma(\beta)(p+2q)}c^{(p+2q)/2}\|f\|_2^2 .$$

Montrons que la fonction, en la variable z:

$$I(z) = \frac{1}{\gamma(z)}\int_V\int_V |f(v)-f(v_1)|^2\mu^{(1+z)/2}[b(vv_1^{-1}w)]\chi_S(vv_1^{-1})dv\,dv_1$$

est analytique dans la bande $|Re\, z|<\dfrac{1}{p+2q}$; soit $\delta>0$.

Coupons $I(z)$ en deux morceaux:

$$\begin{aligned} I(z) &= \frac{1}{\gamma(z)}\int_V\int_{(c^2\|X\|^4+c\|Y\|^2)<\delta^4}\frac{|f(\exp X\exp Y\exp U)-f(\exp U)|^2}{(c^2\|X\|^4+c\|Y\|^2)^{(p+2q)(1+z)/4}} \\ &\quad \chi_S(\exp X\exp Y)dX\,dY\,dU \\ &+\frac{1}{\gamma(z)}\int_V\int_{(c^2\|X\|^4+c\|Y\|^2)\geqslant\delta^4}\frac{|f(\exp X\exp Y\exp U)-f(\exp U)|^2}{(c^2\|X\|^4+c\|Y\|^2)^{(p+2q)(1+z)/4}} \\ &\quad \chi_S(\exp X\exp Y)dX\,dY\,dU \\ &= I^1(z)+I^2(z). \end{aligned}$$

Pour prouver que I^1 est analytique, considérons $0<\varepsilon<\delta$; il suffit de voir que la fonction

$$\begin{aligned} I_\varepsilon(z) &= \frac{1}{\gamma(z)}\int_V\int_{\varepsilon<(c^2\|X\|^4+c\|Y\|^2)^{1/4}\leqslant\delta}\frac{|f(\exp X\exp Y\exp U)-f(\exp U)|^2}{(c^2\|X\|^4+c\|Y\|^2)^{(p+2q)(1+z)/4}} \\ &\quad \chi_S(\exp X\exp Y)dX\,dY\,dU \end{aligned}$$

est analytique dans cette bande et que pour tout $0<\beta_0<\dfrac{1}{p+2q}$, il existe une constante k ne dépendant pas de ε, telle que

$$|I_\varepsilon(z)|\leqslant k,\quad \text{pour tout } z;\ |Re\, z|<\beta_0,\ |Im\, z|<\beta_0 .$$

Car le résultat à prouver découlera de la formule de Cauchy et du théorème de convergence dominée de Lebesgue.

On note ∇f le gradient de f et l'on remarque que:

$$\begin{aligned} |f(\exp X\exp Y\exp U)-f(\exp U)| &\leqslant (\|X\|^2+\|Y\|^2)^{1/2}\|\nabla f\|_\infty \\ &\leqslant k(c^2\|X\|^4+c\|Y\|^2)^{1/4}\|\nabla f\|_\infty . \end{aligned}$$

Il est clair que l'intégrant dans I_ε est non nul si et seulement si U est dans un compact fixe, R qui ne dépend pas de ε. Par ailleurs pour tout z, $|Re\, z|<\beta_0$, si δ a été choisi assez petit,

$$|I_\varepsilon(z)| \leqslant \frac{k^2}{|\gamma(z)|}\int_R \int_{c^2\|X\|^4+c\|Y\|^2<\delta^4} \frac{dX\,dY\,dU}{(c^2\|X\|^4+c|Y\||^2)^{[(1+\beta)(p+2q)]/4}}$$
$$\leqslant \frac{k}{|\gamma(z)|}\,\delta^{1-\beta_0(p+2q)}\,.$$

Puisque $\dfrac{1}{\gamma(x)}$ est une fonction continue dans la bande considérée, on voit bien que $|I_\varepsilon(z)|\leqslant k''$. On a d'ailleurs prouvé que $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon(z)$ vaut $I^1(z)$, puisque l'intégrant est majoré par une fonction intégrable, d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue. Il est facile de prouver l'analyticité de I^2 dans la bande considérée.

Par prolongement analytique, on voit que:

$$\langle \mathfrak{A}(-\beta)f,f\rangle = -\frac{1}{2\gamma(-\beta)}\int_V\int_V |f(vv_1)-f(v_1)|^2\mu^{(1+\beta)/2}[b(vw)]\chi_S(v)dv\,dv_1$$
$$-\frac{1}{\gamma(-\beta)\beta}N^{-\beta(p+2q)}c^{(p+2q)/2}\|f\|_2^2\,.$$

3. Montrons que φ est un multiplicateur de $\mathcal{H}_\beta$.

Pour cela, il suffit de prouver que φ est un multiplicateur de $\mathcal{H}_{-\beta}$. Soit f une fonction $C_c^\infty(V)$, il faut estimer $\langle\mathfrak{A}(-\beta)\varphi f,\varphi f\rangle=\|\varphi f\|^2_{\mathcal{H}_{-\beta}}$; choisissons un N assez grand, adapté au support de f comme dans la première partie et considérons l'expression:

$$[I_N(\beta)(\varphi f)]^2 = -\frac{1}{\gamma(-\beta)\beta}c^{(p+2q)/2}N^{-\beta(p+2q}\|\varphi f\|_2^2$$
$$-\frac{1}{2\gamma(-\beta)}\int_V\int_V |(\varphi f)(vv_1)-(\varphi f)(v_1)|^2\mu^{(1+\beta)/2}[b(vw)]\chi_S(v)dvdv_1$$

qui est visiblement dominée par:

$$-\frac{1}{\gamma(-\beta)\beta}c^{(p+2q)/2}N^{-\beta(q+2q)}\|f\|_2^2\|\varphi\|_\infty^2$$
$$-\frac{1}{\gamma(-\beta)}\int_V\int_V |f(vv_1)-f(v_1)|^2\mu^{(1+\beta)/2}[b(vw)]\chi_S(v)dv\,dv_1\|\varphi\|_\infty^2$$
$$-\frac{1}{\gamma-(\beta)}\int_V |f(v_1)|^2\Phi(v_1)dv\,.$$

Mais $f\in L_{2/(1-\beta),2}$ d'aprés le lemme 1, par conséquent $|f|^2\in L_{1/(1-\beta),1}$ ce qui prouve bien que

$$-\frac{1}{\gamma(-\beta)}\int_V |f(v_1)|^2\Phi(v_1)dv_1\leqslant \mathrm{cste}\|f\|^2_{\mathcal{H}_{-\beta}}\|\Phi\|_{L_{1/\beta,\infty}}$$

d'après la dualité $L_{1/\beta,\infty}$, $L_{1/(1-\beta),1}$

et:
$$[I_N(\varphi f)]^2 \leqslant \{\|\varphi\|_\infty^2 + \|\Phi\|_{L_{1/\beta,\infty}}\} \|f\|^2_{\mathcal{H}_{-\beta}}.$$

d'après l'expression locale de la norme dans $\mathcal{H}_{-\beta}$.

Pour terminer la preuve de la proposition, il suffit de prouver le:

Lemma 3. *Soit f une fonction mesurable sur V, à support compact. On suppose qu'il existe $N>0$ grand par rapport à la taille du support de f tel que $I_N(\beta)f$ soit finie et inférieure à une constante k. Alors f est dans $\mathcal{H}_{-\beta}$ et sa norme ne dépasse pas k.*

Preuve. La preuve de ce lemme découlera d'une régularisation standard.

Soit h_ε une approximation de l'unité de $L_1(V)$, avec $h_\varepsilon \in C_c^\infty(V)$. Comme N est grand par rapport au support de f; on peut supposer que pour tout $\varepsilon>0$, le support de $f*h_\varepsilon$ est contenu dans $\{v, |v| \leqslant N\}$.

Puisque $\|f*h_\varepsilon\|_2 \leqslant \|f\|_2$, il suffit de contrôler la seconde quantité qui intervient dans la définition de $I_N(\beta)(f)$.

D'après la formule de Plancherel, pour une certaine mesure γ sur $\hat{V}$, on a:

$$\begin{aligned}
&\int_V \int_V |f*h_\varepsilon(vv_1) - f*h_\varepsilon(v_1)|^2 \mu^{(1+\beta)/2}[b(vw)] \chi_S(v) dv\, dv_1 \\
&= \int_V \mu^{(1+\beta)/2}[b(vw)] \chi_S(v) \int_{\hat{V}} \|[\Pi(v)-1] o \hat{f}(\Pi) o \hat{h}_\varepsilon(\Pi)\|^2_{\mathcal{HS}} d\gamma(\Pi) dv \\
&\leqslant \int_V \mu^{(1+\beta)/2}[b(vw)] \chi_S(v) \int_{\hat{V}} \|\Pi(v)-1] o \hat{f}(\Pi)\|^2_{\mathcal{HS}} d\gamma(\Pi) dv \\
&= \int_V \int_V \mu^{(1+\beta)/2}[b(vw)] \chi_S(v) |f(vv_1) - f(v_1)|^2 dv\, dv_1 .
\end{aligned}$$

Comme $\dfrac{1}{\gamma(-\beta)} < 0$ pour $0 < \beta < \dfrac{1}{(p+2q)}$, on voit bien que

$$I_N(\beta)(f*h_\varepsilon) \leqslant I_N(\beta) f \leqslant k .$$

D'autre part, comme $f*h_\varepsilon$ est de classe $C_c^\infty(V)$, l'expression locale de la norme dans $\mathcal{H}_{-\beta}$ prouve que la norme de $f*h_\varepsilon$ dans $\mathcal{H}_{-\beta}$ vaut $I_N(\beta)(f*h_\varepsilon)$. Par passage à la limite, on voit bien que f est dans $\mathcal{H}_{-\beta}$ et que sa norme ne dépasse pas k.

Déduisons de cette proposition le:

Corollaire 1. *Soit φ: $V \to \boldsymbol{C}$ une fonction continue, pour tout $\varepsilon>0$ et tout $v = \exp X \exp Y$, on pose $\varphi_\varepsilon(v) = \varphi(\exp \varepsilon X \exp \varepsilon^2 Y)$.*

Si φ est une fonction de la classe $C_c^\infty(V)$ alors φ_ε est un multiplicateur de

---

* $\|\ \|_{\mathcal{HS}}$ est la norme Hilbert-Schmidt.

$\mathcal{H}_\beta$, $|\beta|<1/(p+2q)$, *dont la norme ne dépasse pas une constante absolue* k_0 *indépendante de* ε.

Preuve. Estimons:

$$\Phi(x) = \int_V |\varphi(xv)-\varphi(x)|^2 \mu^{(1+\beta)/2}[b(vw)]dv .$$

Soit $E_\varphi = \{v \in V,\ \varphi(v)=0\}$ et soit k_φ la borne supérieure des pseudo-normes $|v|$ lorsque v parcourt E_φ Soit k très grand devant k_φ.

a) Etudions la fonction Φ.

1) Pour cela posons, quand $|x| \leqslant k$:

$$I_1(x) = \int_{|v|\leqslant|x|} |\varphi(xv)-\varphi(x)|^2 \{\mu[b(vw)]\}^{(1+\beta)/2} dv$$

$$I_2(x) = \int_{|v|\geqslant|x|} |\varphi(xv)-\varphi(x)|^2 \{\mu[b(vw)]\}^{(1+\beta)/2} dv .$$

Alors:

$$\Phi(x) \leqslant I_1(x) + I_2(x)$$

et:

$$I_2(x) \leqslant k_1 \int_{|v|\geqslant|x|} \mu^{(1+\beta)/2}[b(vw)]dv = k_1' |x|^{-(p+2q)\beta}$$

Où k_1 et k_1' sont des constantes absolues.

Par ailleurs d'après la formule des accroissements finis,

$$|\varphi(xv)-\varphi(x)| < k_2' |v| \, ||\nabla\varphi||_\infty .$$

Par conséquent:

$$I_1(x) \leqslant k_2' \int_{|v|<|x|} |v|^2 |v|^{-(p+2p)(1+\beta)} dv \leqslant k_2 |x|^{-\beta(p+2q)} .$$

2) Si $|x| > k$, $\varphi(x)=0$, car k est grand; il reste à estimer:

$$\int_V |\varphi(xv)|^2 \mu^{(1+\beta)/2}[b(vw)]dv .$$

Pour que $\varphi(xv) \neq 0$, il faut que xv soit dans le support de φ et si l'on a choisi k assez grand, on va voir qu'il existe une constante $k_3 > 0$ telle que $|v| \geqslant k_3 |x|$.

En effet, on sait d'après [5] lemme 7, qu'il existe une constante k_3' telle que $\left|1-\left(\frac{|xv|}{|x|}\right)^{(p+2q)}\right| \geqslant k_3' \frac{|v|}{|x|}$ dès que $|v| < |x|$.

De deux choses l'une:

(i) $|v| \geqslant |x|$; ii) $|v| < |x|$.

Sous la seconde hypothèse, puisque k_φ est très petit devant k, $k_3''=1-(k_\varphi/k)^{p+2q}$ est positif et $(k_3''/k_3')|x|\leqslant|v|$. Soit k_3 le minimum de k_3''/k_3' et 1; on voit facilement que $|v|>k_3|x|$.

Il s'en suit que:

$$\int_V |\varphi(xv)|^2\mu^{(1+\beta)/2}[b(vw)]\leqslant\|\varphi\|_\infty\int_{k_3|x|}^{+\infty}\frac{dt}{t^{1+\beta(p+2q)}}=k_4|x|^{-\beta(p+2q)}.$$

1 et 2 prouvent que $\Phi(x)\leqslant k_5|x|^{-\beta(p+2q)}$ pour tout x différent de l'élément neutre 1 de V.

3) Un calcul élémentaire montre, grâce à 1 et 2 que Φ est dans $L_{1/\beta,\infty}(V)$; par conséquent φ est un multiplicateur de $\mathcal{H}_\beta(V)$ d'après la proposition.

b) Pour terminer la preuve du corollaire, il reste à voir que la norme dans $L_{1/\beta,\infty}(V)$ de la fonction:

$$\Phi_\varepsilon(x)=\int_V|\varphi_\varepsilon(xv)-\varphi_\varepsilon(v)|^2\mu^{(1+\beta)/2}[b(vw)]dv$$

est dominée par une constante indépendante de ε.

Soit $v\in V$, $v=\exp X\exp Y$, alors il est facile de voir que:

$$\Phi_\varepsilon(\exp X\exp Y)=\varepsilon^{-(p+2q)\beta}\Phi(\exp\varepsilon X\exp\varepsilon^2 Y).$$

Comme Φ est dans $L_{1/\beta,\infty}(V)$, il est facile de vérifier, à partir de la formule ci-dessus, l'assertion que nous voulons prouver.

Corollaire 2. *Soit t un nombre réel, alors la fonction Ψ_t, $\Psi_t(v)=\mu^{it}[b(vw)]$, est un multiplicateur de $\mathcal{H}_\beta(V)$.*

Preuve. Montrons que la fonction

$$\Psi_t(x)=\int_V|\psi_t(xv)-\psi_t(x)|^2\mu^{(1+\beta)/2}[b(vw)]dv$$

est dans $L_{1/\beta,\infty}(V)$ et appliquons le résultat de la proposition.

Soit s un nombre réel que nous choisirons aussi grand que nous voulons. Soit k_3' la constante donnée par le lemme 7 de [5]: pour tout couple (v,x) de points dans V tels que $|v|<|x|$, la valeur absolue de $1-(|xv|/|x|)^{p+2q}$ ne dépasse pas $k_3'\ |v|/|x|$.

Distinguons deux cas:

i) $|t|<1/(p+2q)$, nous allons décomposer Ψ_t en deux morceaux:

$$\Psi_t(x)=\int_{|v|<(10^{-s}/k_3')|x|}|\psi_t(xv)-\psi_t(x)|^2\mu^{(1+\beta)/2}[b(vw)]dv$$
$$+\int_{|v|>(10^{-s}/k_3')|x|}|\psi_t(xv)-\psi_t(x)|^2\mu^{(1+\beta)/2}[b(vw)]dv.$$

ii) $|t|>1/(p+2q)$, on pose:

$$\Psi_t(x)=\int_{|v|\leqslant\{10^{-s}|x|\}/\{k_3'|t|(p+2q)\}}|\psi_t(xv)-\psi_t(x)|^2\mu^{(1+\beta)/2}[b(vw)]dv$$
$$+\int_{|v|\geqslant\{10^{-s}|x|\}/\{k_3'|t|(p+2q)\}}|\psi_t(xv)-\psi_t(x)|^2\mu^{(1+\beta)/2}[b(vw)]dv\,.$$

A de légères modifications près, i se traite comme ii; nous nous occuperons seulement de ii. Pour cela nous écrirons $\Psi_t=I_1+I_2$ où chaque terme a une définition évidente d'après le découpage ci-dessus.

Si l'on choisit s assez grand, on peut supposer, dans I_1 que $|v|<|x|/4$; il est alors facile de vérifier que:

$$I_1(x)\leqslant k_6|t|^2\int_{|v|\leqslant\{10^{-s}|x|\}/\{k_3'(|t|)(p+2q)\}}\left[\log\left(\frac{|xv|}{|x|}\right)^{p+2q}\right]^2\mu^{(1+\beta)/2}[b(vw)]dv$$
$$\leqslant k_6'|t|^2\int_{|v|\leqslant\{10^{-s}|x|\}/\{k_3'(|t|)(p+2q)\}}\left[1-\left(\frac{|xv|}{|x|}\right)^{p+2q}\right]^2\mu^{(1+\beta)/2}[b(vw)]dv\,.$$

Le passage de l'avant dernière ligne à l'inégalité ci-dessus résulte du fait que $\mathrm{Log}(1+u)\leqslant k_6''|u|$, si $|u|<1/4$.

Nous avons l'inégalité suivante d'après [5]

$$I_1(x)\leqslant\frac{|t|^2}{|x|}\int_{|v|\leqslant 10^{-s}\{(|x|)\}/\{k_1'|t|(p+2q)\}}[c^2\|X\|^4+c\|Y\|^2]^{1-[(1+\beta)(p+2q)]/4+1}dX\,dY$$
$$\leqslant k_6'''|t|^{\beta(p+2q)}|x|^{-\beta(p+2q)}\,.$$

Par ailleurs, on a une inégalité analogue pour I_2.

Il s'en suit que pour tout x différent de l'élément neutre de V,

$$\Psi_t(x)\leqslant k_6'''|x|^{-\beta(p+2q)}(1+|t|)|^{\beta(p+2q)/2}\,.$$

Par conséquent Ψ_t est dans $L_{1/\beta,\infty}(V)$, ce qui termine la preuve du corollaire.

Remarquons qu'il est facile de voir que la norme de Ψ_t comme endomorphisme de $\mathcal{H}_\beta$ ne dépasse pas $k_7(1+|t|)^{\beta(p+2q)/2}$.

Pour énoncer le dernier résultat de cette partie nous aurons besoin de la:

DÉFINITION. *Soit g un point de G et soit z un nombre complexe. On définit un opérateur π_z sur les fonctions $C_c^\infty(V)$ par la formule*:

$$(\pi_z(g)f)(v)=\mu^{(1+z)/2}[b(vg)]f[g(v)]$$

où $vg=b(vg)g(v)$ est la décomposition indiguée au paragraphe 1.

REMARQUE. Comme la décomposition $G=MANV$ n'est pas, en général vraie, pour tout vg, nous adoptons ici la convention classique (voir [5]).

Nous avons le résultat suivant:

Théorème 4. *Soit $z=\beta+it$, avec $0<\beta<1/(p+2q)$, alors π_z est uniformément bornée sur $\mathcal{H}_\beta$: il existe une constante $k>0$ telle que*:

$$||\pi_{\beta+it}(g)f||_{\mathcal{H}_\beta}\leqslant k(1+|t|)^{\beta(p+2q)/2}||f||_{\mathcal{H}_\beta}.$$

Preuve du théorème.

Ce théorème est une simple conséquence du corollaire 2. En effet, nous allons voir que $\pi_{\beta+it}$ est une représentation uniformément bornée sur $\mathcal{H}_\beta(V)$ si et seulement si Ψ_t est un multiplicateur de $\mathcal{H}_\beta(V)$ ou ce qui revient au même, si $\pi_{\beta+it}(wv)$ est un opérateur borné sur $\mathcal{H}_\beta(V)$. Pour cela, nous reprenons un argument de R. Lipsman.

1) Soit $\bar{B}=MAV$, alors la restriction de $\pi_{\beta+it}$ à $\bar{B}$ est unitaire.

a) Si $g\in V$, $b(vg)$ est l'élément neutre de MAN, pour tout $v\in V$; par conséquent, $\pi_{\beta+it}(g)$ vaut l'opérateur unitaire $\pi_\beta(g)$ sur $\mathcal{H}_\beta$ de l'introduction.

b) Si $g\in M$, $\pi_{\beta+it}(g)=\pi_\beta(g)$ et on a encore un opérateur unitaire sur $\mathcal{H}_\beta$.

c) Si $g=d\in A$, pour tout $v\in V$, $b(vg)=d$, $\pi_{\beta+it}(g)=e^{it\log(d)}\pi_\beta(g)$; on a alors la même conclusion qu'en a) et b) puisque $|e^{it\log(d)}|=1$.

2) D'après la décomposition de Bruhat, $G=\bar{B}\cup\bar{B}w\bar{B}$: l'assertion à prouver est alors une simple conséquence de 1).

REMARQUES.

a) On déduit facilement du théorème, d'après la dualité $(\mathcal{H}_\beta, \mathcal{H}_{-\beta})$ que

$$||\Pi_{-\beta+it}(g)f||_{\mathcal{H}_{-\beta}}\leqslant k(1+|t|)^{\beta(p+2q)1/2}||f||_{\mathcal{H}_{-\beta}}.$$

b) D'après un résultat non publié de R. Lipsman, ce théorème prouve aussi l'existence des représentations uniformément bornées pour un groupe de Lie semi-simple, non compact quelconque, non équivalentes à une représentation unitaire. Nous rentrerons dans les détails dans un autre article.

2. Construction d'une famille analytique d'opérateurs

Nous nous proposons de construire une famille analytique d'opérateurs, pour obtenir des estimations L_r des coefficients d'une des représentations de la série principale.

Pour cela nous aurons besoin des:

1°) *Notations.*

Soit $S_n=\{v\in V, |v|\leqslant n\}$; soient χ_n^0 la fonction caractéristique de S_n et χ_n celle de $S_n\, S_n^{-1}$. Soit $0<\beta<\dfrac{1}{p+2q}$.

On pose $\mu_n(v)=\mu^{(1-\beta)/2}[b(vw)]\chi_n(v)$ et pour toute $f\in L_2(V)$, on définit

$$K_nf(v)=\chi_n^0(v)\int_V \mu_n(v'\,v^{-1})\chi_n^0(v')f(v')dv'.$$

Remarquons alors que:

i) Si f est à support dans S_n, $\langle K_n f, f\rangle = \langle \mathfrak{A}(\beta) f, f\rangle > 0$.

ii) Soit r_ε une approximation de l'unité, $C_c^\infty(V)$,

Comme $\lim_{\varepsilon\to 0} \|\mu_n * r_\varepsilon - \mu_n\|_{L_1(V)} = 0$, il est clair que K_n est un opérateur compact dans $L_2(S_n)$.

iii) Il s'en suit qu'il existe une base orthonormée $\{\varphi_l\}$ de $L_2(S_n)$ et une suite α_l de nombre strictement positif (car K_n est positif) tel que: pour toute $f \in L_2(S_n)$

$$K_n f(v) = \sum \alpha_l a_l \varphi_l(v)$$

où les a_l sont les coefficients de f par rapport à la base $\{\varphi_l\}$.

2°) Pour tout z, dans la bande $|Re\, z| < \beta$, on définit l'opérateur K_n^z sur $L_2(V)$ par la formule:

2.1 $$K_n^z f(v) = \sum_0^\infty \alpha_l^{z/\beta} a_l \varphi_l(v) \quad \text{où} \quad a_l = \int_{S_n} f(v) \bar{\varphi}_l(v) dv\,.$$

Soit h: $V \to \boldsymbol{C}$ une fonction C_c^∞ qui vaut 1 sur un voisinage de l'élément neutre de V, à support contenu dans $\{v, |v| \leqslant 1\}$.

On note B_n l'opérateur de multiplication par la fonction

$$h_n(\exp X \exp Y) = h\left(\exp \frac{1}{n} X \exp \frac{1}{n^2} Y\right).$$

Pour éviter des vérifications fastidieuses et inutiles par la suite, posons:

$$K_{m,n}^z f(v) = \sum_0^m \alpha_l^{z/\beta} a_l \varphi_l(v)$$

où les a_l sont définis comme précédemment (2.1).

Si $g \in G$, définissons

$$R_{m,n}^z(g) = K_{m,n}^{z/2} B_{n/2} \pi_z(g) B_{n/2} K_{m,n}^{-z/2}$$

où π_z est la représentation définie précédemment.

Nous prouverons alors le:

Lemme 5. *Pour tout couple* (U_1, U_2) *de fonctions de* $L_2(V)$, $\langle R_{m,n}^z(g) U_1, U_2\rangle$ *est une fonction analytique dans la bande* $|Re\, z| < \beta$ *et*

$$\sup_{g\in G} |\langle R_{m,n}^z(g) U_1, U_2\rangle| \leqslant k_1(1 + |Im\, z|)^{\beta(p+2q)/2} \|U_1\|_2 \|U_2\|_2\,.$$

Preuve. Nous remarquerons d'abord que pour toute fonction f à support dans S_n,

$$\|K_n^{(\beta+it)/2} f\|_2 = \|f\|_{\mathcal{H}_\beta}; \ \|K_n^{-(\beta+it)/2} f\|_{\mathcal{H}_\beta} = \|f\|_2\,.$$

Alors l'application $f \mapsto K_n^{-(\beta+it)/2} f$ est une isométrie de $L_2(S_n)$ sur le sous-espace de $\mathcal{H}_\beta$ constitué des fonctions à support dans S_n. L'application duale est donc une isométrie de ce sous-espace sur $L_2(S_n)$, mais ce n'est autre que $K_n^{-(\beta+it)/2}$; par conséquent pour toute f à support dans S_n, nous avons: $\|K_n^{-(\beta+it)/2} f\|_2 = \|f\|_{\mathcal{H}_{-\beta}}$.

Pour prouver le lemme, il suffit, d'après la construction de $R^z_{m,n}(g)$ de considérer le cas où $U_1 = \sum_0^m a_l \varphi_l$, $U_2 = \sum_0^m b_l \varphi_l$.

Pour prouver l'analyticité de $\langle R^z_{m,n}(g) U_1, U_2 \rangle$, il suffit de le montrer pour $U_1 = \varphi_0$, $U_2 = \varphi_1$ par exemple. Comme φ_i est fonction propre de K_n elle est dans $L_s(V)$ pour tout $s \leqslant \dfrac{2}{1-\beta} = r_\beta$. Par ailleurs

$$\langle R^z_{m,n}(g)\varphi_0, \varphi_1 \rangle = \int_V \pi_z(g)[h_n \varphi_0](v)(\overline{h_n \varphi_1})(v) dv\, \alpha_0^{z/2\beta} \alpha_j^{-z/2\beta}.$$

L'analyticité de cette fonction résulte simplement du fait que $\varphi_i \in L_{r_\beta}(V)$ et de la définition des représentations π_z.

Passons à l'estimation de $\langle R^z_{m,n}(g) U_1 U_2 \rangle$; pour cela nous posons:

$$F(z) = \frac{\langle R^z_{m,n}(g) U_1, U_2 \rangle}{(1+z)^{\beta/2}(p+2q)}.$$

Si $z = \pm\beta + it$ d'après le théorème 4 et la remarque du début de la preuve:

$$|F(z)| \leqslant k_1 \|U_1\|_2 \|U_2\|_2$$

où k_1 est une constante absolue.

Par conséquent d'après le lemme de Fragmen-Lindelof, pour tout z $|Re\, z|_2 \leqslant \beta$

$$|F(z)| \leqslant k_1 \|U_1\|_2 \|U\|_2,$$

ce qui termine la preuve du lemme.

Estimation du coefficient de π_0.

On se propose de prouver la:

Proposition 6. *Tout coefficient de π_0 est dans $L_{r'}(G)$, pour tout $r' > 2$.*

Preuve. 1°) Soit

$$C(it) = \frac{\Gamma(it)}{\Gamma\left[\frac{1}{2}\left(\frac{p}{2}+1+it\right)\right]\Gamma\left\{\left[\frac{1}{2}\left(\frac{p}{2}+q\right)\right]+it\right]\right\}}$$

la fonction d'Harischandra. Il est facile de vérifier d'après le comportement asymptotique de la fonction Γ que $|C(it)|^{-2} \geqslant k|t|^{p+2q+1}(1+|t|)^{-1}$ (voir [8]).

2°) Soit f une fonction de $L_1(G)$, on définit un opérateur $\hat{f}_{m,n}(z)$ sur $L_2(V)$ dans la bande $|Re\, z|\leqslant\beta$ par la formule:

$$\langle \hat{f}_{m,n}(z)\, U_1,\, U_2\rangle = \int_G \langle R^z_{m,n}(g)U_1,\, U_2\rangle f(g)dg\,.$$

$\langle \hat{f}_{m,n}(z)U_1, U_2\rangle$ est visiblement une fonction analytique de z; de plus l'estimation précédente montre que la norme de $\hat{f}_{m,n}(z)$ sur $L_2(V)$ ne dépasse pas

2.1 $$k_1\|f\|_{L_1(G)}(1+|Im\, z|)^{\beta/2(p+2q)}\,.$$

Par ailleurs pour toute $f\in L_1(G)\cap L_2(G)$, notons:

$$\hat{f}(\pi_{it}) = \int_G \pi_{it}(g)f(g)dg\,.$$

Alors par construction des opérateurs $R^z_{m,n}$, nous avons l'inégalité:

$$\|\hat{f}_{m,n}\|_{\mathcal{HS}}\leqslant k\|\hat{f}(\pi_{it})\|_{\mathcal{HS}}\,.$$

D'après la formule de Plancherel sphérique [12] ceci entraîne la majoration:

2.2 $$\int_{-\infty}^{+\infty}|t|^{p+2q+1}(1+|t|)^{-1}\|\hat{f}_{m,n}(it)\|^2_{\mathcal{HS}}dt \leqslant k\int_{-\infty}^{+\infty}|C(it)|^2\|\hat{f}(\pi_{it})\|^2_{\mathcal{HS}}dt\leqslant k\|f\|^2_{L_2(G)}\,.$$

Soit T un opérateur sur un espace de Hilbert H; soit T^* son adjoint; pour tout nombre $1\leqslant r<\infty$, on note $\|T\|^{2r}_{2r}$ la trace de l'opérateur $(TT^*)^r$. L'étude des opérateurs dont la r norme est finie est esquissée dans [6]. On pose $1/r'=1-1/r$.

D'après le théorème 4 de [6], les inégalités 2.1 et 2.2 montrent que pour tout $1<r<2$, on peut trouver α_0, β_0 et δ, avec $-\beta<\alpha_0<0<\beta_0<\beta$ tels que pour toute fonction f de $L_r(G)$ on a les estimations:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\|\hat{f}_{m,n}(\alpha_0+it)\|^{r'}_{r'}(1+|t|)^{r'\delta}dt\leqslant k_1\|f\|^{r'}_{r}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\|\hat{f}_{m,n}(\beta_0+it)\|^{r'}_{r'}(1+|t|)^{r'\delta}dt\leqslant k_1'\|f\|^{r'}_{r}\,;$$

où k_1 et k_1' sont des constantes.

Il s'en suit que pour tout couple U_1, U_2 de fonctions dans $L_2(V)$ la fonction $\Psi_{m,n}(z)=\langle\hat{f}_{m,n}(z)U_1, U_2\rangle(1+z)^\delta$, qui a une croissance admissible satisfait les inégalités:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\Psi_{m,n}(\alpha_0+it)|^{r'}dt\leqslant k_1^0\int_{-\infty}^{+\infty}\|\hat{f}_{m,n}(\alpha_0+it)\|^{r'}_{r'}(1+|t|)^{r'\delta}dt \leqslant k_1^0\|f\|^{r'}_{r}\|U_1\|^{r'}_2\|U_2\|^{r'}_2$$

et $$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_{m,n}(\beta_0+it)|^{r'}dt \leqslant k_1^0 \|f\|_r^{r'} \|U_1\|_2^{r'} \|U_2\|_2^{r'}.$$

Par conséquent d'après Kunze et Stein [6 lemme 26]

$$|\Psi_{m,n}(0)| = |\langle \hat{f}_{m,n}(0)U_1, U_2\rangle| < k_1' \|f\|_r \|U_1\|_2 \|U_2\|_2.$$

Alors $\langle R^0_{m,n}(g)U_1, U_2\rangle$ est dans $L_{r'}(G)$ pour tout $r'>2$ et sa norme ne dépasse pas $k_1'\|U_1\|_2\|U_2\|_2$.

Il s'en suit que

$$\lim_{n\to\infty} \langle R^0_{m,n}(g)U_1, U_2\rangle = \langle K^0_m B_{m/2}\pi_0(g)B_{m/2}U_1, U_2\rangle$$

est dans $L_{r'}(G)$ est que sa norme ne dépasse pas:

$$k_1'\|U_1\|_2\|U_2\|_2.$$

Par ailleurs si U_1 et U_2 sont deux fonctions $C_c^\infty(V)$, on peut trouver m assez grand tel que:

$$\langle K^0_m B_{m/2}\pi_0(g)B_{m/2}U_1, U_2\rangle = \langle \pi_0(g)U_1, U_2\rangle$$

et $\langle \pi_0(g)U_1, U_2\rangle$ est dans $L_{r'}(G)$ pour tout $r'>2$ avec

$$\|\langle \pi_0(g)U_1, U_2\rangle\|_{L_{r'}(G)} \leqslant k_1'\|U_1\|_2\|U_2\|_2.$$

Par densité des fonctions $C_c^\infty(V)$, il en découle que chaque coefficient de π_0 est dans $L_{r'}(G)$, pour tout $r'>2$.

Compte tenu de l'équivalence de π_0 et de la représentation quasi-régulière de G sur $L_2(K/M)$, nous avons prouvé le:

Théorème 7. *Soit G un groupe de Lie semi-simple, de centre fini, non compact, de rang réel égal à un. Toute fonction $f \in L_r(G)$ $1 \leqslant r < 2$, définit par convolution un endomorphisme borné sur $L_2(G)$.*

Il suffit de remarquer l'équivalence entre ce résultat et la proposition précédente établie dans [1].

Ce travail a été redigé en même temps que M. Cowling trouvait une preuve du théorème de convolution de Kunze-Stein pour les groupes de rang un.

Maintenant il a publié une démonstration générale de ce théorème voir "Annals of Math., Vol. 107, 209–234, 1978." Mais la preuve que nous donnons ici permet d'obtenir le contrôle des coefficients de certaines représentations de la série complementaire sphérique, résultat que l'on ne peut obtenir par sa méthode.

Bibliographie

[1] P. Eymard and N. Lohoue: *Sur la racine carrée du noyan de Poisson et une conjecture de Stein,* Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) **8** (1975), 175–188.

[2] G.B. Folland and E.M. Stein: *Estimates for $\overline{\partial}_b$ complex and analysis on the Heisenberg groups*, Comm. Pure Appl. Math. **27** (1974), 429–522.

[3] S. Helgason: *Duality and symmetric spaces with applications to group representations*, Adv. in Math. **93** (1971), 489–578.

[4] R.A. Hunt: *On $L(p, q)$ spaces,* Enseign. Math. (2) **12** (1966), 249–276.

[5] A. Knapp and E.M. Stein: *Intertwining operators for semi-simple groups,* Ann. of Math. **93** (1971), 489–578.

[6] R. Kunze and E.M. Stein: *Uniformly bounded representations,* Amer. J. Math. **82** (1960), 1–62.

[7] W. Magnus and F. Oberhettinger: Formulas and theorems for the special functions of mathematical physics, vol 2, Springer, Berlin, 1966.

[8] G. Schiffman: *Sur les integrales d'entrelacement de Kunze et Stein,* Bull. Soc. Math. France **99** (1971), 3–72.

[9] R.S. Strichartz: *Multipliers on fractional Sobolev spaces,* J. Math. Mech. **16** (1967), 1031–1060.

[10] G. Warner: Harmonic analysis on semi-simple Lie groups, vol 2, Springer, Berlin, 1972.

[11] G. Weiss and E.M. Stein: Introduction to fourier analysis on euclidean spaces, Princeton, 1971.

30 Boulevard Pasteur
94260 Fresnes
France