Itô, M.
Osaka J. Math.
**10** (1973), 265-270

# UNE CARACTÉRISATION SUR LE PRINCIPE RELATIF DE DOMINATION POUR LES NOYAUX DE RIESZ-FROSTMAN

MASAYUKI ITÔ

(Received September 13, 1972)

## 1. Introduction et résultat

Soit $R^n$ l'espace euclidien à dimensions $n\,(\geqq 1)$; on note par $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ son point et pose $|x|=(\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{1/2}$. Pour un nomber $\alpha$ avec $0<\alpha<n$, le noyau de Riesz-Frostman d'ordre $\alpha$ est une fonction $x \to |x|^{\alpha-n}$ sur $R^n$, et il s'écrira symnoliquement $r^{\alpha-n}$. Pour une mesure de Radon réelle $\mu$ dans $R^n$, le potentiel de Riesz-Frostman d'ordre $\alpha$ par $\mu$ est défini par

$$u_\mu^{(\alpha)}(x)=\int |x-y|^{\alpha-n} d\mu(y)$$

dès que la convolution $r^{\alpha-n} * \mu$ a un sens.

La notion du principe relatif de domination a été explicitement introduite par N. Ninomiya (cf. [4]), et il l'a discuté pour les noyaux de Riesz-Frostamn (cf. [5]). Cette amélioration est obtenue dans [2], qui est l'énoncé suivant:

Soient $\alpha$, $\beta$ deux nombres avec $0<\alpha\leqq 2$ et $\alpha\leqq\beta<n$. Alors $r^{\alpha-n}$ satisfait au prinicipe de domination relatif à $r^{\beta-n}$; c'est-à-dire, quelles que soient $\mu$, $\nu$ mesures de Radon positives dans $R^n$ à support compact et avec

$$I(\mu;\alpha)=\int u_\mu^{(\alpha)}(x)d\mu(x)<+\infty,$$

$u_\mu^{(\alpha)}(x)\leqq u_\nu^{(\beta)}(x)$ partout sur $R^n$ dès que la même inégalité a lieu sur le support de $\mu$, *supp* $(\mu)$.

Cela se base tout à fait sur le principe de domination pour $r^{\alpha-n}$ [1], et ce résultat est généralisé pour les noyaux de convolution de Hunt (cf. [3]).

Dans cette note, nous discuterons son inverse.

---

1) Si $r^{\alpha-n}$ satisfait au principe de domination relatif à lui-même, on dit simplement que cela satisfait au principe de domination.

**Théorème.** *Soit $\alpha$ un nombre avec $0<\alpha<n$. Alors l'énoncé suivant a lieu si et seulement si $0<\alpha\leqq 2$.*

*Il existe un noyau de convolution borné $N$ $(\neq 0)$ sur $R^n$ invariant par rotations*[2] *relatif auquel $r^{\alpha-n}$ satisfait au principe de domination; c'est-à-dire, quelles que soient $\mu$ une mesure de Radon positive dans $R^n$* à *support compact et $\varphi$ une fonction non-négative, finie et continue dans $R^n$ à support compact, $u_\mu^{(\alpha)}\leqq N*\varphi$ partout sur $R^n$ dès que $u_\mu^{(\alpha)}(x)\leqq N*\varphi(x)$ sur supp $(\mu)$.*

## 2. Deux lemmes

Remarquons d'abord la formule de Riesz. Pour deux nombres positifs $\alpha$, $\beta$ avec $\alpha+\beta<n$, il existe une constante positive $C(\alpha, \beta)$ telle que

$$r^{\alpha-n}*r^{\beta-n} = C(\alpha, \beta)r^{\alpha+\beta-n}$$

(cf. [6]). On désigne par $\Delta$ l'opérateur différentiel qui vérifie $\Delta r^{2-n}=-\varepsilon$ au sens des distributions, où $\varepsilon$ est la mesure de Dirac à l'origine, et alors $\Delta$ est proportionnel au laplacien ordinaire sur $R^n$. Pour $0<\alpha<2$, la distribution $pf.\ r^{-\alpha-n}$ est de la forme

$$pf.\ r^{-\alpha-n}(\varphi) = \int(\varphi(x)-\varphi(0))\,|x|^{-\alpha-n}dx$$

pour toute fonction infiniment dérivable $\varphi$ dans $R^n$ à support compact, et alors il existe une autre constante positive $A(\alpha)$ telle que

$$A(\alpha)(pr.\ r^{-\alpha-n})*r^{\alpha-n} = -\varepsilon$$

au sens des distributions (cf. par exemple, [1]). On note $\Delta^{\alpha/2}=A(\alpha)pf.\ r^{-\alpha-n}$.

Soit $\alpha$ un nombre avec $0<\alpha<n$; on appelle l'indice de $\alpha$ l'entier non-négatif $p$ tel que $0<\dfrac{\alpha}{2}-p\leqq 1$, et on écrit $\Delta^{\alpha/2} = \Delta^p*\Delta^{((\alpha/2)-p)}$ dès que $p\geqq 1$. Dans ce cas, on a

$$\Delta^{\alpha/2}*r^{\alpha-n}= \frac{(-1)^{p+1}}{C(2p, \alpha-2p)\,C(2(p-1), 2)\cdots C(2, 2)}\varepsilon.$$

**Lemme 1.** *Soient $\alpha$ un nombre avec $0<\alpha<n$ et $N$ un noyau de convolution borné sur $R^n$, et supposons que $r^{\alpha-n}$ satisfait au principe de domination relatif à $N$. Alors, pour une fonction non-négative, finie et contiue $\varphi$ dans $R^n$ à support compact, il existe une mesure de Radon positive $\mu'_\varphi$ dans $R^n$ et une constante non-négative $c_\varphi$ telles que*

---

2) Un noyau de convolution $N$ sur $R^n$ signifie une mesure de Radon positive dans $R^n$. On dit qu'il est borné si, quelle que soit $\varphi$ une fonction finie et continue à support compact, $N*\varphi$ est bornée.

$$u_{\mu'_\varphi}^{(\alpha)}+c_\varphi = N*\varphi \ sur \ R^n.$$

En effet, d'après la théorie générale du balayage (cf. [4]), pour un entier positif $m$, il existe une mesure de Radon positive $\mu'_m$ portée par $B$ telle que

$$u_{\mu'_m}^{(\alpha)}(x) \leqq N*\varphi(x) \ sur \ R^n \text{ et } u_{\mu'_m}^{(\alpha)}(x) = N*\varphi(x)\,\alpha\text{-}p.p.p. \ sur \ B_m{}^{3)},$$

où $B_m = \{x \in R^n; |x| \leqq m\}$. La suite $(u_{\mu'_m}^{(\alpha)})_{m=1}^{\infty}$ converge fortement vers $N*\varphi$ dans $L_{loc}$ avec $m \to +\infty$[4]. La suite $(\mu'_m)_{m=1}^{\infty}$ étant vaguement bornée, on peut supposer qu'il existe une mesure de Radon positive $\mu'_\varphi$ dans $R^n$ telle que $(\mu'_m)_{m=1}^{\infty}$ converge vaguement vers $\mu'_\varphi$ avec $m \to +\infty$. On a $N*\varphi \geqq u_{\mu'_\varphi}^{(\alpha)}$ sur $R^n$, d'après la semi-continuité inférieure de $r^{\alpha-n}$. La suite $(u_{\mu'_m}^{(\alpha)})_{m=1}^{\infty}$ étant umiformément bornée sur $R^n$, on obtient que la suite $(\Delta^{\alpha/2}*u_{\mu'_m}^{(\alpha)})_{m=1}^{\infty}$ converge vers $\Delta^{\alpha/2}*(N*\varphi)$ au sens des distributions dans $R^n$ avec $m \to \infty$. Donc

$$\Delta^{\alpha/2}*(N*\varphi - u_{\mu'_\varphi}^{(\alpha)}) = \lim_{m \to +\infty} \Delta^{\alpha/2}*(u_{\mu'_m}^{(\alpha)} - u_{\mu'_\varphi}^{(\alpha)}) = 0$$

au sens des distributions dans $R^n$. Pour une fonction infiniment dérivable $\psi$ dans $R^n$ à support compact, la fonction $(N*\varphi - u_{\mu'_\varphi}^{(\alpha)})*\psi$ est bornée, et par suite elle est égale à une constante. En effet, on a

$$\Delta^{(\alpha/2-p)}*\Delta^p(N*\varphi - u_{\mu'_\varphi}^{(\alpha)})*\psi(x) = 0$$

pour tout $x$ de $R^n$ dès que l'indice $p$ de $\alpha$ est $\geqq 1$. Dans ce cas, d'après le résultat de Riesz concernant la $\left(\frac{2}{\alpha} - p\right)$-harmonicité (cf.[6]), $\Delta^p(N*\varphi - u_{\mu'_\varphi}^{(\alpha)})*\psi$ est égale à une constante, et donc elle est égale à 0. Par récurrence, $(N*\varphi - u_{\mu'_\varphi}^{(\alpha)})*\psi$ est aussi égale à une constante. La fonction $\psi$ étant quelconque, il existe une constante non-négative $c_\varphi$ telle que $N*\varphi - u_{\mu'_\varphi}^{(\alpha)} = c_\varphi$ presque partout sur $R^n$. Posons

$$f_m(x) = \begin{cases} c_m, & |x| \leqq \dfrac{1}{m} \\ 0, & |x| > \dfrac{1}{m}, \end{cases}$$

où $c_m$ est une constante positive telle que l'on ait $\int f_m \, dx = 1$. On a alors

$$u_{\mu'_\varphi}^{(\alpha)}(x) = \lim_{m \to +\infty} \int u_{\mu'_\varphi}^{(\alpha)}(x+y) f_m(y) dy$$

---

3) Une propriété a lieu $\alpha$-$p.p.p.$ sur un sous-ensemble $X$ de $R^n$ si, quelle que soit $\lambda$ une mesure de Radon positive dans $R^n$ avec $supp(\lambda) \subset X$ et $I(\lambda;\alpha) < +\infty$, elle a lieu presque partout pour $\lambda$.

4) $L_{loc}$ est l'espace vectoriel topologique usuel des fonctions localement sommables dans $R^n$.

sur $R^n$, d'où $N*\varphi = u^{(\alpha)}_{\mu'_\varphi}+c_\varphi$ partout sur $R^n$.

Dans ce cas, la couple $(\mu'_\varphi, c_\varphi)$ est uniquement déterminée. En effet, soit $(\mu''_\varphi, c'_\varphi)$ une autre couple qui vérifie la présente condition. Alors, quelle que soit $\psi$ une fonction finie et continue dans $R^n$ à support compact,

$$\lim_{x\to\infty} (u^{(\alpha)}_{\mu'_\varphi}-u^{(\alpha)}_{\mu''_\varphi})*\psi(x) = 0 .$$

et donc $c_\varphi=c'_\varphi$. L'autre égalité $\mu'_\varphi=\mu''_\varphi$ résulte immédiatement du principe d'unicité pour $r^{\alpha-n}$ [5]

**Corollaire 1.** *Soient $\alpha$, $\beta$ deux nombres avec $0<\alpha$, $\beta<n$. Si $r^{\alpha-n}$ satisfait au principe de domination relatif à $r^{\beta-n}$, on a alors $\alpha\leqq\beta$.*

En effet, d'après le présent lemme, pour une fonction non-négative, finie et continue $\varphi$ dans $R^n$ à support compact, il existe une mesure de Radon positive $\mu'_\varphi$ dans $R^n$ telle que $u^{(\beta)}_\varphi=u^{(\alpha)}_{\mu'_\varphi}$ partout sur $R^n$, où $\varphi$ désigne aussi la mesure positive avec la densité $\varphi$. Supposons $\alpha>\beta$; alors, d'après la formule de Riesz et le théorème de Fubini,

$$u^{(\alpha)}_{\mu'_\varphi} = u^{(\beta)}_{(C(\beta,\alpha-\beta)\,u^{(\alpha-\beta)}_{\mu'_\varphi})} \quad sur\ R^n .$$

On a donc, d'après le principe d'unicité pour $r^{\beta-n}$ ,

$$\varphi = C(\beta, \alpha-\beta)u^{(\alpha-\beta)}_{\mu'_\varphi} .$$

Si $\varphi\neq 0$, alors $\mu'_\varphi\neq 0$ et par suite $u^{(\alpha-\beta)}_{\mu'_\varphi}$ est à support non-compact, d'où une contradiction. Par conséquent, $\alpha\leqq\beta$.

**Lemme 2.** *Soit $\mu$ une mesure de Radon positive dans $R^n$ à support compact et invariante par rotations. Si supp $(\mu)\not\ni 0$, alors, quel que soit $\alpha$ un nombre avec $0<\alpha<n$, $u^{(\alpha)}_\mu$ est fini et continu dans $R^n$.*

De la manière usuelle, il existe une mesure positive $\lambda$ dans $R^+=\{t>0\}$ portée par un intervalle fermé $\not\ni 0$ telle que

$$u^{(\alpha)}_\mu(x) = \int u^{(\alpha)}_{\sigma_r}(x)d\lambda(r) ,$$

où $\sigma_r$ est la mesure uniforme sur $S_r=\{x\in R^n; |x|=r\}$ de masse totale d'unité. Le potentiel $u^{(\alpha)}_{\sigma_r}$ étant fini et continu dans $R^n$, $u^{(\alpha)}_\mu$ l'est aussi.

---

5) Cela signifie que, quelle que soit $\lambda$ une mesure de Radon réelle dans $R^n$, $\lambda=0$ si et seulement si $u^{(\alpha)}_\lambda=0$. Cela résulte évidemment de

$$\Delta^{\alpha/2}*u^{(\alpha)}_\lambda = 0 .$$

### 3. La démonstration du théorème

Il suffit de voir que si l'énoncé dans théorème a lieu, alors $0<\alpha\leqq 2$, car son inverse est déjà connu. Soit $\varphi$ une fonction non-négative, non-zéro, finie et continue dans $R^n$ à support compact et invariante par rotations; alors, d'après le lemme 1, il existe une mesure de Radon positive $\lambda$ dans $R^n$ et une constante $c\geqq 0$ telles que $N*\varphi=u_\lambda^{(\alpha)}+c$ partout sur $R^n$. D'après l'unicité de la couple $(\lambda, c)$, $\lambda$ est invariante par rotations. Pose $\psi=\lambda*\varphi$ et $C=c\int\varphi dx$. Ayant $N\neq 0$, on a $(\psi, C)\neq(0, 0)$. On choit deux nombers positifs $r_1$, $r_2$ avec $r_1\leqq r_2$ tels que

$$supp(\psi)\not\subset C(0; r_1, r_2) \text{ ou } supp(\psi)\cap C(0; r_1.r_2)=\phi,$$

où $C(0; r_1, r_2)=\{x\in R^n; r_1\leqq |x|\leqq r_2\}$. En utilisant encore la théorie générale du balayage (cf. [4]), il existe une mesure de Radon positive $\mu'$ dans $R^n$ portée par $C(0; r_1, r_2)$ telle que

$$u_{\mu'}^{(\alpha)}\leqq u_\psi^{(\alpha)}+C \text{ sur } R^n \text{ et } u_{\mu'}^{(\alpha)}=u_\psi^{(\alpha)}+C\ \alpha\text{-}p.p.p. \text{ sur } C(r_1, r_2),$$

car $u_\psi^{(\alpha)}+C=N*\varphi*\varphi$ sur $R^n$. Dans ce cas, $\mu'$ est uniquement déterminée, d'après le principe d'énergie pour $r^{\alpha-n}$ [6], et donc $\mu'$ est invariante par rotations. Supposons $\alpha>2$ et soit $p$ l'indice de $\alpha$; alors

$$\Delta^p u_{\mu'}^{(\alpha)}=\Delta^p(u_\psi^{(\alpha)}+C)$$

au sens des distributions dans $\{x\in R^n; r_1<|x|<r_2\}$, et donc

$$u_{\mu'}^{(\alpha-2p)}=u_\psi^{(\alpha-2p)}$$

presque partout dans $\{x\in R^n; r_1<|x|<r_2\}$. On a $u_\psi^{(\alpha-2p)}=u_\lambda^{(\alpha-2p)}*\varphi$, et donc $u_\psi^{(\alpha-2p)}$ est fini et continu dans $R^n$. D'autre part, d'après le lemme 2, $u_{\mu'}^{(\alpha-2p)}$ est fini et continu dans $R^n$. Donc

$$u_{\mu'}^{(\alpha-2p)}=u_\psi^{(\alpha-2r)} \text{ sur } C(0; r_1, r_2).$$

D'après le principe de domination et le principe d'unicité pour $r^{(\alpha-2p)-n}$, on a

$$u_{\mu'}^{(\alpha-2p)}\leqq u_\psi^{(\alpha-2p)} \text{ sur } R^n \text{ et } u_{\mu'}^{(\alpha-2p)}\not\equiv u_\psi^{(\alpha-2p)} \text{ (resp. } \mu'=0)$$

dès que $\psi\neq 0$ (resp. $\psi=0$). Par conséquent.

$$r^{2p-n}*(u_\psi^{(\alpha-2p)}-u_{\mu'}^{(\alpha-2p)})>0 \text{ sur R}^n \text{ (resp. } u_\psi^{(\alpha-2p)}-u_{\mu'}^{(\alpha-2p)}\equiv 0)$$

dès que $\psi\neq 0$ (resp. $\psi=0$). Mais cela est en contradiction avec $u_{\mu'}^{(\alpha)}=u_\psi^{(\alpha)}+C$

---

6) Cela signifie que, quelle que soit $\lambda$ une mesure de Radon réelle dans $R^n$ avec $I(|\lambda|;\alpha)<+\infty$, $\lambda=0$ si et seulement si $I(\lambda;\alpha)=0$. Cela résulte du fait que la transformation de Fourier de $r^{\alpha-n}$ est égale à $Cr^{-\alpha}$ (cf. [1]), où $C$ est une constante positive.

sur $C(0; r_1, r_2)$, d'où $\alpha \leqq 2$. La démonstration est ainsi complète.

**Corollaire 2.** *Soit $\alpha$ un nombre avec $0<\alpha<n$. S'il existe un nombre $\beta$ avec $0<\beta<n$ tel que $r^{\alpha-n}$ satisfasse au principe de domination relatif à $r^{\beta-n}$, alors $0<\alpha\leqq 2$.*

Notre méthode reste valable pour les noyaux besseliens.

Remarque. *Soit $\alpha$ un nombre positif quelconque; on note $k_\alpha$ le noyau besselien d'ordre $\alpha$. Pour que l'énoncé suivant ait lieu, il faut et il suffit que $0<\alpha\leqq 2$.*

*Il existe un noyau de convolution borné $N$ sur $R^n$ invariant par rotations tel que $k_\alpha$ satisfasse au principe de domination relatif à $N$.*

On remarque ici que $k_\alpha$ est une fonction continue au sens large dans $R^n$ dont la transformation de Fourier est égale à $1/1(+|x|^2)^{\alpha/2}$. Le potentiel besselien d'ordre $\alpha$ par une mesure $\mu$ est défini par

$$v_\mu^{(\alpha)}(x)=\int k_\alpha (x-y)d\mu(y)$$

dès que cette convolution a un sens.

Université de Nagoya

## Bibliographies

[1] J. Deny: *Les potentiels d'énergie finie*, Acta Math. **82** (1950), 107–183.
[2] M. Itô: *Remarks on Ninomiya's domination principle*, Proc. Japan Acad. **40** (1964), 743–746.
[3] I. Higuchi and M. Itô: *Characterization of relative domination principle*, Nagoya Math. J. **50** (1973), 175–184.
[4] N. Ninomiya: *Sur le problème du balayage généralisé*, J. Math. Osaka City Univ. **12** (1961), 115–138.
[5] ———: *Sur un principe du maximum pour le potentiel de Riesz-Frostman*, ibid. **13** (1952), 57–62.
[6] M. Riesz: *Intégrales de Riemann-Liouville et potentiels*, Acta Sci. Math. Szeged **9** (1938), 1–42.