多重指標線型構造モデルとその応用

——研究ノート——

白　倉　幸　男

多重指標線型構造モデルとその応用

——研究ノート——

1. はじめに

本稿の目的は，多重指標線型構造モデル，いわゆる LISREL モデルを概観し，その現実問題への適用を試みることにある[1)]。社会学の概念は，直接に測定可能なものは少なく，たとえば，社会経済的地位，疎外などの概念は，実際にはいくつかの指標によって測られる[2)]。つまり，社会学の概念は，一般には潜在変数であり多重指標（multiple indicators）によって測定される。この部分を多重指標線型構造モデルでは，測定モデル（measurement model）といい，因子分析の文脈では，最尤因子分析（maximum likelihood factor analysis）とのつながりで発達してきた[3)]。測定モデルが要請とされる理由は，潜在変数に一種の尺度を与えて数量化，つまり，実数による間接測定をしたいからにほかならない。

他方，多重指標線型構造モデルには，構造モデル（structural model）または因果モデル（causal model）とよばれる部分がある。数式的表現では，因果モデルは，計量経済学の構造方程式モデルと同一であるが，因果モデルが基本的には潜在変数間の連関を明らかにする点で実質的意味が異なる。ここで基本的にはとことわったのは，条件を特定化すれば，多重指標線型構造モデルは，計量経済学における完全情報最尤（full information maximum likelihood, FIML）法に帰着するからである[4)]。60年代後半に社会学に導入された，より特殊な一方向的な（逐次的な）変数間の連関を想定しているパス解析も，特殊ケースとして実に簡単に扱うことができる。

社会統計学では，（i）変数の数量化，（ii）変数の相互連関，の２つを同時に満たすモデルが長らく待望されていた。これを満たすのが多重指標線型構造モデルにほかならない。変数の数量化に対応するのが測定モデルであり，変数の相互連関に対応するのが構造モデルである。

もちろん，このようは複雑なモデルが実行可能となったのは，数値計算法や電子計算機の発展による。数値計算では，Davidson-Fletcher-Powell（DFP）法，Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno（BFGS）法，最大傾斜法（steepest descent method）などが用いられる[5)]。これらの方法は，いずれも最適化に関するものであって統計学で広く用いられている。

2. 多重指標線型構造モデルの概観

多重指標線型構造モデルには，３種類のパラメータが存在する。(a)固定パラメータ（fixed parameter），(b)自由パラメータ（free parameter），(c)制約パラメータ（constrained parameter）である。ここで，固定パラメータとは，モデルを特定化するときある値に固定されることを示すものである。制約パラメータは，未知であるがモデル内の他のパラメータと等しいという条件がついている点で，単なる自由パラメータとは異なるものである。このような区別は，プログラム上のデザイン行列およびさらに初期値行列のインプットに対応している[6]。

内生潜在変数ベクトルを$\eta'=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m)$，外生潜在変数ベクトルを $\xi'=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ で表わす。このとき，構造モデルは次式で示される。

$$B\eta=\Gamma\xi+\zeta \tag{2.1}$$

B は $m\times m$ 行列，Γ は $m\times n$ 行列の係数行列であり，$\zeta'=(\zeta_1,\zeta_1,\cdots,\zeta_m)$ は残査ベクトルである。ただし，Bについて，むしろ B^+ を用いて，下のように表わすことも行なわれている[7]。B でなく B^+ を採る利点は，相互連関の符号を誤まらぬことである。この点は，プログラムによって異なるので注意が必要である。

$$\eta=B^+\eta+\Gamma\xi+\zeta\ \ (B^+=\mathrm{I}-B) \tag{2.1$'$}$$

ここで，構造モデルの仮定は，(i) Bは正則行列，(ii)潜在変数の期待値はゼロ，$E(\eta)=E(\xi)=0$，(iii)残査の期待値はゼロ，$E(\zeta)=0$，(iv)残査と外生変数とは独立で分離される，$E(\zeta\xi')=0$，である。したがって，構造モデルを吟味するときは，これらの仮定のもつ実質的意味が満たされているかを問わねばならない。なお，潜在変数のことを概念とよぶこともある。

測定モデルでは，p個の内生指標（endogenous indicator)，q個の外生指標（exogenous indicator）の指標があるとする。$y'=(y_1,y_2,\cdots,y_p)$，$x'=(x_1,x_2,\cdots,x_q)$ でこれらの指標を表わしたとき，測定モデルは次のように表わせる。

$$y=\Lambda_y\eta+\varepsilon \tag{2・2}$$

$$x=\Lambda_x\xi+\delta \tag{2・3}$$

ここで，Λ_y は $p\times m$ 行列，Λ_x は $q\times n$ 行列であり，因子負荷行列（factor loading matrix）または回帰行列（regression matrix）とよばれる。$\varepsilon'=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_p)$，$\delta'=(\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_q)$ は，ともに，測定誤差ベクトルである。

測定モデルでの仮定は，(i)測定誤差の期待値はゼロ，$E(\varepsilon)=E(\delta)=0$，(ii)測定誤差は変数から独立かつ分離しうる，$E(\eta\varepsilon')=E(\xi\delta')=0$，である。これらの仮定のもつ意味も常に念頭におかねばならない。

測定誤差間の共分散行列を次のように表わす。

$$E(\varepsilon\varepsilon')=\theta_\varepsilon \tag{2・4}$$

$$E(\delta\delta')=\theta_\delta \tag{2・5}$$

$$E(\varepsilon\delta')=\theta_{\varepsilon\delta} \tag{2・6}$$

ここで，LISREL では，θ_ε，θ_δ を対角行列とおくのを既定値とおいている。つまり，異なる指標間の測定誤差は無関連としている[8]。また，$\theta_{\varepsilon\delta}$ については，モデルに組み込まれていない。内生指標の測定誤差と外生指標の測定誤差は無関連としているわけである。

もう一度，構造モデルにたちかえってみる。まず，外生潜在変数 ξ，残査 ζ の共分散行列を，それぞれ，$\Phi(n\times n)$，$\Psi(m\times m)$ で表わす。

$$E(\xi\xi')=\Phi \tag{2・7}$$

$$E(\zeta\zeta')=\Psi \tag{2.8}$$

ここで，Ψ が対角行列と仮定されることがないのは，残査は，一般の構造方程式モデルと同じく，潜在変数によって測定されえなかったすべてのものを表わすからである。

潜在変数の共分散行列 Ω を求める。この Ω は区分行列（partitioned matrix）で表わす。

$$\Omega_{\eta\eta}=E(\eta\eta')=C \tag{2・9}$$

$$\Omega_{\eta\xi}=E(\eta\xi')=D\Phi \tag{2・10}$$

$$\Omega_{\xi\xi}=E(\xi\xi')=\Phi \tag{2・11}$$

ただし，ここで，C, D については次式となる。

$$C=B^{-1}\Gamma\Phi\Gamma'B^{-1\prime}+B^{-1}\Psi B^{-1\prime} \tag{2・12}$$

$$D=B^{-1}\Gamma \tag{2・13}$$

したがって，Ω は次式で与えられる。

$$\Omega=\begin{pmatrix}\Omega_{\eta\eta} & \Omega_{\eta\xi}\\ \Omega_{\xi\eta} & \Omega_{\xi\xi}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C & D\Phi\\ \Phi D' & \Phi\end{pmatrix} \tag{2・14}$$

さて，測定モデルで，$z=(y', x')'$ が得られる。z の共分散行列を Σ で表わす。

Σ も内生，外生の区別によって区分行列で表わす。

$$
\begin{aligned}
\Sigma_{yy} &= E(yy') = E(\Lambda_y\eta+\varepsilon)(\Lambda_y\eta+\varepsilon)' \\
&= \Lambda_y E(\eta\eta')\Lambda'_y + \Lambda_y E(\eta\varepsilon') + E(\varepsilon\eta')\Lambda'_y + E(\varepsilon\varepsilon') \\
&= \Lambda_y C\Lambda'_y + \theta_\varepsilon \qquad (2\cdot15)
\end{aligned}
$$

同様にして，次式が得られる。

$$\Sigma_{yx} = \Lambda_y D\Phi\Lambda'_x + \theta_{\varepsilon\delta} \qquad (2\cdot16)$$

$$\Sigma_{xx} = \Lambda_x\Phi\Lambda'_x + \theta_\delta \qquad (2\cdot17)$$

それゆえ，Σ は区分行列で次のようになる。

$$
\begin{aligned}
\Sigma &= \begin{pmatrix} \Sigma_{yy} & \Sigma_{yx} \\ \Sigma_{xy} & \Sigma_{xx} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \Lambda_y C\Lambda'_y + \theta_\varepsilon & \Lambda_y D\Phi\Lambda'_x + \theta_{\varepsilon\delta} \\ \Lambda_x\Phi D'\Lambda'_y + \theta'_{\varepsilon\delta} & \Lambda_x\Phi\Lambda'_x + \theta_\delta \end{pmatrix} \qquad (2.18)
\end{aligned}
$$

さて，以上が Bentler がいう Jöreskog-Keesling-Wiley モデル，ここでいう多重指標線型構造モデルの主な道具だてである。Bentler は多重構造統計モデルというより一般的なモデルを提唱している[9]。このほかに PLS (partial least squares) またはソフト・モデリング (soft modeling) とよばれる Wold のモデルがある。このモデルもかなり用いられているように見うけられる[10]。PLS のプログラムもかなり流布しているようである。PLS はモデルの統計学的性質について推定値の頑健性 (robustness) が望しいと考えている。PLS は変数と指標との結びつきをゆるく考えている。さらに特徴的なのは PLS では，分布の型を特定しない (distribution-free) ことが前提となっていることである。このためか，PLS は，化学から政治学までに広がっている。Wold の言葉では，PLS は，「データ解析と現代統計学主流の最尤法という“きびしい”想定との間の懸橋」である[11]。「LISREL と比較した場合， PLS の鍵となる相違は， 潜在変数のケース事の値を明確に推定する」ことにあるというが，これは， LISREL でも可能であることに注意したい。 また，いずれのモデルも多重指標をもつ潜在変数を想定しているのである。Wold の言葉に現れているように，現代統計学の流れの中からまず多重指標線型構造モデルが出てきたのである。 PLS はこれから派生してきたのであるから，まず前者のほうを吟味してゆくべきである。また，実際問題としても社会学ではこれまで PLS が用いられたことはないと思われる[12]。

3. パラメータの推定と検定の問題

標本の大きさをN，標本共分散行列をSとすれば，Sは母共分散行列 Σ の不偏推定量である。すなわち，$E(S)=\Sigma$[13]。ここで標本が多変量正規分布からのものであれば，共分散行列Sの要素の同時密度関数が確定できることを Wishart は証明した。これを Wishart 分布といい，Sの同時密度関数は次式で与えられる[14]。

$$\mathrm{f}(S)=\frac{\left(\frac{N-1}{2}\right)^{\frac{(p+q)(N-1)}{2}}}{\pi^{\frac{(p+q)(p+q-1)}{2}}\,|\Sigma|^{\frac{N-1}{2}}\prod_{i=1}^{p+q}\Gamma\left(\frac{N-i}{2}\right)}$$

$$\times\exp\left\{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}(N-1)\,\Sigma^{-1}S\right\}|S|^{\frac{N-(p+q)-2}{2}} \tag{3•1}$$

上式の対数をとった対数尤度関数は，定数項を無視すれば次式となる。

$$\log L=-\frac{N-1}{2}\left\{\log|\Sigma|+\mathrm{tr}\,(S\Sigma^{-1})\right\} \tag{3•2}$$

なお，(3•1) 式におけるp，qはそれぞれ，内生指標，外生指標の数である。

$(p+q)\times(p+q)$ の対称正定値行列 Σ のすべての集合を Ω とし，Ω の部分集合で (2•18) の形で表せるものの集合を ω で表わす。複合仮説 $H_0:\Sigma\in\omega$ を複合対立仮説 $\mathrm{H}_1:\Sigma\in\Omega-\omega$ に対して検定するには，次の統計量λを用いる。

$$\lambda=\frac{L_\omega}{L_\Omega} \tag{3•3}$$

ここで，Lの最尤推定の結果，(i) ω の下で得られる$\hat{\Sigma}$，および，(ii) Ω の想定の下で得られる Σ の推定値がS，であることから (3•3) 式の右辺の L_ω，L_Ω は対数をとった形で次式で表わされる。

$$\log L_\omega=-\frac{N-1}{2}\left\{\log|\hat{\Sigma}|+\mathrm{tr}(S\hat{\Sigma}^{-1})\right\} \tag{3•4}$$

$$\begin{aligned}\log L_\Omega&=-\frac{N-1}{2}\left\{\log|S|+\mathrm{tr}(SS^{-1})\right\}\\&=-\frac{N-1}{2}\left\{\log|S|+(p+q)\right\}\end{aligned} \tag{3•5}$$

ところで，Nが十分大きいと，$-2\log\lambda$ は漸近的に χ^2 分布をし，その自由度 df は Ω の

下での独立なパラメータの数 $\frac{1}{2}(p+q)(p+q+1)$ と，ω の下での独立なパラメータの数 l との差である[15]。

$$df=\frac{1}{2}(p+q)(p+q+1)-l \tag{3·6}$$

l の値は，仮説 H_0 によって異なる。$-\log\lambda$ は次式で与えられる。

$$-\log\lambda=(N-1)\{\log|\hat{\Sigma}|+\mathrm{tr}(S\hat{\Sigma}^{-1})-\log|S|-(p+q)\} \tag{3·7}$$

ここで，次式でFを定める。

$$F=\log|\Sigma|+\mathrm{tr}(S\Sigma^{-1})-\log|S|-(p+q) \tag{3·8}$$

このとき，(3·7)式の右辺は $F(\hat{\Sigma})$ に$(N-1)$を掛けたものである。そして，λ のもつ意味から明らかなように，$F(\hat{\Sigma})$ はFの最小値にほかならない。ここで $F(\hat{\Sigma})$ は正確には (3·9) 式で表わされる。∧は標本からの推定値であることを示す。そういうわけで，パラメータの推定のためにはFの最小値を与えるパラメータを探せばよい。それには，まずFを微分する。このために，Σ の部分行列についてについて微分することになる。

$$F(\hat{\Sigma})=F(\hat{\Lambda}_y,\hat{\Lambda}_x,\hat{B},\hat{\Gamma},\hat{\Phi},\hat{\Psi},\hat{\theta}_\varepsilon,\hat{\theta}_\delta,\hat{\theta}_{\varepsilon\delta}) \tag{3·9}$$

$$d\Sigma_{yy}=d\Lambda_yC\Lambda'_y+\Lambda_ydC\Lambda'_y+\Lambda_yC\Lambda'_y+d\theta_\varepsilon \tag{3·10}$$

$$d\Sigma_{yx}=d\Lambda_yD\Phi\Lambda'_x+\Lambda_ydD\Phi\Lambda'_x+\Lambda Dd\Phi\Lambda'_x \\ +\Lambda_yD\Phi d\Lambda'_x+d\theta_{\varepsilon\delta} \tag{3·11}$$

$$d\Sigma_{xx}=d\Lambda_x\Phi\Lambda'_x+\Lambda_xd\Phi\Lambda'_x+\Lambda_x\Phi d\Lambda'_x+d\theta_\delta \tag{3·12}$$

ところで，C, D の微分 dC, dD は，(2·12)～(2·13) より次式で与えられる。

$$dC=-B^{-1}dBD\Phi D'+B^{-1}d\Gamma\Phi D'+Dd\Phi D'+D\Phi d\Gamma'B^{-1'} \\ -D\Phi D'd^{-1}B^{-1}-B^{-1}dBB^{-1}\Psi B^{-1'}+B^{-1}d\Psi B^{-1'}-B^{-1}\Psi B^{-1'}dB'B^{-1'} \tag{3·13}$$

$$dD=B^{-1}d\Gamma-B^{-1}dBD \tag{3·14}$$

さて，Σ^{-1} が存在するから，次式が成り立つ。

$$d\log|\Sigma|=\mathrm{tr}(\Sigma^{-1}d\Sigma) \tag{3·15}$$

また，恒等式 $\Sigma\Sigma^{-1}=I$ を微分すれば，

$$d(\Sigma\Sigma^{-1})=(d\Sigma)\Sigma^{-1}+\Sigma(d\Sigma^{-1})=0 \tag{3・16}$$

$$\therefore \quad d\Sigma^{-1}=-\Sigma^{-1}d\Sigma\Sigma^{-1} \tag{3・17}$$

XY，YX がともに存在するならば，$\mathrm{tr}(XY)=\mathrm{tr}(YX)$。それゆえ，次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} d\mathrm{tr}(S\Sigma^{-1}) &= \mathrm{tr}(Sd\Sigma^{-1})=\mathrm{tr}(S\Sigma^{-1}d\Sigma\Sigma^{-1}) \\ &= \mathrm{tr}(\Sigma^{-1}S\Sigma^{-1}d\Sigma) \end{aligned} \tag{3・18}$$

$\mathrm{tr}(X+Y)=\mathrm{tr}(X)+\mathrm{tr}(Y)$ となることから，

$$\begin{aligned} dF &= d\log|\Sigma|+d\,\mathrm{tr}(S\Sigma^{-1}) \\ &= \mathrm{tr}\{(\Sigma^{-1}-\Sigma^{-1}S\Sigma^{-1})d\Sigma\} \end{aligned} \tag{3・19}$$

ここで，(3・19) 式右辺の（ ）内を $\varDelta$ とおく。

$$\varDelta=\Sigma^{-1}-\Sigma^{-1}S\Sigma^{-1} \tag{3.20}$$

Σと同様に，$\varDelta$ は次の区分行列で表わされるとする。

$$\varDelta=\begin{pmatrix} \varDelta_{yy} & \varDelta_{yx} \\ \varDelta_{xy} & \varDelta_{xx} \end{pmatrix} \tag{3・21}$$

また，Σ のときと同様に $d\Sigma$ も区分行列で表わす。

$$d\Sigma=\begin{pmatrix} d\Sigma_{yy} & d\Sigma_{yx} \\ d\Sigma_{xy} & d\Sigma_{xx} \end{pmatrix} \tag{3・22}$$

$$\therefore \ \varDelta d\Sigma=\begin{pmatrix} \varDelta_{yy}d\Sigma_{yy}+\varDelta_{yx}d\Sigma_{xy} & \varDelta_{yy}d\Sigma_{yx}+\varDelta_{yx}d\Sigma_{xx} \\ \varDelta_{xy}d\Sigma_{yy}+\varDelta_{xx}d\Sigma_{xy} & \varDelta_{xy}d\Sigma_{yx}+\varDelta_{xx}d\Sigma_{xx} \end{pmatrix} \tag{3・23}$$

したがって，dF について次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} dF &= \mathrm{tr}(\varDelta d\Sigma) \\ &= \mathrm{tr}(\varDelta_{yy}d\Sigma_{yy}+\varDelta_{yx}d\Sigma_{xy})+\mathrm{tr}(\varDelta_{xy}d\Sigma_{yx}+\varDelta_{xx}d\Sigma_{xx}) \end{aligned} \tag{3・24}$$

しかるに，(3・23) でトレースにかかわるのは対角線上の部分行列だけだからである。そして，$\partial F/\partial \Lambda_y$ を求めるには，(3・24) の右辺の $d\Lambda_y$ 以外の微分をすべてゼロ行列とすれば，

$$\begin{aligned} dF &= \mathrm{tr}(\varDelta_{yy}d\Lambda_yC\Lambda'_y+\varDelta_{yy}\Lambda_yCd\Lambda'_y+\varDelta_{yx}\Lambda_x\Phi D'd\Lambda'_y) \\ &\quad +\mathrm{tr}(\varDelta_{xy}d\Lambda_yD\Phi\Lambda'_x) \end{aligned} \tag{3・25}$$

$$\therefore \ \partial F/\partial\Lambda_y=2(\varDelta_{yy}\Lambda_yC+\varDelta_{yx}\Lambda_x\Phi D') \tag{3・26}$$

以下同様にして，次式を得る。

$$\partial F/\partial \Lambda_x = 2(\Delta_{xy}\Lambda_y D\Phi + \Delta_{xx}\Lambda_x\Phi) \tag{3•27}$$

$$\partial F/\partial \theta_\varepsilon = \Delta_{yy} \tag{3•28}$$

$$\partial F/\partial \theta_\delta = \Delta_{xx} \tag{3•29}$$

$$\partial F/\partial \theta_{\varepsilon\delta} = 2\Delta_{yx} \tag{3•30}$$

また，さらに（3•13)～(3•14）式を用いれば，

$$\partial F/\partial \Phi = D'\Lambda_y\Delta_{yy}\Lambda_y D + \Lambda'_x\Delta_{xy}\Lambda_y D + D'\Lambda_y\Delta_{yx}\Lambda_x + \Lambda'_x\Delta_{xx}\Lambda_x \tag{3•31}$$

$$\partial F/\partial \Psi = B^{-1}\Lambda_y\Delta_{yy}\Lambda_y B^{-1} \tag{3•32}$$

$$\partial F/\partial \Gamma = 2B^{-1\prime}\Lambda'_y(\Delta_{yy}\Lambda_y D + \Delta_{yx}\Lambda_x)\Phi \tag{3•33}$$

$$\partial F/\partial B = -2B^{-1\prime}\Lambda'_y(\Delta_{yy}\Lambda_y C + \Delta_{yx}\Lambda_x\Phi D') \tag{3•34}$$

ここで，$\Phi, \Psi, \theta_\varepsilon, \theta_\delta$ は対称行列だが，簡単化のため，このための表記はしていない[16]。というのも，式が見た目によくないし，２つに分けて書かねばならぬからである。以上の証明は，Jöreskog のものを参照し，より一貫した一般的な形で示したものである。それというのも，こういった形での証明が示されずにいたからである[17]。

(3•26)～(3•33）の式を用いながら，Fを最小化し，パラメータの値を測定する。この過程で，Fの１階微分係数および２階微分係数の大標本での近似式を用いる[18]。この近似が成立するための条件は，大標本で，かつ多変量正規分布することである。データが多変量正規分布をしているかどうかを吟味することは，多重指標線型構造モデルにとって重要であるがやや軽視されていた感もある。

正規性の評価には，(a)１変量による周辺正規性の評価，(b)多変量による同時正規性の評価，(c)多変量データの１次元射影，などの方法がある[19]。第１の１変量による周辺正規性の評価では，歪度や尖度を用いる数表が与えられている[20]。手近には，次の $\sqrt{b_1}$ の分布の検定を行えばよい[21]。

$$\sqrt{b_1} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{nS^2} \tag{3•35}$$

第２の同時正規性については，最短距離による検定，半径・角度による検定などが用いらてている。第３の１次元射影は，視覚的なもので，正規確率紙によるプロットなどが用いられている。これらの諸方法があるにせよ，多変量正規性の評価の方法はまだ発達が不十分であるといえる。

さて，モデルの適合性の問題についてもここで論じておくのがよいだろう。多重指標線型構造モデルの χ^2 検定は $-2\log\lambda$ が確率収束するという前提の上に成り立っている。しかも，分析に用いるのは標本共分散行列 S である。それゆえ，S 以外のときには χ^2 検定の使用には注意を要する[22)]。χ^2 検定の機械的な適用は慎むべきであるけれども，かなりの文献がこの点に触れていない。

というのも，多重指標線型構造モデルでは標本共分散行列 S 以外のものを扱いうるからである。F を最小化する過程では，積率行列 $M=1/Nzz'$，相関係数行列 R も用いることができる。ここで，一般に M は計量経済学モデルで，方程式の切片がゼロでない場合に用いられる。したがって，計量経済学モデルでは χ^2 値が大きく出る傾向がある。一般に，標本が多変量正規分布から離れるほど χ^2 値は大きくなる。

また，$(N-1)F(\hat{\Sigma})$ が漸近的に自由度 $\frac{1}{2}(p+q)\times(p+q+1)-l$ の χ^2 分布をするとしても，N が十分大きくなると統計的検定力理論から複合帰無仮説は棄却されるようになる。多重指標線型構造モデルではモデル選択が実質的理論の構築にかかわる重要な問題なのだから，χ^2 分布のこのような性質は，困難な状況を導く。赤池の情報量基準（Akaike's information criterion, AIC）は，このような際の一つの目安となる[23)]。

$$\mathrm{AIC}=-2\log(\max\mathrm{L}_\omega)+2l \qquad (3\cdot36)$$

ここで，$\max\mathrm{L}_\omega$ は，仮説 H_0 の下での尤度関数 L_ω の最大値であり，l は独立なパラメータの数である。ところで，LISREL，MILS 等の中にはこの AIC は入っていない[24)]。そこで，F の最小値を使って，測り直した赤池の基準（rescaled Akaike's information criterion）C_A が提唱されている[25)]。C_A の都合の良い点は，$F(\hat{\Sigma})$ を出すプログラムが存在するので手計算でも簡単に求められることであろう。これが，モデル選択の際に有効なことは言うまでもない。

$$C_A=F(\hat{\Sigma})+2l/N \qquad (3\cdot37)$$

このほかに，χ^2/df，すなわち χ^2 と自由度の比で適合度を調べたり，Tucker＝Lewis の係数を用いたりする。Tucker＝Lewis の係数は χ^2/df に基づくものである[26)]。この係数は 0 と 1 の間の値をとるように正規化されている（大きいほど良い適合）。Bentler and Bonnet はこれをよりモデルの選択に役立つように，増加適合指数に改造している[27)]。この指数はもはや正規化されていない。なお，Jöreskog and Sörbom によっても，適合度指数（GFI），残査平均平方根（RMR），などのさまざまな指数が提唱されている[28)]。

さて，H_0 を特定化するためには，各パラメータ行列について，(a)デザイン行列，(b)初期値行列，を与えることが必要である。すでに述べた 3 種類のパラメータの特定をするのがデ

ザイン行列である。MILS では 0,1,2,3 の 4 つの数字で特定する。また，初期値の指定をすることは，パラメータ推定に不可欠である。というのも数値計算上で，初期値の与え方によって，(i)解の存在，(ii) 収束速度，にちがいが生じてくるからである。以上，2 つの指定に関して対称行列では下三角行列についてだけ指定すればよい[29]。

ところで，潜在変数には論理的な尺度が必ずしも決められぬのではないかと考えることもできる。この場合，得られたパラメータの推定値は満足すべきものとは考えられぬことになる。この場合に用いたらよいのが，標準化解 (standardized solution) である。標準化解は，潜在変数の分散を 1 とした場合の解をいい，＊をつけることによって，非標準化解 (unstandardized solution) と区別する。標準化解と非標準化解との間には次のような関係がある[30]。つまり，以下のように，標準化解は単なる正規化ではない。

いま，C, D は (2•12)〜(2•13) 式で与えられている。このとき，LISREL では，

$$\hat{A}_\eta = (\mathrm{diag}\hat{C})^{1/2} \tag{3•38}$$

$$\hat{A}_\xi = (\mathrm{diag}\Phi)^{1/2} \tag{3•39}$$

とすれば，次の関係式が成立する (∧は推定値であることを示す)。

$$\hat{\Lambda}_y{}^* = (\mathrm{diag}\hat{\Sigma}_{yy})^{-1/2}\hat{\Lambda}_y\hat{A}_\eta \tag{3•40}$$

$$\hat{\Lambda}_x{}^* = (\mathrm{diag}\hat{\Sigma}_{xx})^{-1/2}\hat{\Lambda}_x\hat{A}_\xi \tag{3•41}$$

$$\hat{B}^* = \hat{A}_\eta^{-1}\hat{B}\hat{A}_\eta \tag{3•42}$$

$$\hat{\Gamma}^* = \hat{A}_\eta^{-1}\hat{\Gamma}\hat{A}_\eta \tag{3•43}$$

$$\hat{\Phi}^* = \hat{A}_\xi^{-1}\hat{\Phi}\hat{A}_\xi^{-1} \tag{3•44}$$

$$\hat{\Psi}^* = \hat{A}_\eta^{-1}\hat{\Psi}\hat{A}_\eta^{-1} \tag{3•45}$$

$$\hat{D}^* = \hat{A}_\zeta^{-1}\hat{D}\hat{A}_\xi^{-1} \tag{3•46}$$

$$\hat{C}^* = \hat{A}_\eta^{-1}\hat{C}\hat{A}_\eta^{-1} \tag{3•47}$$

MILS では上記の値がより一般的である。さて，さらに一歩を進めて潜在変数そのものをケース毎に推定することが考えられる。ただし，このためには入力するデータが素データであることまたは，素データのディスクかテープからの入力が必要である。まず，潜在変数ベクトルの推定値を $\hat{f} = (\eta', \xi')'$ で表わす。このとき，$\hat{f}$ は次式で表わせる。これをここでは Lawley = Maxwell スコアと呼ぶ[31]。(　　)

$$\hat{f}=\begin{pmatrix} C & D\emptyset \\ \emptyset D' & \emptyset \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Lambda'_y & 0 \\ 0 & \Lambda'_x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Sigma_{yy} & \Sigma_{yx} \\ \Sigma_{xy} & \Sigma_{xx} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \tag{3.48}$$

Lawley = Maxwell スコアはケース毎に得られるからこの散布図を2次元平面に射影した図を描くことによって視覚的に潜在変数間の関連をとらえることもできる。(3•48) 式右辺の係数にあたる部分をGとしよう。このGは，指標と変数との関係を示したものであって，どの指標が変数に強く作用しているかを示している。

$$G=\begin{pmatrix} C & D\emptyset \\ \emptyset D' & \emptyset \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Lambda'_y & 0 \\ 0 & \Lambda'_x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Sigma_{yy} & \Sigma_{yx} \\ \Sigma_{xy} & \Sigma_{xx} \end{pmatrix}^{-1} \tag{3•49}$$

したがって，Lawley = Maxwell スコア回帰行列Gは，潜在変数の構成の仕方を知るための1つの目安となる。

他方，$\hat{f}^*$ と＊をつけて，$\hat{f}^*=(\eta',\xi')'$ を推定する。まず，次の行列Hを定義しておく。

$$H=\begin{pmatrix} \Lambda'_y & 0 \\ 0 & \Lambda_x' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \theta_\varepsilon & \theta_{\varepsilon\delta} \\ \theta'_{\varepsilon\delta} & \theta_\delta \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \Lambda_y & 0 \\ 0 & \Lambda_x \end{pmatrix} \tag{3•50}$$

このとき，$\hat{f}^*$ は次式で表わされる。

$$\hat{f}^*=\begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \Lambda'_y & 0 \\ 0 & \Lambda'_x \end{pmatrix}'\begin{pmatrix} \theta_\varepsilon & \theta_{\varepsilon\delta} \\ \theta'_{\varepsilon\delta} & \theta_\delta \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \tag{3•51}$$

$\hat{f}^*$ をここでは Bartlett スコアとよぶ。ここで，H_{11}, H_{12}, H_{21}, H_{22} は H の部分行列である。(H は Bartlett スコア回帰行列とよぶ。)

$\hat{f}^*$ は真のfの不偏推定量であるが，$\hat{f}$ は不偏推定量ではない。いくつか数値を出してみた経験からは，両者とも似たような傾向がみられた (回帰係数行列について)[32]。他方，$\hat{f}$ よりも $\hat{f}^*$ の方が変動が大きいことがわかる。いずれにせよ，これらのスコアは，標本全体の中に占める個体の位置を知るのに有益な分析道具である。

4. 農業意欲と経済的満足——モデルの適用

これまでは，多重指標線型構造モデルの固い側面のみを扱ってきたので本節では，実際の問題への適用を考えてみたい。1970年世界農林業センサスでは，入会についての項目が存在しており[33]，これについて既に別のところで若干の考察を試みた[34]。ここで問題としたいのは，入会林野の存在の有無によって，農業意欲や経済的満足に差があるか，というものであ

る。

このため，全国から約300の農業集落を標本として抽出し，入会林野の保有のいかんによって標本を2分した。農業意欲および経済的満足を内生概念（内生潜在変数）とし，指標としては，あとつぎ専従農家率，林野率，経営面積，水田率，農業本業農家率，ゆい，販売額，10aあたり販売額，1人あたり販売額を用いた。各概念と指標とは，図1～2に示すような測定モデルの上に成り立つとする。また，ここで，データについて，$\Lambda_x = I$，$\delta = 0$ という仮定を外生指標につけた。これは，測定モデルの部分におけるやや強い仮定であるが，このデータの性格からして，さほど大きな問題はないと考えてよい。そして，内生指標をあとつぎ農家率，農業本業農家率とし，他の指標はすべて外生指標とし，いくつかのモデルの中から，ここでとりあげたものを選んだ。

ここでの関心は，入会林野の有無による農業経営意識の構造の相異をとらえることにある[35)]。分析は相関係数行列Rを用いて行った。この過程でかなりの欠損値があったために，実際に用いた標本の大きさは，約半分強となった。すなわち，入会林野のある集落で71，ない集落で81となった。この数は，必ずしも十分に満足のゆくものではないが，ここでの目的のために役立つものといえる[36)]。

あとつぎ農家率は，あとつぎ農業に専従している農家の割合を示したものである。また，ゆいは農家数で測っしいる。また，林野率を指標としてとり入れたのは，これが農業集落のおかれた自然環境を表わしていると考えたからである。

パラメータ行列について，先の仮定から $\theta_\delta = 0$ となる。x_1＝林家率，x_2＝経営面積，x_3＝水田率，x_4＝ゆい，x_5＝販売額，x_6＝10aあたり販売額，x_7＝1 人あたり販売額，と外生指標を決める。y_1＝あとつぎ農家率，y_2＝農業本業率と内生指標を定める。η_1＝農業意欲，η_2＝経済的満足とする。ここで，$x_i \equiv \xi_i (i=1,\cdots,7)$ となっていることに注意しておく。モデルは，次のようなものである。

$$\begin{pmatrix} 1 & \beta_1 \\ \beta_2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_5 & \gamma_6 & \gamma_7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} \tag{4·1}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ \lambda_2 & \lambda_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix} \tag{4·2}$$

この分析結果の非標準化解（つまり普通の解）の値が，図1～図2に示されている。ただし，前に述べたように，Bの値には注意を要する。ここで図に示されているのは，$B^+ = I - B$ の要素の値である $-\beta_1, -\beta_2$ である。したがって，これらの値は直接に解釈してよい。

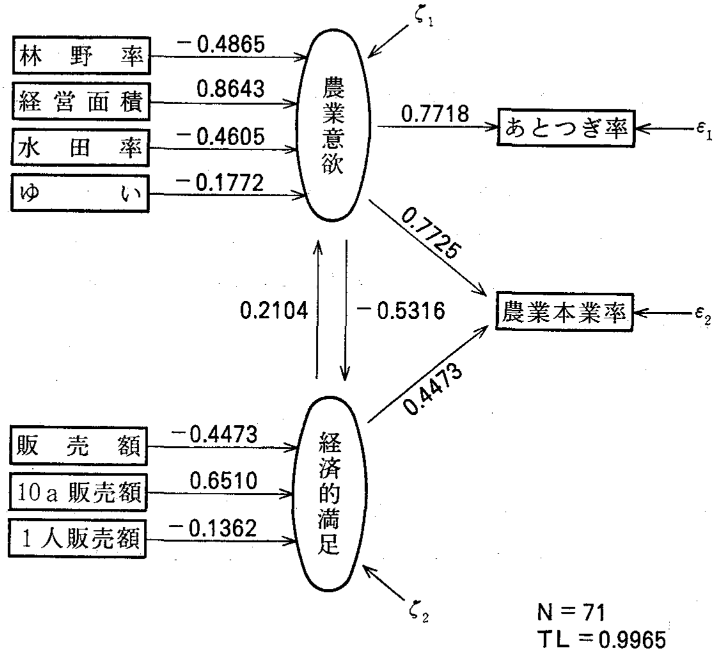

図 1 農業意欲と経済的満足（入会林野あり，TL はTucker-Lewis の係数）

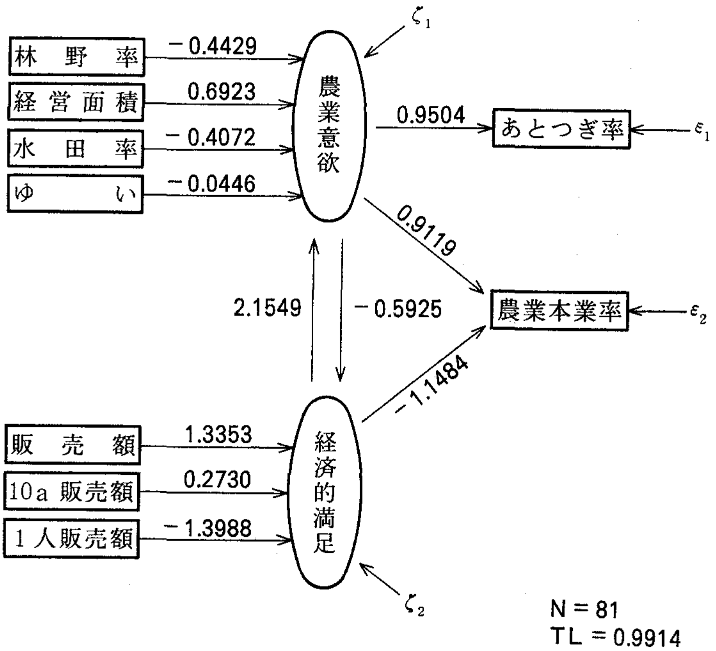

図 2 農業意欲と経済的満足（入会林野なし，TL は前図と同じ）

一般にBまたは B^{+} の解釈には（特に静学的モデルのとき），十分に注意を必要とする。つまり，$\beta_{ij}(\fallingdotseq 0)$ と $\beta_{ji}(\fallingdotseq 0)$ が共に存在するとき（$i \fallingdotseq j$）の係数の解釈および実質的意味の問題が生じる。この点については，データそのものの性格にたちかえって検討すべきである[37]。

さて，多重指標線型構造モデルにおける異なる母集団からの標本の比較の問題についてここでとった立場にふれておくべきであろう[38]。ここでは，もっとも素朴に非標準化解で吟味した。また，計算も母集団ごとに別個に行っている。というのもこの問題については明確な統計学的根拠が得られていないからである。

図1～2で林野率では γ_1 の符号も数値もほとんど同じくらで，あまり農業意欲を高めるものではないようにみえる。販売額については図1と2で符号が異なっており，入会林野のある集落では経済的満足を低め，ない集落では逆に高めている。また，この数値のちがいも，非標準化解だからあまり意味が少ないとしても，その大きの違いは示唆的である。（標準化解では，ある集落で－.397，ない集落で3.336）経済的満足と農業本業率とについても図1と2で符号が異なる。

また，農業意欲は，図1および2の双方でマイナスの効果を経済的満足へ与えている。$B^{-1}-I$ で示される内生概念間の総因果効果でもこのことは変わらない。意欲だけで経済的満足を得られぬ。このことを数値で示しおこう。添字aは入会林野のあることを，bはないことを示すものとする。

$$B_a^{-1}-I_a=\begin{pmatrix} -.101 & .189 \\ -.481 & -.101 \end{pmatrix}$$

$$B_b^{-1}-I_b=\begin{pmatrix} -.561 & .947 \\ -.260 & -.561 \end{pmatrix}$$

同様にして，間接因果効果 $B^{-1}-B$ についてみれば，いずれの場合でも，農業意欲から経済的満足への効果はプラスとなる。しかし，直接因果効果 $I-B$ が大きいので，続果的に，総因果効果はマイナスとなる。ここで注意を要するのは，この効果の分解は，内生概念間だけでの波及効果についてのものだということである。これに関連して Graff and Schmitt が，効果の分解を Merton 以来の「予期せざる帰結」や，質問紙調査を2度した場合，2度目の方が一貫性が高いという「ソクラテス効果」などと続びつけて論じていることも注目されてよいだろう[39]。この効果の分解という考え方は，社会統計学ではよくみられるものである[40]。

$$B_a^{-1}-B_a=\begin{pmatrix}-.101 & -.021\\ .054 & -.101\end{pmatrix}$$

$$B_b^{-1}-B_b=\begin{pmatrix}-.561 & -.208\\ .332 & -.561\end{pmatrix}$$

入会林野の有無による $\beta_2/\beta_1=\alpha$ の絶対値$|\alpha|$を比べると，(a)入会林野がある場合，$|\alpha|=2.54$，(b)入会林野がない場合，$|\alpha|=.43$，となる。ここで，農業意欲と経済的満足のもつ構造的意味が，入会林野の有無によって異なることが目につく。ところで，農業意欲を強く規定しているのは，いずれの場合でも，経営面積である。因果の経路をみてみれば，経営面積の大きさでは，必ずしも経済的満足を得られぬことを示している。このことは，専業農家の間にみられる不満感を示唆しているともいえる[41)]。農民は，土地に愛着心をもつから，この傾向を示しているともいえる。先祖からの家産と考えるにせよ，不動産と考えるにせよ。他方，「ゆい」のように古来の労働力交換方法は，農業意欲にマイナスに作用し，何よりもその大きさも小さい。もはや，このような経済秩序は集落内で意味を失い，かつての秩序感そのものが崩壊していることを示唆している。

水田率が農業意欲にマイナスの効果を与えていることがわかる。このセンサスの翌年から米の生産調整が始められるが，すでに，マイナス効果があったわけである。機械化の進展などで米作は手間のかからぬようになっていたし，同時に，兼業農家のもっとも代表的作物の1つである。図1および2において，水田率から農業意欲を経て，あとつぎ農家率および農業本業農家率に到る経路をたどることは示唆的である。この過程の一面を示すものとして，1970年の農林省農家経済調査で，農家所得に占める農業所得の割合が33.4%になっていたことは示唆的である。

10aあたり販売高が経済的満足にプラスの効果を与えている。たいてい，農家の経営努力は，省力化に向い，土地あたりの販売高の向上に向うことは少ない，といわれる[42)]。経営での収益性の向上が，単位面積あたりでおこれば，経済的満足は向上する。ここで，米作の場合の収益性の変動幅はせまいと考えられる。したがって，より市場性の高い農作物栽培が必要となることを示している。他面で，1人あたり販売額は，経済的満足にマイナスの効果を与えている。これらの点は，入会林野の有無にかかわらぬ一般的なものである。より多くのモデル選択を行うことによってより現実に適合するモデルを発見できよう。

5. むすび

多重指標線型モデルは，従来の機械的な統計的方法と異なり，慎重なモデル選択が必要と

される。また，社会学概念の本来もつ多重指標性の分析にもっとも有効なモデルでもある。この意味で，理論構成とも強く結びつく[43]。Merton の社会学的表現では，多重指標については，“single term, diverse concept” であった[44]。Merton のこの議論は，必ずしもここでの議論に直ちにつながるものではないが，Merton が多重指標の問題にも十分に留意していたことを物語っている。このモデルは次第に成長してきたものであり，社会学にもっとももふさわしいモデルの１つである[45]。さらに詳細な考察は今後の課題である[46]。

〔注〕

1) LISREL は，Linear Structure Relations の略語で商標でもある。
2) 社会調査における測定については，直井優，(1983)，「社会調査の設計」，同編，『社会調査の基礎』，サイエンス社，1-43頁参照。
3) Lawley, D. (1940), “The Estimation of Factor Loadings by the Method of Maximum Likelihood,” *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, Section A, vol. 60, pp. 64-82. が端緒である。Jöreskog, K. (1963), *Statistical Estimation in Factor Analysis: A New Technique and Its Foundation*, Stockholm, Almqvist and Wiksell および Lawley, D. and Maxwell, A. (1963), *Factor Analysis as a Statistical Method*, London, Butterworth, 丘本正監訳，(1970)，『因子分析法』日科技連，は初期の主な文献である。
4) FIML については Goldberger, A. (1964), *Econometric Theory*, New York, John Wiley and Sons, 福地崇生・森口親司訳 (1970)，『計量経済学の理論』，東洋経済，393-397頁を参照。多重指標線型構造モデルの計量経済学への適用については，Jöreskog, K. (1973), “Estimating a Linear Structural Equation System,” in Goldberger, A. and Duncan, O. (eds.), *Structural Equation Models in the Social Sciences*, New York, Seminar Press, pp. 96-99, および ditto, (1978), “An Econometric Model for Multivariate Panel Data,” *Annales de L'INSEE*, No. 30-31, pp. 355-366 を参照。
5) Fletcher, R. (1980), *Practical Methods of Optimization*, vol. 1, New York, pp. 33-62, Lawley, D. and Maxwell, A. op. cit., pp. 138-146, Fletcher, R. and Powell, M. (1963), “A Rapidly Convergent Descent Method for Minimization,” *Computer Journal*, vol. 2, pp. 163-168, およびより手ごろには，Adby, P. and Dempster, M. (1974), *Introduction to Optimization Methods*, London, Chapman and Hall, を参照。中川徹・小柳義夫 (1982)，『最小二乗法による実験データ解析：プログラム SALS』，東京大学出版会，95-124頁も参照。
6) プログラムに関する文献としては，Jöreskog, K., Gruvaes, G. and van Thillo, Marielle (1970), ACOVS: A General Computer Program for Analysis of Covariance Structures, Research Bulletin 70-15, Princeton, Educational Testing Service; Jöreskog, K. and van Thillo, Marielle (1972), LISREL: A General Computer Program for Estimating a Linear Structural Equation System Involving Multiple Indicators of Unmearsured Variables, Research Bulletin 72-56. Princeton, Educational Testing Service; Jöreskog, K. and Sörbom, D. (1976), *LISREL III: Estimation of Linear Structural Equation Systems by Maximum-likelihood Methonds*, Chicago, National Educational Resources; ditto. (1978), *LISREL IV: Analysis of Linear Structural Relationships by the Method of Maximum Likelihood*, Chicago, National Educational Resources; ditto. (1981), *LISREL V: Analysis of Linear Structural Relationships by Maximum Likelihood and Least Square Methods*, Chicago, National Educational Resources; ditto. (1979), *EFAP: Exploratory Factor Analysis Program*, Chicago, National Educational Resources; Sörbom, D. and Jöreskog, K. (1976), *COFAMM: Confirmatory Factor Analysis with Model Modification*, Chicago, National Educational Resources; および Schoenberg, R. (1981), MILS: A Computer Program to Estimate the Parameters of Multiple Indicator Linear Structural Models, Bethesda, National Institute of Mental Health, unpublished. 本稿でも MILS をバージョンアップして用い

た。「多重指標線型構造モデル」という名称もこれに従った。そのほか Bentler, P. にも EQS というプログラムがあるとのことである。 Bentler, P. and Tanaka, J. (1983), "Problems with EM Algorithms for ML Factor Analysis," *Psychometrika*, vol. 48, pp. 247-251, を参照。

7) Bentler, P. and Weeks, D. (1980), "Linear Equations with Latent Variables," *Psychometrika*, vol. 45, pp. 289-308, がまずこの点を指摘した。

8) 時点が異なるモデルではしばしば，この仮定を緩和せねばならない。たとえば，Jöreskog, K. and Sörbom, D. (1979), *Advances in Factor Analysis and Structural Equation*, Models, Cambridge, Abt Books, Part II. を参照。

9) Bentler, P. (1976), "Multistructure Statistical Model Applied to Factor Analysis," *Multivariate Behavioral Research*, vol. 11, pp. 3-25.

10) Jöreskog, K. and Wold, H. (eds.), (1982), *Systems under Indirect Observation: Causality-Structure-Prediction*, Part II, Amsterdam, North-Holland.

11) Wold, H. (1982), "Soft Modeling: The Basic Design and Some Extensions," in, Jöreskog, K. and Wold, H., op. cit., pp. 1-54.

12) Wold, H. (1975), "Path Models with Latent Variables: The NIPALS Approach," in Blalock, H. et al., (eds.), *Quantitative Sociology*, New York, Seminar Press, pp. 307-357. で社会学と接触がある。

13) Anderson, T. (1968), *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis*, New York, John Wiley and Sons, pp. 53-54.

14) Ibid, pp. 154-156; 伊藤孝一 (1969),『多変量解析の理論』, 培風館, 47-48頁参照。ここでの考え方は, Lawley, D. op. cit., および ditto. (1967), "Some New Results in Maximum Likelihood Factor Analysis," *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, Section A, vol. 67, pp. 256-264, で明らかにされている。

15) Wilks, S. (1962), *Mathematical Statistics*, New York, John Wiley and Sons, pp. 419-422, 田中英之・岩本誠一訳 (1972),『数理統計学 2』, 東京図書, 147-149頁の証明を参照。

16) $X=(x_{ij})$ を対称行列としたとき，次式が成り立つからである。

$$\frac{\partial X}{\partial x_i}=\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} & i & & j & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \end{array} (i \neq j)$$

17) ここでは，測定モデルが特殊ケースとなっている Jöreskog, K. (1973), op. cit., を参照し，より一般的な形で証明を示した。論理の流れも明らかだと思う。

18) Jöreskog, K. (1975), "Factor Analysis by Least-squares and Maximum-likelihood Methods," in Enslein, K. et al., (eds.), *Statistical Methods for Digital Computers*, New York, John Wiley and Sons, pp. 125-153, および Jöreskog, K. (1967), "Some Contributions to Maximum Likelihood Factor Analysis," *Psychometrika*, vol. 32, pp. 443-482, での計算方法を参照。

19) Gnadesikan, R. (1977), *Methods of Statistical Data Analysis of Multivariate Observations*, New York, John Wiley and Sons, 丘本正・磯貝恭史訳 (1979),『統計的多変量データ解析』, 日科技連, 145-175頁を以下参照。

20) 統計数値表編集委員会編 (1977),『簡約統計数値表』, 日本規格協会, 34頁および, Pearson, E. and Hartley, H. (1966), *Biometrika Tables for Statisticians*, vol. I, Cambridge University Press, pp. 207-208 参照。

21) この式は前注の数表の記号法に合わせてあるので注意。 n は標本の大きさ，x_i は i 番目の観測値，$\overline{x}$ は標本平均，s^2 は標本分散。

22) Jöreskog, K. and Sörbom, D., (1981) op. cit., p. 138, を参照。

23) 赤池弘次 (1976)「情報量規準 AIC とは何か――その意味と将来への展望」,『数理科学』, 153, 5-11頁。

24) この点を含めて，現在大阪大学大型計算機センターでバージョンアップ予定。

25) Cudeck, R. and Browne, M. (1983), "Cross-Validation of Covariance Structures," *Multivariate Behavioral Research*, vol. 18, pp. 147-167 参照。このほかに Schwartz の基準とその改

良した基準が示されている。

26) Tucker, L. and Lewis, C. (1973), "A Reliability Coefficient for Maximum Likelihood Factor Analysis," *Psychometrika*, vol. 38, pp. 1-10.

27) Bentler, P. and Bonnet, D. (1980), "Significance Tests and Goodness of Fit in the Analysis of Covariance Structures," *Psychological Bulletin*, vol. 88, pp. 588-606.

28) Jöreskog, K. and Sörbom, D. (1981), op. cit., pp. I. 36-42.

29) Ibid., 実際に計算してみるとよい。ここでは，これ以上ふれない。

30) Jöreskog, K. and Sörbom, D. (1979), op. cit., pp. 59-60 参照。

31) Lawley, D. and Maxwell, A. (1971), *Factor Analysis as a Statistical Method*, London, Butterworth, pp. 106-113 の結果を拡張したものである。やはり，前掲書で用いられたものである。

32) 既存のプログラムではどちらか片方だけを出力する。MILS 大阪大学版では両方可能。

33) 川島武宜 (1983),「入会権研究の現状と問題点」,『川島武宜著作集 8：慣習法上の権利 上』，岩波書店，274-310頁を参照。

34) 拙稿 (1983),「入会林野と農業集落」,『大阪大学人間科学部紀要』，第 9 巻，155-188頁。

35) もちろん，他にも解明すべきものとして，1980年の農地利用増進法等による農地貸借の流動化の促進の問題や，専業農家の不満感が第 1 種兼業農家より高いなど，さまざまの問題がある。たとえば，石川英雄編 (1983),『土地と農村』，農林統計協会；NHK 放送世論調査所編 (1980),『日本の農業――その現状と農民意識』，日本放送出版協会，50-53頁などを参照。

36) Boomsma, A. (1982), "The Robustness of LISREL against Small Sample Size in Factor Analysis Models," in Jöreskog, K. and Wold, H. (eds.), *Syetems under Indirect Observation: Causality-Structure-Prediction*, Part I, Amsterdam, North-Holland, pp. 149-173 では標本の大きさの問題が論じられている。

37) Heise, D. (1975), *Causal Analysis*, New York, John Wiley and Sons, pp. 225ff. の議論がもっとも参考となろう。

38) この問題は社会学にとって重要なものである。Schoenberg, R. (1972), "Strategies for Meaningful Comparisons," in Costner, H. (ed.), *Sociological Methodology 1972*, San Francisco, Jossey-Bass, pp. 1-35; Wilson, K. (1981), "On Population Comparisons Using Factor Index or Latent Variables," *Social Science Research*, vol. 10, pp. 301-313. 特に後者は有益である。また，Please, N. (1973), "Comparison of Factor Loadings in Different Populations," *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, vol. 26, pp. 61-89 は興味深いものである。

39) Graff, J. and Schmitt, P. (1982), "A General Model for Decomposition of Effects," in Jöreskog, K. and Wold, H. (eds.), op. cit pp. 131-148.

40) Fox, J. (1981), "Effect Analysis in Structural Equation Models," in Marsden, P. (ed.), *Linear Models in Social Research*, Beverly Hills, Sage, pp. 178-202 などを参照。

41) ＮＨＫ放送世論調査所編，前掲書，114-120頁。

42) 同上書，24-26頁参照。

43) Burt, R. (1973), "Confirmatory Factor Analytic Structure and the Theory Construction," *Sociological Methods and Research*, vol. 2, pp. 131-190 などの考え方を参照。

44) Merton, R. (1968), *Social Theory and Social Structure*, New York, Free Press, pp. 74-79, 森東吾・森好夫・金沢実・中島竜太郎訳 (1961),『社会理論と社会構造』，みすず書房，16-21頁参照。

45) Kohn, M. and Schooler, C. (1983), *Work and Personality*, Norwood, Ablex, は一貫してこの方法で分析を行っている。これに関連して，Naoi, A. and Schooler, C. (1981), "Occupational Conditions and Psychological Functioning in Japan," Paper presented at the annual meeting of the American Sociological Association, Tronto もいちはやくこの方法で分析をしたものである。

46) ここでの計算は，大阪大学大型計算機センターの ACOS 1000 によった。プログラムのセンターへの適応およびバージョンアップに際してセンターのみなさんには親切にお世話いただいたこと，また，直井優助教授にもご指導いただいたことを感謝いたします。なお，MILS は LISREL をデベロップしたものである。

ON THE MULTIPLE INDICATOR LINEAR STRUCTURAL MODELS

Yukio SHIRAKURA

The purpose of this paper is to review the multiple indicator linear structural models (LISREL models), to pick up some points which are problems, and to apply the models to the real situations. The multiple indicator linear structural models have two good points which are quantification of latent variables and simultaneous estimation of parameters. Recently, the study of the multiple indicator linear models has been developing rapidly and its achievements have become a center of attraction. But, until recently, various conditions were not satisfactory and the models were not used widely in this country.

A selective review of important parts of the multiple indcator linear structural models is given coherently, attention being concerated in mathematical derivations with full proof except optimization methods. Some remarks are also given on the measures of goodness of fit and multinormality. It is suggested that AIC or a rescaled AIC is recommended for both model selection and comparative analysis. But, the methods of evaluating multinormality are underdeveloped.

Sociological examples are given to clarify the explanation given so far. Population comparison using latent variables (i. e. agricultural motivation and economic satisfaction) is demonstrated. But, usual solution to scale latent variables in the different populations according to the same indicaroe is not used here, because there are no reason to do so in statistically. Our samples are rural communities both with iriai-rinya (common land) and without. Iriai-rinya is habitually owned common land. The result that the existence of iriai-rinya has effects on agricultural motivation and economic satisfaction was obtained. To be sure, such a result could be anticipated on sociological grounds. But, reports of this type of research have apparently not have been published to date. Finally, this promising field of research has just begun. Further investigation is neccesary.