The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	動作環境によって動特性が変化するシステムのモデリングと制御に関する研究
Author(s)	村松, 鋭一
Citation	大阪大学, 1998, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.11501/3144205
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

動作環境によって動特性が変化するシステムのモデリングと制御に関する研究

1997 年 11 月

村松　鋭一

序文

本論文は，動作環境によって動特性が変化するシステムのモデリングと制御系設計のための理論的研究をまとめたものである．この研究は，著者が住友金属工業株式会社に在職していたときの神戸大学工学部池田雅夫教授との研究協力から始まった．そして，著者が同社を退職し，神戸商船大学商船学部に勤務して現在に至るまでこの研究を行い，いくつかの成果を得ることができた．本研究では，複数の代表的な動作点における制御対象のモデルを補間することによって制御対象を表現することと，各動作点におけるコントローラを補間することにより制御系を設計することについての理論的な考察を行っている．補間という基本的な手法でありながら，モデリングと制御系設計におけるその理論には，考察を要する多くの問題が存在していることが研究を進めるにつれてわかってきた．この研究を始めたときは，ある補間されたモデルが与えられているという前提で，コントローラの補間による安定化問題を考察していた．しかし，モデルを補間することにも考えるべき問題が存在することがわかり，それに対する考察により，補間によるモデルの構成法を示すに至った．さらに，補間によって構成されたモデルが誤差をもつ場合への対応としてロバスト安定化問題を，また，制御対象の動特性の時間的変化への対応のために時変システムとしての安定化問題を考察した．このように，実システムへの適用可能性を意識しながら問題や課題を設定し，それらに対する答えを示すことによって理論を構築してきた．現在それらの問題や課題を全て解決しているわけではないが，本研究によって補間によるモデルの構成法や，コントローラの補間による制御系設計法が明らかになり，特に安定化問題については十分に解決されたと思われるので，ここに研究成果をまとめる．

本論文は９つの章と付録から成る．

第１章では，本研究の動機と目的および本論文の構成を述べる．

第２章では，動作環境の変化によって動特性が変化する制御対象のモデルとして補間モデルを，そして，これを安定化するコントローラとして補間コントローラを導入する．補間モデルとは，代表的な動作環境における制御対象の伝達関数（基準モデル）の既約分解を補間したモデルであり，補間コントローラとは，基準モデルに対する安定化コントローラの既約分解を補間したコントローラである．これらの定義を述べるとともに，補間モデルの性質，補間コントローラの特徴，本論

文で考察する安定化問題について説明する．また，補間モデルの安定化可能性と基準モデルの同時安定化可能性の関連について述べる．

第３章では，制御対象の良い近似となるように補間モデルを構成する方法を提案する．基準モデルの既約分解の選び方によって補間モデルが変わることに着目し，実際の制御対象に補間モデルがある意味で近くなるように基準モデルの既約分解を求める問題を定式化し，この問題の解法を与える．また，磁気浮上系を例に，補間モデルの構成法の具体的手順を示す．

第４章では，１入力１出力の補間モデルを，補間コントローラによって安定化する問題について考察する．この安定化問題をネバンリナ・ピックの補間問題に帰着させ，補間モデルが補間コントローラによって安定化可能であるための必要十分条件と，これが成り立つときの補間コントローラの構成法を示す．

第５章では，多入力多出力の補間モデルに対して，補間および固定のコントローラによる安定化問題を考える．安定化可能であるための十分条件が，ある種の H_∞ 制御問題の可解条件によって表わされることを示す．さらにこの条件が，状態空間において線形行列不等式を用いた条件によって表わされることを示し，コントローラの構成法を述べる．

第６章では，補間モデルが制御対象に対してもつ近似誤差に対処するために，制御対象の動特性を含むような補間モデルの集合を定義し，これに対する安定化問題を考察する．補間および固定のコントローラによる安定化可能条件を H_∞ ノルム条件といくつかの不等式条件を用いて示す．また，これらによって表わされる安定化可能条件を，状態空間で線形行列不等式によって表現し，コントローラの構成法について述べる．

第７章では，補間モデルによって表わされる制御対象に対して，２自由度ロバストサーボ系を構成することを考える．この系を構成するフィードフォワード要素とフィードバック要素のそれぞれを補間形式で設計する方法を与える．

第８章では，制御対象の時間的な変化を考慮するため，補間モデルを状態空間で表現するとともに，補間コントローラも状態空間で定義する．そして，時変系としての安定化可能条件を行列不等式で示し，補間コントローラの構成法を示す．

第９章では，本研究の成果をまとめる．

付録では，各章で示された結果の補足説明を与える．

発表論文

- 第２章
  - 動作状態が変化する多入出力システムの安定化,（村松，池田，玉井），システム制御情報学会論文誌，Vol.7, No.2, pp.42~50 (1994)
  - Stabilization of a Multi-Input Multi-Output Plant with Variable Operating Conditions, (E. Muramatsu, M. Ikeda, and T. Tamai), Proceedings of the 2nd World Congress on Nonlinear Analysts (1996)
- 第３章
  - 動作環境が変化する制御対象のモデリング — 既約分解アプローチによる補間モデル —,（村松，池田），計測自動制御学会論文集，Vol.32, No.11, pp.1501~1509 (1996)
  - Modeling of a Plant with Variable Operating Conditions: An Interpolation of Coprime Factorization Models, (E. Muramatsu and M. Ikeda), Proceedings of the 35th IEEE Conf. Decision and Control, Kobe, Japan, pp.2255-2260 (1996)
- 第４章
  - 動作状態が変化する制御対象の安定化,（村松，池田，星井），計測自動制御学会論文集，Vol.31, No.9, pp.1336~1342 (1995)
  - An Interpolated Controller for a Plant with Variable Operating Conditions, (E. Muramatsu, M. Ikeda, and N. Hoshii), Proceedings of the 34th IEEE Conf. Decision and Control, New Orleans, LA, U.S.A., pp.4349~4354 (1995)
  - An Interpolated Controller for Stabilization of a Plant with Variable Operating Conditions, (E. Muramatsu, M. Ikeda, and N. Hoshii), IEEE Trans. Automatic Control (to appear)

- 第5章
  - 動作環境が変化する多入出力システムの安定化 — 基準モデルの数が3以上の場合，(村松，西野，池田)，システム制御情報学会論文誌，Vol.9, No.4, pp.188~196 (1996)
  - Stabilization of a Plant with Variable Operating Conditions: Interpolation of More than Two Representative Models, (E. Muramatsu, M. Ikeda, and S. Nishino), Proceedings of the European Control Conference, TU-E-B3 (1997)
- 第6章
  - 既約分解アプローチによる補間モデル集合の安定化 — 動作環境が変化するプラントのロバスト制御 —，(村松，池田，松本)，計測自動制御学会論文集，Vol.32, No.6, pp.835~843 (1996)
  - Stabilization of a Set of Interpolated Plants: A Factorization Approach, (E. Muramatsu, M. Ikeda, and K. Matsumoto), Proceedings of the 13th IFAC World Congress, Vol.D, pp.137-142 (1996)
- 第7章
  - 動作環境が変化するシステムに対する2自由度ロバストサーボ系の設計，(首藤，池田，村松)，第35回SICE学術講演会資料，pp.871~872 (1996)
- 第8章
  - Stabilization of a Plant with Time-Varying Operating Conditions: An Interpolated Stabilizing Controller, (E. Muramatsu and M. Ikeda), Proceedings of the 36th IEEE Conf. Decision and Control, San Diego, U.S.A. (1997) (to be presented)

目 次

第 1 章　緒論 1

1.1 研究の背景 1

1.2 研究の目的と特徴 2

1.3 論文の構成 4

第 2 章　補間モデルと補間コントローラ 7

2.1 緒言 7

2.2 補間モデルと補間コントローラ 7

2.3 基準モデルの同時安定化可能性 12

2.4 結言 15

第 3 章　補間モデルの構成法 17

3.1 緒言 17

3.2 問題設定 18

3.3 ＢＭＩを用いた解法 20

3.4 参照モデルが複数の場合への拡張 24

3.5 磁気浮上系への適用例 26

3.5.1 磁気浮上系 26

3.5.2 補間モデルによる磁気浮上系のモデリング 26

3.6 結言 31

第 4 章　１入力１出力系に対する安定化問題 33

4.1 緒言 33

4.2 問題設定 33

4.3 補間コントローラによる安定化 35

4.4 固定コントローラによる安定化 41
4.5 安定化能力の比較 41
4.6 結言 42

第 5 章 多入力多出力系に対する安定化問題 45

5.1 緒言 45
5.2 問題設定 45
5.3 補間コントローラによる安定化 47
5.4 固定コントローラによる安定化 52
5.5 LMI を用いた安定化可能条件とコントローラの設計 53
5.6 数値例 57
5.7 結言 58

第 6 章 補間モデル集合の安定化問題 59

6.1 緒言 59
6.2 問題設定 59
6.3 補間コントローラによる安定化 61
6.4 固定コントローラによる安定化 64
6.5 LMI を用いた安定化可能条件とコントローラの設計 66
6.6 数値例 69
6.7 結言 71

第 7 章 2 自由度ロバストサーボ系の設計 73

7.1 緒言 73
7.2 ロバストサーボ問題 73
7.3 補間による補償器の設計 74
7.3.1 フィードバック要素の設計 74
7.3.2 フィードフォワード要素の設計 76
7.4 数値例 76
7.5 結言 78

第 8 章　制御対象の時間的変化への対応 **79**

8.1 緒言 79

8.2 時間的変化を表わす補間モデル 79

8.3 補間コントローラ 80

8.4 補間コントローラの構成法 81

8.4.1 行列不等式による安定化可能条件 81

8.4.2 LMI による安定化可能条件 I 84

8.4.3 LMI による安定化可能条件 II 86

8.5 数値例 88

8.6 結言 91

第 9 章　結論 **93**

参考文献 **97**

付録 **103**

A. 補間コントローラの状態空間表現 103

B. 補間モデルの既約性について 105

C. 既約分解のクラスについて 106

D. 第 3.3 節における行列 M の詳細 109

E. 無限遠点の零点が重複している補間問題について 111

F. 変動要因が複数ある場合の補間モデル 113

G. 既約分解の状態空間表現 115

謝辞 **119**

第1章

緒論

1.1 研究の背景

補間という言葉を簡単に説明すれば，点と点の間をつなぐべき線を求めること，もう少し数学的に言えば，ある関数の2つ以上の点における値がわかっているとき，それらの点の間の関数値を近似するような別の関数を求めることといえるであろう．数学における補間の研究は古くから行われており，例えば多項式関数による補間に関しては，補間多項式の構成法や，関数としての近似精度の解析に関する多くの結果が得られている [8 など]．補間はこのように奥深い数学的理論をもつが，それと同時にプラクティカルな場面で有用性を発揮する手法であるため，我々はそのような理論を知るまでもなく，身近なところで補間の考え方を利用している．データに潜む性質をグラフ化して表現するとき，点としてプロットしたデータを線でつなぐことなどは，その1つの例である．

このようなデータのグラフ化の場合，離散的な点を連続的につなぐことによって，各点における性質を，点の間も含めたより一般的なものに拡張することが，補間を行うことの狙いとなっている．補間がもつこのような離散から連続への拡張能力は，システムのモデリングと制御においても活用されてしかるべきものである．

例えば，航空機の操縦に対する動特性は，飛行する高度が高いときと低いときでは異なる．ある2つの異なる高度とそれらの間のすべての高度における航空機の動特性のモデリングを行うとき，いくつかの代表的な高度でのモデルを求め，それら以外の高度のモデルには代表的な高度で得られたモデルを補間したものを用いるという考え方は自然であり，有用であると期待できる．また，モデリングだけでなく制御系設計においても補間を用いることが考えられる．制御範囲となるすべての高度において，ある1つのコントローラでは制御仕様を満たすのが困難な場合，いくつかの代表的な高度で制御仕様を満たすコントローラを設計し，それら以外の高度においては代表的な高度におけるコントローラを補間して制御することが考えられる．

この例のように，いくつかの離散的な点において有効なモデルとコントローラを活用して，連続的な範囲においても有効なモデルとコントローラを構成することが，補間を用いることによって可能になると期待できる．しかしこのとき，どのような補間をすればよいかが問題となる．補間の仕方を充分に考えないでモデルやコントローラを補間したのでは，得られたモデルの動特性がシステムの動特性とはかけ離れたものとなったり，得られたコントローラは制御系の安定性さえ保証しないものとなってしまう．本章の最初に述べたように，補間は，数学の一分野として古くから研究がなされ，現在もさまざまな場面でその考え方が利用されている一般的な手法であるにもかかわらず，システムのモデリングと制御における補間の活用に対しては，意外にも十分な理論的考察がなされていなかった．システムの動特性変化を表わすためにモデルをどのように補間すればよいか，制御仕様を満たすためにはどのようなコントローラをどう補間すればよいか，という基本的なところから解決を要する問題を抱えていたのである．

1.2 研究の目的と特徴

本研究は，補間という考え方に基づいて，“動作環境”によって動特性が変化するシステムのためのモデリングと制御の理論を構築することを目的としている．そのために，複数の代表的なモデルを補間することによって，システムの動特性変化を近似する“補間モデル”を構成することと，複数のコントローラの補間によって，フィードバック系を安定化する“補間コントローラ”を設計することについて考察を行う．ここで，本研究のキーワードである“動作環境”，“補間モデル”，“補間コントローラ”の意味をより具体的に説明するために，まずは本研究の理論がどのようなシステムに対して適用を想定しているかを明確にしておく．

まず，補間に基づくモデリングが必要となるシステムとはどのようなものであるかを考えてみる．あるシステムの動特性を何らかの物理方程式を用いて記述できる場合には，物理定数が陽に現れるシステム表現（一般に状態方程式）を得ることができる．システムの動特性変化が物理定数の変化と対応づけられ，それらの値が変化の全範囲においてわかっているとき，物理定数をパラメータと見ることによって，そのシステム表現はシステムの動特性変化を表現するモデルとなる．このようなモデルが得られる場合には，モデリングに補間という考えは必要ない．一方，動特性を物理方程式で記述するのが困難なシステムに対しては，システム同定の手法を適用して，伝達関数を得ることが一般に行われる．変化の全範囲にわたってシステム同定を行うことは不可能であるから，システムの変化を表現するモデルを構成するには，いくつかの伝達関数を補間せざるを得ない．補間に基づく本研究の理論は，このように伝達関数によってモデルが得られるシステムを適用の対象としており，“補間モデル”を伝達関数の補間によって構成されるものとしている．

複数の伝達関数を補間するためには，それらの伝達関数とともに，それらをつなぐ補間パラメータが必要となる．補間パラメータによって補間された伝達関数が，ある物理システムの表現となるためには，補間パラメータは物理的意味をもつ変動要因と結びつけられたものでなければならない．ところで，伝達関数によってモデルが得られるシステムの動特性が変化するとき，その変動要因を見つけだすとすれば，どこにそれを探すべきであろうか．システム同定によって得られる伝達関数のパラメータはそれ自身で物理的意味をもつものではないので，そのモデルで表わされるシステムの内部には，変動要因を見つけだすことはできない．このような場合，システムの変動要因は，システムの“動作環境”の中から探さなければならない．ここで，動作環境とは，システムの内部に存在する物理量ではなく，システムの外部に存在して，その動特性に影響を及ぼす物理量である．前節で述べた航空機の場合，飛行する高度がその例である．本研究の考えは，システムの動特性に変化をもたらす動作環境（例えば高度）と補間パラメータを対応づけて，モデルとコントローラを補間するものである．この対応づけは，各動作環境におけるシステムの動特性を，補間途中のどの点の補間モデルで近似すべきかを決めることであり，その設定は制御系設計者の主観による．

さて，ここで“補間モデル”の意味を与える．本研究では，複数の代表的な動作環境におけるシステムの伝達関数（基準モデルと呼ぶ）が得られていることを前提とする．“補間モデル”は，それらの伝達関数の安定かつプロパーな有理関数上の既約分解を線形補間したモデルである．伝達関数そのものの補間ではなく，それらの既約分解の補間を用いる理由は，伝達関数の極の変化も表現するためである（第２章，注意 2.2 参照）．また，線形補間を用いる理由は，これが補間の形式として最も基本的なものであり，まずはその基本から考察を開始して，理論を構築していくべきであると考えるからである．本研究のモデリングに関する考察では，システムの動特性変化を近似するような補間モデルの構成法を与える．

つぎに“補間コントローラ”について述べる．前節で述べたように，制御対象の動特性変化に対応するために，複数の代表的な動作点におけるコントローラを補間すれば，１つの固定したコントローラよりも，より良い制御が可能になると期待できる．このような“補間コントローラ”として，本研究では，補間モデルと同様な補間によって構成されるものを用いることを提案する．すなわち，基準モデルに対する安定化コントローラの既約分解を線形補間したものを補間コントローラとするのである．本研究における制御系設計に関する主な考察の目的は，補間モデルを安定化する補間コントローラの存在条件と構成法を明らかにすることである．

ここで，本研究に関連の深い研究について述べるとともに，それらの研究に対する本研究の特徴を明らかにしておく．

伝達関数の既約分解を線形補間したモデルに対する安定化問題は，1入力1出力システムに対して文献[11]で考察されている．そこでは，2つの基準モデルに対する補間モデルを定義し，これをある1つの固定したコントローラで安定化するときの安定化可能条件が示されている．これに対して，本研究ではまず，補間モデルがもつ性質を見直し，その性質の1つとして，基準モデルの既約分解の選び方に補間モデルが依存していることに着目する．そして，制御対象の良い近似となるような補間モデルの構成法を示す[28, 31]．また，多入力多出力システムに対する補間モデル[21, 23, 30]，さらに代表的な動作点の数を2つと限定せず，3つ以上の場合にも拡張した補間モデル[26, 34]も導入し，これらに対する安定化問題を考察する．

制御対象の動特性の変化に応じて，コントローラを変化させる考えに基づく補間コントローラによる制御は，一種のゲインスケジュールド制御とみなすことができる．ゲインスケジュールド制御の代表的な研究である文献[2]および文献[39]では，状態空間でゲインスケジュールドコントローラを定義しているが，本研究の補間コントローラ[21, 23, 30]は，その定義に伝達関数の既約分解を用いているところに特徴がある．補間モデルが与えられたとき，その状態空間表現に対して文献[2, 39]にみられるようなゲインスケジュールドコントローラを適用することも考えられるが，伝達関数の既約分解で定義される補間モデルに対しては，同様に既約分解を用いて定義される補間コントローラを用いたほうが整合性が良い．特に1入力1出力系においては，補間モデルが補間コントローラによって安定化可能であるための必要十分条件を得ることができる（第4章）．なお，状態空間で記述されるモデルを用いるゲインスケジュールド制御では，暗黙に動作環境の変化が状態方程式の係数行列に含まれるパラメータの変化として現れるとされており，そのパラメータをスケジューリングパラメータとして制御を行うように考えられている．したがって，それらのゲインスケジュールド制御においては，特に動作環境を意識する必要がないのに対し，伝達関数モデルの補間に基づく本研究のモデリングと制御は，変動要因が動作環境にあることをより意識しているところに特徴がある．

1.3 論文の構成

本論文の全体の構成を述べる．

第1章（本章）では，本研究の目的および本論文の構成を述べている．

第2章では，動作環境の変化によって動特性が変化する多入力多出力の制御対象のモデルとして補間モデル[21, 23, 30]を，そして補間モデルを安定化するコントローラとして補間コントローラ[21, 23, 30]を提案する．これらの定義と特徴を述べ，本論文で考察する安定化問題について説明する．またこの章では，補間モデルの安定化可能性と基準モデルの同時安定化可能性の関連に

ついて考察し，補間モデルが安定化可能であるためには，２つの基準モデルが同時安定化可能であることが必要であることを示す．

第３章では，補間モデルの構成法 [28, 31] を述べる．補間モデルを構成する基準モデルの既約分解は一意ではなく，補間モデルは基準モデルの既約分解の自由度に依存している．この事実に着目し，補間モデルが実際の制御対象にある意味で近くなるように基準モデルの既約分解を求める問題を定式化し，この問題の解法を与える．また，磁気浮上系 [42] を例に，補間モデルの構成法の具体的手順を示し，この構成法の有効性を示す [32]．

第４章では，１入力１出力の補間モデルで表わされる制御対象を，補間コントローラによって安定化する問題について考察する [24, 25, 36]．この安定化問題をネバンリナ・ピックの補間問題に帰着させ，補間モデルが補間コントローラによって安定化可能であるための必要十分条件と補間コントローラの構成法を示す．また，コントローラを補間せず固定とした場合についても安定化可能条件とコントローラの構成法を示す．

第５章では，多入力多出力の補間モデルに対して，補間コントローラと固定コントローラによる安定化問題を考える [23, 26, 30, 34]．１入力１出力系の場合は安定化問題をネバンリナ・ピックの補間問題に帰着させることにより，安定化可能であるための必要十分条件が得られたが，多入力多出力系の場合は同様な手法を用いることはできず，本章では安定化可能であるための十分条件を与える．この条件は安定化問題をある種の H_∞ 制御問題に帰着させることによって得られる．さらにこの問題の可解条件が，状態空間において線形行列不等式によって表われることを示し，補間と固定のコントローラの構成法を述べる．

第６章では，補間モデルが制御対象に対してもつ近似誤差に対処するために，補間モデルの集合を定義し，これに対するロバスト安定化問題を考察する [27, 29]．第３章で与えた手法によって補間モデルを構成したとしても，実際の制御対象に対して補間モデルが近似誤差をもち，安定化を行うにあたってこの誤差を考慮しなければならない場合がある．この章では，あるノミナルな補間モデルを覆うような補間モデルの集合を導入し，この集合のすべての要素に対して制御系の安定性を保証するような補間コントローラと固定コントローラの構成法を与える．補間および固定のコントローラによる安定化可能条件（十分条件）が，H_∞ ノルム条件といくつかの不等式によって記述できることを示すとともに，それらの安定化可能条件を状態空間で線形行列不等式を用いて表現できることを示し，コントローラの構成法について述べる．

第４章から第６章では，補間モデルで表わされる制御対象を安定化する問題について考察しているが，一般に制御系設計においては，安定化だけでなく目標値応答などの制御特性を向上させることも望まれる．第７章では，補間モデルによって表わされる制御対象に対して，制御量を定

常偏差なくステップ状の目標値に追従させるロバストサーボ系を設計することを考える．制御系は2自由度構成とし，フィードバック要素とフィードフォワード要素のそれぞれを補間を用いて構成することを考え，それらが満たすべき条件と設計法を示す [41].

第2章で定義する補間モデルは，s 領域で記述されているため，これにおける補間パラメータは，時間の関数ではない．このため，この補間モデルは時不変なモデルである．したがって，そのような補間モデルを用いたモデリングと制御系設計法が適用できるのは，制御対象の変化を表わすパラメータが時間に関して区分的に一定であり，変化が起きる時間間隔が短くないものに限られる．第8章では，第2章で定義した補間モデルを状態空間で表現することによって，変動パラメータが時間的に変化するものに拡張する [35]．そして，補間モデルの状態空間表現と同様な補間形式をもつ補間コントローラを状態空間で定義する．このように時間的変化を考慮した補間モデルと補間コントローラから構成される制御系の安定化問題を考え，安定化可能条件と補間コントローラの構成法を行列不等式を用いて示す.

第9章では，本研究の成果をまとめる.

付録では，各章で述べられていない証明や，各章の結果に関連した補足説明を記述している.

第 2 章

補間モデルと補間コントローラ

2.1 緒言

動作環境によって動特性が変化する制御対象のモデリングを行うとき，複数の動作点において制御対象の伝達関数が得られていれば，これらを補間したモデルを用いることが考えられる．本章では，伝達関数行列の既約分解の線形補間によって補間モデルを定義する．複数の伝達関数を補間して制御対象のモデルとする場合，後に述べる理由により，伝達関数の既約分解の補間を用いることが有効となる．1 入力 1 出力の補間モデルは文献 [11] において提案されているが，多入力多出力の補間モデルは文献 [21] で提案された．本章ではまず，この補間モデルの定義を述べる．

このような制御対象の動特性の変動要因を制御時に知ることができるとする．このとき，1 つの固定したコントローラを用いるよりも，変動要因の情報を利用してコントローラを変化させることにより，より良い制御が可能になると期待できる．このような動機により，本章では，補間モデルによって表わされる制御対象を安定化するコントローラとして補間コントローラを導入し，この定義を述べる．これは代表的な動作点における制御対象に対する安定化コントローラの既約分解を補間したものであり，文献 [21] で提案された．補間コントローラにおける補間パラメータには，補間モデルの補間パラメータと同じものを用いるため，補間コントローラは制御対象の変化に対応して変化するものとなる．

2.2 補間モデルと補間コントローラ

制御対象をとりまく環境の変化によって，2 つの代表的な動作点の間を変化するような多入力多出力の制御対象があるとする．そして，これら 2 つの動作点における制御対象の連続時間伝達関数行列が，システム同定または何らかの手法によって得られているとし，これらを $G_1(s)$, $G_2(s)$ とする．これらを基準モデルと呼ぶことにする．

動特性が変化する制御対象を，基準モデルを補間したモデルによって表現することを考える．本章ではその補間モデルをつぎのように定義する．まず，基準モデル G_1, G_2 の安定かつプロパーな有理関数行列の集合（RH_∞）上の既約分解を

$$G_i = N_i D_i^{-1} \tag{2.1}$$
$$N_i, D_i \in RH_\infty, \quad i = 1, 2$$

とする．これらを用いて補間モデルを

$$G(\alpha) = N(\alpha)D^{-1}(\alpha)$$
$$\begin{cases} N(\alpha) = \alpha N_1 + (1-\alpha)N_2 \\ D(\alpha) = \alpha D_1 + (1-\alpha)D_2 \end{cases} \tag{2.2}$$
$$0 \le \alpha \le 1$$

と定義する．ここで，α は制御対象の変動要因（動作環境の変化を表わすパラメータ）と対応づけられた 0 から 1 の間を変化するパラメータである．$\alpha = 1$ のとき $G(\alpha) = G_1$，$\alpha = 0$ のとき $G(\alpha) = G_2$ となることは (2.2) 式より明らかである．

（注意 2.1） 制御対象の動作環境の変化を表わすパラメータ，例えば第 1 章の緒論で述べた航空機の例を用いれば高度となるが，これと補間パラメータの対応関係は，ある単調な関数によって与えられているものとする．この関数を設定することは，ある高度における航空機の動特性を，α がいくつのときの $G(\alpha)$ で表現すべきかを決めることであり，これは制御系設計者の主観による．$G(\alpha)$ が何らかの方法で構成された状況で，動作環境と α の対応関係を与えることは，動作環境と $G(\alpha)$ の対応関係を与えることであり，$G(\alpha)$ の近似精度に関わる重要な問題となってくる．しかし，動作環境と α の対応をある関数に固定した後に，第 3 章の手法で補間モデル $G(\alpha)$ を構成して補間経路を適切なものにすれば，補間途中に相当するある動作環境では，その関数の設定に依存しない良い近似精度を補間モデルに与えることができる（第 3 章の注意 3.4 参照）．

（注意 2.2） 2 つのモデルの補間によって制御対象を表現しようとするとき，G_1，G_2 そのものの線形補間ではなく，それらの既約分解を線形補間するのはつぎのような理由による．例えば，基準モデルが

$$G_1 = \frac{s-1}{(s-3)(s+1)}, \quad G_2 = \frac{s-2}{(s-4)(s+1)} \tag{2.3}$$

のとき，これらのそのものの線形補間は，

$$\alpha G_1 + (1-\alpha)G_2 = \frac{s^2 - 5s - 2\alpha + 6}{(s-3)(s-4)(s+1)}$$

となる．この伝達関数の極は，パラメータ α に独立で固定している．したがって，伝達関数そのものの補間では，極の変化を表現できない．一方，(2.2) 式の補間モデルは，既約分解を

$$\begin{aligned} n_1 &= \frac{s-1}{(s+1)^2}, \quad d_1 = \frac{(s-3)(s+1)}{(s+1)^2} = \frac{s-3}{s+1} \\ n_2 &= \frac{s-2}{(s+1)^2}, \quad d_2 = \frac{(s-4)(s+1)}{(s+1)^2} = \frac{s-4}{s+1} \end{aligned} \tag{2.4}$$

と選べば，

$$G(\alpha) = \frac{s-\alpha-2(1-\alpha)}{\{s-3\alpha-4(1-\alpha)\}(s+1)} \tag{2.5}$$

と表され，零点と極の変化を線形補間で表現するモデルとなる．

（注意 2.3） 注意 2.2 の例では，基準モデルの既約分解 (n_1, d_1) と (n_2, d_2) として，(2.4) 式のように，それらの分母多項式が同じものを選んだため，(2.5) 式は G_1, G_2 と同じ次数の伝達関数となったが，一般には補間モデル $G(\alpha)$ の次数は G_1 と G_2 の次数の和になる．例えば，(2.3) 式の基準モデルに対して，

$$\begin{aligned} n_1 &= \frac{s-1}{(s+2)(s+3)}, \quad d_1 = \frac{(s-3)(s+1)}{(s+2)(s+3)} \\ n_2 &= \frac{s-2}{(s+4)(s+5)}, \quad d_2 = \frac{(s-4)(s+1)}{(s+4)(s+5)} \end{aligned}$$

のような既約分解を選んだ場合，補間モデルは

$$G(\alpha) = \frac{\alpha(s-1)(s+4)(s+5)+(1-\alpha)(s-2)(s+2)(s+3)}{\alpha(s-3)(s+1)(s+4)(s+5)+(1-\alpha)(s-4)(s+1)(s+2)(s+3)} \tag{2.6}$$

となり，4 次の伝達関数となる．このような場合，$0 < \alpha < 1$ では，基準モデルの極と零点に加えて，既約分解の分母多項式に依存した極と零点も補間されることになる．なお，$\alpha = 0$ と $\alpha = 1$ のときは，安定な極と零点の相殺が生じ，補間モデルの次数は基準モデルの次数と等しくなる．なお，基準モデルとその既約分解の選び方によっては，$0 < \alpha < 1$ のある α において，$N(\alpha)$ と $D(\alpha)$ の既約性が満たされなくなり，$G(\alpha)$ に不安定な極零相殺が生じる場合がある（第 2.3 節参照）．

注意 2.2，2.3 で述べたように，補間モデル $G(\alpha)$ は，それを構成する基準モデルの既約分解の選び方に依存している．したがって，制御対象の動特性を近似するためには，基準モデルの既約分解の選び方に注意が必要となる．この選び方については，第 3 章で述べる．

(2.2) 式の補間モデルによって表わされる制御対象 G に対して，Fig.2.1 のような制御系を構成し安定化を行うことを考える．この図で K は設計すべき安定化コントローラである．ここで，制御対象の変動要因，すなわち動作環境の変化を表わすパラメータ（第 1 章の緒論で述べた航空機

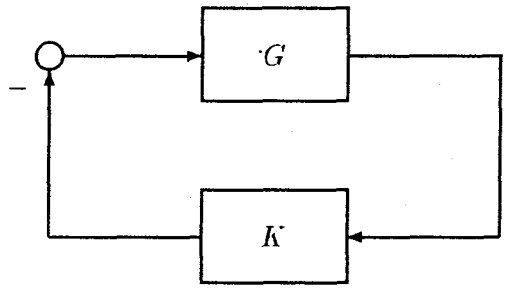

Fig.2.1 Closed-loop system

の場合，高度）の値を制御するときに知ることができるとする．このような状況では，そのパラメータの値を利用して，制御対象の変化に応じてコントローラ K を変化させることにより，安定化能力を高めることが期待できる．この動機に基づき，本章では2つのコントローラ K_1, K_2 を補間したコントローラ，すなわち補間コントローラをつぎのように定義する．まずコントローラ K_1, K_2 の既約分解を

$$K_i = \tilde{D}_{Ki}^{-1}\tilde{N}_{Ki}\ ,\quad i = 1,2 \tag{2.7}$$
$$\tilde{N}_{Ki}, \tilde{D}_{Ki} \in RH_\infty$$

とする．これらを用いて補間コントローラを

$$K(\alpha) = \tilde{D}_K(\alpha)^{-1}\tilde{N}_K(\alpha) \tag{2.8}$$

$$\begin{cases} \tilde{N}_K(\alpha) = \alpha\tilde{N}_{K1} + (1-\alpha)\tilde{N}_{K2} \\ \tilde{D}_K(\alpha) = \alpha\tilde{D}_{K1} + (1-\alpha)\tilde{D}_{K2} \end{cases}$$

と定義する．補間パラメータ α は補間モデルで用いたものと同じものであるため，この補間コントローラは制御対象の変化に対応して変化するものとなる（Fig 2.2 参照）．

(2.8) 式から明らかなように，補間コントローラによる安定化問題は，制御系が安定になるような (2.7) 式の既約分解 $\tilde{N}_{Ki}, \tilde{D}_{Ki}$ $(i = 1,2)$ を求める問題である．この問題は，安定化コントローラの一般形 [19, 45] を用いることにより，つぎのように考えることができる．

まず，$\alpha = 1$ のときの制御系を考える．このとき (2.2) 式，(2.8) 式より，$G(\alpha) = G_1, K(\alpha) = K_1$ となる．したがってこの系が安定であるためには，コントローラ K_1 は 基準モデル G_1 に対する安定化コントローラになっていることが必要である．同様に，K_2 は G_2 に対する安定化コントローラになっていなければならない．これらの必要性から，(2.7) 式の K_1, K_2 の既約分解 $\tilde{N}_{Ki}, \tilde{D}_{Ki}$

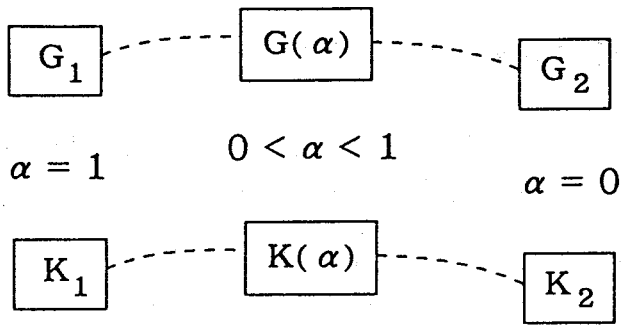

Fig.2.2 Interpolated model and interpolated controller

$(i = 1, 2)$ は，G_1, G_2 の安定化コントローラの一般形 [19, 45] を用いてつぎのように表わされる．

$$\begin{cases} \tilde{N}_{Ki} = X_i + R_i \tilde{D}_i \\ \tilde{D}_{Ki} = Y_i - R_i \tilde{N}_i \end{cases}, \quad i = 1, 2 \tag{2.9}$$

ここで，$X_i, Y_i, \tilde{N}_i, \tilde{D}_i \in RH_\infty$ は，適当な $\tilde{X}_i, \tilde{Y}_i \in RH_\infty$ に対して

$$\begin{bmatrix} Y_i & X_i \\ -\tilde{N}_i & \tilde{D}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_i & -\tilde{X}_i \\ N_i & \tilde{Y}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

を満たすものであり，R_i $(i = 1, 2)$ は RH_∞ の要素で，$\det(Y_i - R_i \tilde{N}_i) \not\equiv 0$ を満たすものである．そのような任意の $R_i \in RH_\infty$ $(i = 1, 2)$ に対して，K_i は G_i $(i = 1, 2)$ の安定化コントローラになるが，これらを補間した (2.8) 式の補間コントローラが (2.2) 式の補間モデルを安定化するとは限らないことに注意する．すべての $\alpha \in [0, 1]$ に対して (2.8) 式の補間コントローラが (2.2) 式の補間モデルを安定化するためには，(2.9) 式の R_i $(i = 1, 2)$ をどのように決めるかが問題となる．第 4，5，6 章の安定化問題では R_i $(i = 1, 2)$ の求め方を与える．

（注意 2.4） (2.2) 式と (2.8) 式において導入されたパラメータ α は時間の関数とはなっていない．したがって，(2.8) 式の補間コントローラ $K(\alpha)$ によって安定化できる制御対象のクラスは，変動が時間に関して区分的に一定で，変化が起きる時間間隔が短くないものに限られるが，このような制御対象は実際のシステムにおいて数多い [32, 33, 38]．

（注意 2.5） 補間コントローラの状態空間表現は，付録Aの (A.8) 式のようになる．この式の $A(\alpha)$, $B(\alpha)$ において，α は線形に入っており，α が変化したときのこれらの行列の計算は容易なものである．したがって，補間コントローラを実装したときの計算負荷は重くなく，補間コントローラ

は実プラントにおいて実装可能なものと考えられる.

2.3 基準モデルの同時安定化可能性

ある1つの固定したコントローラによって補間モデルが安定化可能であるためには，2つの基準モデル G_1 と G_2 が同時安定化可能であることが必要であることは明らかである．しかし補間コントローラによって安定化する場合にはどうであろうか？ 補間コントローラは制御対象の変化に応じて変化するため，これを用いれば，同時安定化可能でない2つの基準モデルから構成される補間モデルを安定化できることが期待される．しかしこの節では，補間コントローラを用いる場合にも（どのようなコントローラを用いる場合にも），補間モデルが安定化可能であるためには，2つの基準モデル G_1 と G_2 が同時安定化可能であることが必要であることを示す.

同時安定化問題に関しては，つぎの補題 [19, 45] が知られている.

【補題 2.1】 (2.1) 式と (2.10) 式を満たす G_1, G_2 の既約分解を用いて

$$A = X_1 N_2 + Y_1 D_2 \tag{2.11}$$

$$B = \tilde{D}_1 N_2 - \tilde{N}_1 D_2 \tag{2.12}$$

を定義する．また，B の実軸上（無限遠点も含む）の不安定なブロッキング零点を

$$0 \leq \sigma_1 < \cdots < \sigma_m$$

とする．このとき，G_1 と G_2 が同時安定化可能である必要十分条件は，$\det A(\sigma_i)$，$i = 1, \cdots, m$ が一定符号をとることである.

この補題を用いることにより，つぎの命題が証明できる.

【命題 2.1】 (2.2) 式で表される補間モデルが安定化可能であるためには，G_1 と G_2 が同時安定化可能であることが必要である.

（証明）まず，(2.11)，(2.12) 式の A, B の定義は，

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 & X_1 \\ -\tilde{N}_1 & \tilde{D}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_2 \\ N_2 \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

と書ける．(2.10) 式を考慮すると，

$$\begin{bmatrix} Y_1 & X_1 \\ -\tilde{N}_1 & \tilde{D}_1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} D_1 & -\tilde{X}_1 \\ N_1 & \tilde{Y}_1 \end{bmatrix}$$

であるので，(2.13) 式より，

$$\begin{bmatrix} D_1 & -\tilde{X}_1 \\ N_1 & \tilde{Y}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_2 \\ N_2 \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

が成り立つ．

いま，G_1 と G_2 が同時安定化可能でないとしよう．このとき補題 2.1 より，$\det A(\sigma_i)$，$i = 1, \cdots, m$ は一定符号をとらず，したがって，

$$\det A(\sigma_j) < 0$$

となる σ_j が少なくとも 1 つ存在する．$s = \sigma_j$ において，$B(\sigma_j) = 0$ であるので，(2.14) 式より，

$$\begin{bmatrix} D_1 \\ N_1 \end{bmatrix} A(\sigma_j) = \begin{bmatrix} D_2 \\ N_2 \end{bmatrix}$$

が成り立つ．これより (2.2) 式の $s = \sigma_j$ における $N(\alpha)$, $D(\alpha)$ は

$$\begin{cases} N(\alpha) = N_1\{\alpha I + (1-\alpha)A(\sigma_j)\} \\ D(\alpha) = D_1\{\alpha I + (1-\alpha)A(\sigma_j)\} \end{cases} \tag{2.15}$$

と表わされる．ここで補間モデルの安定化可能性を考えるため，

$$\Omega(s) = \tilde{N}_K N(\alpha) + \tilde{D}_K D(\alpha) \tag{2.16}$$

がユニモジュラとなるような $\tilde{N}_K(s)$, $\tilde{D}_K(s)$ の存在性を考える．$s = \sigma_j$ における (2.16) 式に (2.15) 式を代入すると，

$$\Omega(\sigma_j) = (\tilde{N}_K N_1 + \tilde{D}_K D_1)\{\alpha I + (1-\alpha)A(\sigma_j)\}$$

となる．ここで，右辺の $\alpha I + (1-\alpha)A(\sigma_j)$ の部分に着目する．$\alpha = 0$ のとき，

$$\det[\alpha I + (1-\alpha)A(\sigma_j)] = \det A(\sigma_j) < 0$$

$\alpha = 1$ のとき，

$$\det[\alpha I + (1-\alpha)A(\sigma_j)] = 1 > 0$$

なので，

$$\det[\alpha_0 I + (1-\alpha_0)A(\sigma_j)] = 0 \tag{2.17}$$

となるような α_0 が存在する．したがって $s=\sigma_j, \alpha=\alpha_0$ において Ω をユニモジュラとするような $\tilde{N}_K, \tilde{D}_K$ は存在せず，補間モデルを安定化するコントローラは存在しない．

（注意 2.6） 上記の証明は，補間モデルのみに着目した，コントローラの構成に独立な議論である．したがって，2つの基準モデルが同時安定化可能でない場合には，どのようなコントローラによっても補間モデルを安定化することはできないことを意味する．

（注意 2.7） 補間モデル $G(\alpha)$ が安定化可能であるためには，$N(\alpha)$ と $D(\alpha)$ がすべての $\alpha \in [0,1]$ に対して既約であることが必要である．(2.15) 式と (2.17) 式は，$\alpha=\alpha_0$ のとき $N(\alpha)$ と $D(\alpha)$ が共通の不安定零点 $s=\sigma_j$ をもつこと，つまり $N(\alpha)$ と $D(\alpha)$ が既約でなく，$G(\alpha)=N(\alpha)D(\alpha)^{-1}$ に不安定な極零消去が起きていることを意味している．

（注意 2.8） 同時安定化可能な G_1, G_2 から補間モデルを構成しても，$N(\alpha)$ と $D(\alpha)$ が既約になるとは限らない．例えば，同時安定化可能な

$$G_1=\frac{s+3}{(s-1)(s-2)}, \quad G_2=\frac{s+2}{(s+1)(s-3)}$$

に対して，既約分解を

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{s+3}{(s+4)(s+5)}, \quad D_1=\frac{(s-1)(s-2)}{(s+4)(s+5)} \\ N_2 &= -\frac{s+2}{(s+4)(s+5)}, \quad D_2=-\frac{(s+1)(s-3)}{(s+4)(s+5)} \end{aligned} \tag{2.18}$$

と選んだとき，

$$\begin{aligned} N(\alpha) &= \alpha N_1+(1-\alpha)N_2 \qquad (2.19) \\ &= \frac{(2\alpha-1)s+5\alpha-2}{(s+4)(s+5)} \\ D(\alpha) &= \alpha D_1+(1-\alpha)D_2 \qquad (2.20) \\ &= \frac{(2\alpha-1)s^2-(5\alpha+2)s-\alpha+3}{(s+4)(s+5)} \end{aligned}$$

となる．このとき，$\alpha=0.462, s=4.090$ において $N(\alpha)=D(\alpha)=0$ となる．すなわち，$N(\alpha)$ と $D(\alpha)$ は既約でない．なお，(2.18) 式の代わりに，G_2 の既約分解を

$$N_2=\frac{s+2}{(s+4)(s+5)}, \quad D_2=\frac{(s+1)(s-3)}{(s+4)(s+5)}$$

とした場合には，$N(\alpha)$ と $D(\alpha)$ は既約となる．したがって，$N(\alpha)$ の $D(\alpha)$ が既約性は，基準モデルの既約分解の選び方に依存している．

2.4 結言

動作環境によって動特性が変化する制御対象のモデルとして，代表的な動作点での伝達関数行列（基準モデル）の既約分解の線形補間を用いて補間モデルを定義した．また，基準モデルの安定化コントローラの既約分解の線形補間を用いて，補間コントローラを定義した．また本章では，補間モデルがもつ性質として，このモデルが安定化可能（既約）であるためには，基準モデルの同時安定化可能性が必要であることを示した．

第 3 章

補間モデルの構成法

3.1 緒言

前章において，動作環境によって動特性が変化する制御対象のモデルとして，補間モデルを定義した．この定義には安定かつプロパーな有理関数行列の集合（RH_∞）上の既約分解を用いているが，一般に，ある伝達関数行列に対してその RH_∞ 上の既約分解は一意ではない．そして，前章で定義した補間モデルは，基準モデルの既約分解の選び方に依存している．すなわち，基準モデルの既約分解が異なれば，それらを補間したモデルも異なったものとなる．したがって，基準モデルの既約分解は，それらを補間したモデルが実際の制御対象を十分に近似するように選ばれなければならない．補間モデルに対する安定化問題を考察している文献 [1, 7, 11, 23, 24, 26] ではいずれも，基準モデルの既約分解があらかじめ与えられていると暗黙に仮定されており，それらの選び方については述べられていない．一方，第 6 章では，ある 1 つの補間モデルが制御対象に対してもつ近似誤差を考慮し，基準モデルのある 1 つの既約分解の組を補間したノミナルな補間モデルと，これを覆うような補間モデルの集合を考え，この集合の要素すべてを安定化するコントローラの構成法について考察するが，この場合もノミナルな補間モデルを構成する既約分解の選び方が問題となる．

本章では，実際の制御対象の良い近似としての補間モデルを構成するための，基準モデルの既約分解の選び方を与える [28, 31]．すなわち，既約分解の選び方によって補間モデルが変わることに着目し，補間途中のある点の補間モデルが，対応する動作環境における制御対象の動特性にできるだけ近くなるように既約分解を選ぶ問題を定式化する．そして，そのような既約分解の求め方として，状態空間で BMI（bilinear matrix inequality）を用いた方法を示す．

3.2 問題設定

動作環境によって動特性が変化する多入力多出力の制御対象のモデルとして，前章では，(2.2) 式のように補間モデルを定義した．ここで，一般に (2.1) 式の既約分解は一意ではないことに注意する．そして，(2.2) 式の補間モデル $G(\alpha)$ は，$0 < \alpha < 1$ において，(2.1) 式の既約分解 (N_i, D_i), $i = 1, 2$ の選び方に依存している．すなわち，(N_i, D_i) の選び方が異なると，(2.2) 式の $G(\alpha)$ は異なる伝達関数行列となる．そのため，基準モデルの既約分解 (N_i, D_i), $i = 1, 2$ は，補間モデル $G(\alpha)$ が制御対象を十分に近似するように選ばれなければならない．

この観点から，本章では，つぎのように問題を設定する．まず，補間途中に相当するある動作環境での制御対象の伝達関数行列が得られているとする．これを G_0 とし，参照モデルと呼ぶことにする．また，G_0 が得られた動作環境に対応する α の値を α_0 とする．ここで，G_0 に $G(\alpha_0)$ が近くなるような補間モデルを構成する既約分解を求めることを考える．この問題をつぎのように設定し，この解を示すことによって，補間モデルの構成法を与える．

[**問題**] G_0 の正規化既約分解 [45] を

$$G_0 = N_0 D_0^{-1}\ ,\quad N_0, D_0 \in RH_\infty$$

とする．この (N_0, D_0) に対して，

$$\left\| \begin{array}{c} N_0 - \{\alpha_0 N_1 + (1-\alpha_0) N_2\} \\ D_0 - \{\alpha_0 D_1 + (1-\alpha_0) D_2\} \end{array} \right\|_\infty \tag{3.1}$$

が最小になるような $N_i, D_i \in RH_\infty$ $(i = 1, 2)$ を求めよ．ただし，N_i, D_i $(i = 1, 2)$ は，基準モデル G_i に対する既約分解

$$G_i = N_i D_i^{-1} \tag{3.2}$$

$$N_i, D_i \in RH_\infty,\ i = 1, 2$$

の集合に属するものとする．

(注意 3.1) 前章 2.3 節の結果より，補間モデルの安定化可能性の必要条件として，2つの基準モデル G_1 と G_2 は同時安定化可能であることを前提とする．なお，たとえ G_1 と G_2 が同時安定化可能であっても，それらの既約分解の選び方によって，$N(\alpha)$ と $D(\alpha)$ が既約にならないことがある．(3.1) 式の最小化を実現する既約分解によっても $N(\alpha)$ と $D(\alpha)$ が既約であることは保証されていないので，それらの既約性は解が得られた後に確認する必要がある（確認する方法は付録B参照）．

（注意 3.2） 本章では G_0 に対する $G(\alpha_0)$ の近さを，(3.1) 式のように既約分解を用いて評価する．これは，文献 [45] の Graph Metric と同様に，不安定系の場合にも 2 つの伝達関数の近さを評価できるようにするためである．

（注意 3.3） 参照モデルと補間モデルの近さを既約分解を用いて (3.1) 式のように評価し，これを小さくする問題を考える場合，G_0 の既約分解の大きさは規格化しておかなければならない．なぜなら，(3.1) 式において，(N_0, D_0) のノルムを小さくすれば，(N_i, D_i) $(i = 1, 2)$ のノルムも小さくすることによって，G_0 と $G(\alpha_0)$ の近さとは無関係に (3.1) 式の値をいくらでも小さくすることができるため，(3.1) 式を小さくする問題が，G_0 に $G(\alpha_0)$ を近づける既約分解を求める問題としての意味をもたなくなるからである．このために，本章で考える問題では，参照モデル G_0 の既約分解として，大きさが固定された既約分解である正規化既約分解を用いている．この正規化既約分解は一意ではないが，その自由度は任意の直交行列 V を用いて，(N_0V, D_0V) で表わすことができる．この直交行列による自由度は，後に示す (3.4) 式における J_i $(i = 1, 2)$ の自由度によって吸収されるため，どの正規化既約分解に対して (3.1) 式の値を小さくする問題を考えても，得られる結果は変わらない．

（注意 3.4） α_0 の値は，動作環境と α を対応づける関数を用いて，G_0 が得られた動作環境に対応する α の値として決まる．しかし，α_0 の値がいくつであっても，(3.1) 式を小さくする問題を解いて得られる (3.1) 式の最小値は，N_i, D_i $(i = 1, 2)$ の自由度によって変わらない．これは，動作環境と α を対応づける単調関数がどのようなものであっても，本章の手法を用いて基準モデルの既約分解を適切なものに選べば，構成される補間モデル $G(\alpha)$ の補間経路が適切なものとなり，参照モデルに対する補間モデルの近似精度が保証されることを意味する（補間途中での 2 つ以上の動作環境において，補間モデルの近似精度を良いものにしようとするならば，次節のように参照モデルの数を複数とすることが考えられる．複数の参照モデルが得られない場合は，第 6 章の方法を用いて，モデル化誤差に対するロバスト性を制御系に与えることによって対処するしかない）．

（注意 3.5） 制御対象の変化を表わすパラメータ α の値を制御するときに知ることができる場合には，この値を用いることにより，補間コントローラによる制御が可能である．このとき，2 つの代表的な動作点における制御対象のモデル G_1, G_2 と，それらの間に相当する動作点におけるモデル G_0 が得られているならば，G_0 も基準モデルと考えることにより，G_1, G_0 を基準モデルとした補間モデルと，G_0, G_2 を基準モデルとした補間モデルを構成し，これら 2 つの補間モデルに対して 2 つの補間コントローラを設計し，切り替えて用いることも考えられる．この方法を用いるか，本章のように 1 つの補間モデルを構成して，1 つのコントローラを設計するかは，具体的な制御対象の特性や制御系の構成上の制約などによって決められるが，一般的には，つぎのよ

うに2つの方法を使い分けることが考えられる．まず，制御系の構成を簡単にするために，本章の手法で1つの補間モデルを構成し，1つの補間コントローラで制御を行うことを試みる．このとき，参照モデル G_0 に対して，その動作点における補間モデル $G(\alpha)$ が十分に近いものとなっていれば，満足できる制御結果を得ることが可能であろう．もし，得られた $G(\alpha)$ が $\alpha = \alpha_0$ において G_0 にそれほど近くなく，満足できる制御結果が得られない場合には，1つの補間モデルでは制御のための十分な近似ができないということである．その場合は，G_0 も基準モデルとして2つの補間モデルを構成して，2つの補間コントローラで制御する方法をとることが考えられる．なお，制御時にパラメータ α の値を知ることができない場合には，補間コントローラを用いることはできず，1つの補間モデルを本章の手法により構成し，これに対して固定コントローラによる制御を行うことになる．

3.3 BMIを用いた解法

この節では (3.1) 式の値を小さくするような (N_i, D_i) $(i = 1, 2)$ を求める方法を，状態空間において BMI を用いて与える．なお，記述の煩雑さを避けるため，制御対象は厳密にプロパーであるとする．また，ある伝達関数 $M(s)$ が状態空間表現で

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

と表わされるとき，

$$M = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right]$$

と書くことにする．

(3.2) 式の既約分解の集合として，つぎの状態空間表現で記述されるものを考える．すなわち，m_i $(i = 1, 2)$ 次の基準モデル G_i $(i = 1, 2)$ の最小実現

$$G_i = \left[\begin{array}{c|c} A_i & B_i \\ \hline C_i & 0 \end{array}\right] \quad , \quad i = 1, 2 \tag{3.3}$$

が与えられているものとし，

$$\begin{bmatrix} N_i \\ D_i \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} A_i - B_i F_i & B_i J_i \\ \hline C_i & 0 \\ -F_i & J_i \end{array}\right] \quad i = 1, 2 \tag{3.4}$$

のように表現されるものを考える．ただし，F_i $(i=1,2)$ は，$A_i - B_iF_i$ を安定化する行列であり，J_i $(i=1,2)$ は正則な行列である．この既約分解 N_i, D_i $(i=1,2)$ は，F_i, J_i $(i=1,2)$ をパラメータとすることにより，m_i $(i=1,2)$ 次の任意の既約分解を表わすことができる（証明は付録C参照）．この節では，(3.1) 式の値を小さくするような F_i, J_i $(i=1,2)$ の求め方について考える．

（注意 3.6） (3.3) 式を最小実現としなければ，m_i 次よりも高次の既約分解（全体ではないが）を (3.4) 式によって表現できる．本章の結果は，(3.3) 式が最小実現でなくとも，可安定かつ可検出であれば成り立つ．

いま，G_0 の最小実現を

$$G_0 = \left[\begin{array}{c|c} A_0 & B_0 \\ \hline C_0 & 0 \end{array}\right]$$

とすると，G_0 のある正規化既約分解 (N_0, D_0) の状態空間表現 [20] は，

$$\begin{bmatrix} N_0 \\ D_0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} A_n & B_n \\ \hline C_{Nn} & 0 \\ C_{Dn} & I \end{array}\right] \tag{3.5}$$

と表される．ただし，

$$A_n = A_0 - B_0B_0^TX, \quad B_n = B_0$$
$$C_{Nn} = C_0, \quad C_{Dn} = -B_0^TX$$

であり，X は，Riccati 方程式

$$A_o^TX + XA_0 - XB_0B_0^TX + C_0^TC_0 = 0$$

の正定解である．A_n が安定であることは明らかである．

さて，G_0 と $G(\alpha_0)$ の差を表わす (3.1) 式における伝達関数行列を

$$E(s) = \begin{bmatrix} N_0 - \{\alpha_0N_1 + (1-\alpha_0)N_2\} \\ D_0 - \{\alpha_0D_1 + (1-\alpha_0)D_2\} \end{bmatrix}$$

と書くと，(3.4) 式，(3.5) 式より，$E(s)$ の状態空間表現は，

$$E(s) \triangleq \left[\begin{array}{c|c} A_\epsilon & B_\epsilon \\ \hline C_\epsilon & J_\epsilon \end{array}\right] \tag{3.6}$$

$$
= \left[\begin{array}{ccc|c}
A_n & 0 & 0 & B_n \\
0 & A_1 - B_1F_1 & 0 & -\alpha_0 B_1 J_1 \\
0 & 0 & A_2 - B_2F_2 & -(1-\alpha_0)B_2J_2 \\
\hline
C_{Nn} & C_1 & C_2 & 0 \\
C_{Dn} & -F_1 & -F_2 & J_D
\end{array}\right]
\tag{3.7}
$$

となる．ただし，

$$J_D = I - \{\alpha_0 J_1 + (1-\alpha_0)J_2\}$$

である．ここで，$\|E(s)\|_\infty \to \min$ を考える準備として，ある与えられた正数 γ に対して，

$$\|E(s)\|_\infty < \gamma$$

となる条件を考える．これに関してつぎの補題 [15] が成立する．

【補題 3.1】 (3.6) 式の $E(s)$ がある正数 γ に対して，$\|E(s)\|_\infty < \gamma$ であるための必要十分条件は，

$$M \triangleq \begin{bmatrix} A_eP + PA_e^T & PC_e^T & B_e \\ C_eP & -\gamma I & J_e \\ B_e^T & J_e^T & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \tag{3.8}$$

を満たす $P > 0$ が存在することである．

ここで，

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

とおき，これと (3.7) 式を (3.8) 式に代入すると，行列 M は付録Dに示すような 6×6 ブロックになる．ここで，(3.8) 式の不等式 $M < 0$ を，γ, P_{ij} $(i,j = 1,\cdots,3)$, F_1, F_2, J_1, J_2 を変数とした不等式とみて，

$$M(\gamma, P, F_1, F_2, J_1, J_2) < 0$$

と書き表わすと，基準モデルの既約分解の選び方がつぎの定理のように与えられる．

【定理 3.1】 (3.1) 式の値を小さくする基準モデルの既約分解 (N_i, D_i) $(i = 1,2)$ は，

$$
\begin{aligned}
&\gamma \to \min \\
&\text{subject to } M(\gamma, P, F_1, F_2, J_1, J_2) < 0\ , \\
&\qquad P > 0
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

を解いて得られた F_i, J_i $(i=1,2)$ を，(3.4) 式に代入して得ることができる．

（注意 3.7） 既約分解 (N_i, D_i) を求める問題において，既約性が満たされるためには，J_i $(i=1,2)$ が正則行列でなければならないが，定理 3.1 にはそのための制約条件がふくまれていない．J_i に課せられている制約条件は正則性のみであるから，もし定理 3.1 の計算の結果，正則でない J_i が得られた場合には，(3.1) 式の値をほとんど変えない程度に微小な値をつけ加えて，正則としたものを用いればよい．

付録Dに示すように，$M(\gamma, P, F_1, F_2, J_1, J_2)$ は J_i $(i=1,2)$ と γ に関して線形であるが，P_{ij} $(i,j=1\sim3)$ と F_i $(i=1,2)$ に関しては双線形であるため，定理 3.1 の解を求めることは容易ではない．1つの解法は，F_i を固定し P_{ij} を変数とした LMI (linear matrix inequality) と，P_{ij} を固定し F_i を変数とした LMI について，交互に γ の最小化を繰り返す手法である．この手法を用いるためには，繰り返しの初期値が必要となる．これを LMI を用いて求める方法として，つぎの補題を与える．これは，補題 3.1 と変数変換 [5] を用いることにより得られる．

【補題 3.2】

$$M_l(\gamma, P_0, P_1, P_2, W_1, W_2, J_1, J_2) = \begin{bmatrix} A_p + A_p^T & C_p^T & B_e \\ C_p & -\gamma I & J_e \\ B_e^T & J_e^T & -\gamma I \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

とする．ただし，

$$A_p = \begin{bmatrix} A_n P_0 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 P_1 - B_1 W_1 & 0 \\ 0 & 0 & A_2 P_2 - B_2 W_2 \end{bmatrix}$$

$$C_p = \begin{bmatrix} C_{Nn} P_0 & C_1 P_1 & C_2 P_2 \\ C_{Dn} P_0 & -W_1 & -W_2 \end{bmatrix}$$

である．このとき，

$$M_l(\gamma, P_0, P_1, P_2, W_1, W_2, J_1, J_2) < 0 \tag{3.12}$$

を満たす γ, $P_0 > 0$, $P_i > 0$, W_i, J_i $(i=1,2)$ が存在するならば，$\|E(s)\|_\infty < \gamma$ を満たし，$A_1 - B_1 F_1$, $A_2 - B_2 F_2$ を安定にする F_1, F_2 が存在する．それらは，

$$F_1 = W_1 P_1^{-1}\ ,\quad F_2 = W_2 P_2^{-1}$$

によって得られる．

（証明） (3.8) 式における P を

$$P = \mathrm{diag}\{P_0, P_1, P_2\}$$

とおき，これと (3.7) 式を (3.8) 式に代入し，

$$F_1P_1 = W_1,\ F_2P_2 = W_2$$

とおいたものが, (3.11) 式の行列である．$P_i > 0\ (i = 0, 1, 2)$ であるとき，$P > 0$ となり，$\|E(s)\|_\infty < \gamma$ となる．$A_1 - B_1F_1$, $A_2 - B_2F_2$ の安定性は，(3.12) 式の (1,1) ブロックにより保証される．

(3.12) 式は，γ, P_0, P_1, P_2, W_1, W_2, J_1, J_2 に関する LMI となっているので，容易に解を求めることができる．補題 3.2 によって得られた F_1, F_2, J_1, J_2, γ と $P = \mathrm{diag}\{P_0, P_1, P_2\}$ を，定理 3.1 の計算の初期値とすればよい．

3.4 参照モデルが複数の場合への拡張

本章で提案する補間モデルの構成法は，参照モデルの数を 1 つと限定するものではなく，複数であってもよい．3.2 節で述べた問題設定では，記述の簡単化のために参照モデルの数を 1 つとしたが，例えば，2 つとした場合にはつぎのようになる．

まず，$\alpha_{01}, \alpha_{02}\ (0 < \alpha_{01} < \alpha_{02} < 1)$ に対応する動作点におけるモデルを G_{01}, G_{02} とし，これらを参照モデルとする．そして，これらの既約分解を

$$G_{01} = N_{01}D_{01}^{-1}\ ,\ \ G_{02} = N_{02}D_{02}^{-1}$$

とし，

$$E(s) = \begin{bmatrix} N_{01} - \{\alpha_{01}N_1 + (1-\alpha_{01})N_2\} \\ N_{02} - \{\alpha_{02}N_1 + (1-\alpha_{02})N_2\} \\ D_{01} - \{\alpha_{01}D_1 + (1-\alpha_{01})D_2\} \\ D_{02} - \{\alpha_{02}D_1 + (1-\alpha_{02})D_2\} \end{bmatrix} \tag{3.13}$$

とする．問題は，$\|E(s)\|_\infty$ が最小になるような $N_i, D_i \in RH_\infty\ (i = 1, 2)$ を求めるという設定になる．

（注意 3.8） （注意 3.3）で述べたのと同じ理由により，$\|E(s)\|_\infty$ の最小化が無意味にならないためには，参照モデルの既約分解の自由度に，大きさの制約を課す必要がある．ただし，参照モデルの数が複数の場合，すべての参照モデルに対して既約分解の大きさを規格化しなくても，ある 1 つの参照モデルの既約分解を正規化すれば，$\|E(s)\|_\infty$ の最小化は意味をもつ．その他の参照

モデルの既約分解には，基準モデルの既約分解と同様に，大きさも含めて自由度を持たせて，問題を定式化することができる．そうすることによって，補間モデルをそれらの参照モデルにより近づけることができる．どの参照モデルに正規化既約分解を用いるかの選択は，例えば，重要と考えられる参照モデルを選ぶことが考えられる．

$\|E(s)\|_\infty$ の最小化を 3.3 節と同様な手法により状態空間で行うことを考えよう．参照モデル G_{01} に対して正規化既約分解を用いるとし，その状態空間表現を

$$\begin{bmatrix} N_{01} \\ D_{01} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} A_{n1} & B_{n1} \\ \hline C_{Nn1} & 0 \\ C_{Dn1} & I \end{array}\right]$$

とする．参照モデル G_{02} の既約分解には自由度を持たせて，

$$\begin{bmatrix} N_{02} \\ D_{02} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} A_{02} - B_{02}F_{02} & B_{02}J_{02} \\ \hline C_{02} & 0 \\ -F_{02} & J_{02} \end{array}\right]$$

と表わすとする．ただし，A_{02}, B_{02}, C_{02} は，G_{02} の最小実現

$$G_{02} = \left[\begin{array}{c|c} A_{02} & B_{02} \\ \hline C_{02} & 0 \end{array}\right]$$

から得られる行列である．また，F_{02}, J_{02} はパラメータ行列であり，F_{02} は $A_{02} - B_{02}F_{02}$ を安定化する行列，J_{02} は正則な行列とする．

これらを (3.13) 式に代入すると，

$$E(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_e & B_e \\ \hline C_e & D_e \end{array}\right]$$

$$A_e = \begin{bmatrix} A_{n1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{02} - B_{02}F_{02} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_1 - B_1F_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_2 - B_2F_2 \end{bmatrix}$$

$$B_e = [\ B_{n1}^T \ \ (B_{02}J_{02})^T \ \ (B_1J_1)^T \ \ (B_2J_2)^T]^T$$

$$C_e = \begin{bmatrix} C_{Nn1} & 0 & -\alpha_{01}C_1 & -(1-\alpha_{01})C_2 \\ 0 & C_{02} & -\alpha_{02}C_1 & -(1-\alpha_{02})C_2 \\ C_{Dn1} & 0 & \alpha_{01}F_1 & (1-\alpha_{01})F_2 \\ 0 & -F_{02} & \alpha_{02}F_1 & (1-\alpha_{02})F_2 \end{bmatrix}$$

$$D_e = [\ 0 \ \ 0 \ \ J_{D1}^T \ \ J_{D2}^T]^T$$

となる．ただし，

$$J_{D1} = I - \{\alpha_{01}J_1 + (1-\alpha_{01})J_2\}$$
$$J_{D2} = J_{02} - \{\alpha_{02}J_1 + (1-\alpha_{02})J_2\}$$

である．これらからわかるように，参照モデルの数が複数であっても補題 3.1, 3.2 および定理 3.1 と同様な手法を適用することができ，基準モデルの（準）最適な既約分解を求めることができる．このとき，(3.10) 式に対応する BMI の変数は，γ, P, F_1, F_2, J_1, J_2, F_{02}, J_{02} となり，P のサイズは大きくなる．

3.5 磁気浮上系への適用例

3.5.1 磁気浮上系

本節では，文献 [42] で取り扱われている Fig.3.1 のような磁気浮上系を補間モデルで近似することを考える．入力電圧偏差 u[V]（入力電圧 e の定常値 e_0 からの偏差）からギャップ x_1[m]（ギャップ長 x の定常値 Y_0 からの偏差）への伝達関数 $\mathbf{G}$ は

$$\mathbf{G} = \frac{-QX_c i_0}{(Q+L_0X_c)MX_c^2s^3 + MRX_c^3s^2 - QL_0i_0^2s - QRi_0^2} \tag{3.14}$$

と表わされる [42]．ここで，M は鋼球の質量 [Kg]，R はコイルの抵抗 [Ω]，i_0 は定常電流 [A] であり，Q[m·H], $X[m]$, L_0[H] は，コイルのインダクタンス L[H] とギャップ長 x[m] の関係式

$$L = Q/(X+x) + L_0$$

のパラメータである．また，X_c[m] は $X_c = X + Y_0$ によって定義される．

文献 [42] では，質量が異なる 3 種類の鋼球について同定実験が行われている．鋼球の質量 M の値が変化すると，それに伴い Q, X の値も Table 3.1 のように変化する．

3.5.2 補間モデルによる磁気浮上系のモデリング

ここでは，本章で述べた手法にしたがって，鋼球の質量が 357.3g（鋼球 1 の場合）から 533.3g（鋼球 3 の場合）の間を変化する磁気浮上系を補間モデルで近似することを行う（磁気浮上系が補間モデルで近似でき，鋼球質量の値を制御するときに知ることができれば，補間コントローラの適用を考えることができる）．

まず，鋼球 1 を浮上させるときの伝達関数を基準モデル G_1，鋼球 3 の場合の伝達関数を基準モデル G_2，そして，鋼球 2 の場合の伝達関数を参照モデル G_0 とする．(3.14) 式の各種物理パラ

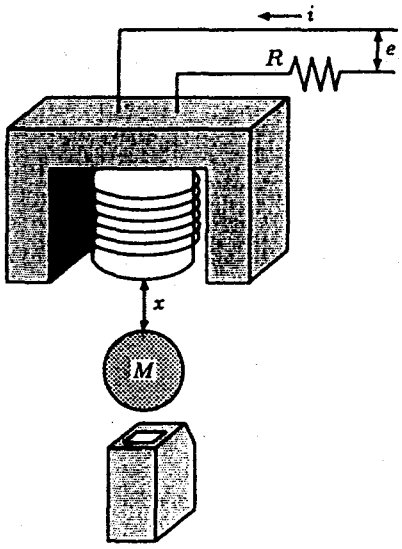

Fig.3.1 Magnetic levitation system

Table.3.1 Parameters for different steel balls

	Ball 1	Ball 2	Ball 3
M [g]	357.3	439.5	533.3
Q [mm · H]	4.121	4.524	4.849
X [mm]	9.472	9.227	8.362

メータの値は，$g = 9.80665[\mathrm{m/s^2}]$, $L_0 = 2.07[\mathrm{H}]$, $R = 28.2[\Omega]$, $Y = 0.017[\mathrm{m}]$ とする [42]．基準モデルと参照モデルは，

$$G_1 = \frac{-0.1226}{1.475 \times 10^{-2}s^3 + 0.1869s^2 - 10.78s - 146.8}$$

$$G_2 = \frac{-0.1382}{1.967 \times 10^{-2}s^3 + 0.2453s^2 - 12.68s - 172.8}$$

$$G_0 = \frac{-0.1334}{1.778 \times 10^{-2}s^3 + 0.2236s^2 - 11.83s - 161.2}$$

となる．また，鋼球 2 を浮上させるときを $\alpha = 0.5$ に対応させるとする（$\alpha_0 = 0.5$ とする）．G_0 の正規化既約分解

$$N_0 = \frac{7.502}{s^3 + 64.87s^2 + 1359s + 9067} \tag{3.15}$$

$$D_0 = \frac{-s^3 - 12.58s^2 + 665.5s + 9067}{s^3 + 64.87s^2 + 1359s + 9067} \tag{3.16}$$

に対して (3.1) 式を小さくする基準モデルの既約分解を求めるため，定理 3.1 の計算を行う．G_1, G_2 の状態空間表現を

$$G_1 = \left[\begin{array}{ccc|c} -12.67 & 730.7 & 9954 & 1 \\ 1.000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.000 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -8.313 & 0 \end{array}\right]$$

$$G_2 = \left[\begin{array}{ccc|c} -12.47 & 644.7 & 8783 & 1 \\ 1.000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.000 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -7.027 & 0 \end{array}\right]$$

として定理 3.1 の手法を用いると，

$$F_1 = [54.70 \quad 2189 \quad 1.991 \times 10^4]$$

$$F_2 = [51.54 \quad 1971 \quad 1.757 \times 10^4]$$

$$J_1 = 0.4913\ , \quad J_2 = 1.509$$

が得られる（なお，このときの (3.1) 式の値は 3.505×10^{-4} である）．これらを (3.4) 式に代入することにより，基準モデルの既約分解の状態空間表現が得られる．これらを伝達関数で書くと

$$N_1 = \frac{4.084}{s^3 + 67.37s^2 + 1459s + 9955}$$

$$D_1 = \frac{-0.4913s^3 - 6.225s^2 + 359.0s + 4891}{s^3 + 67.37s^2 + 1459s + 9955}$$

$$N_2 = \frac{10.61}{s^3 + 64.01s^2 + 1326s + 8783}$$

$$D_2 = \frac{-1.509s^3 - 18.82s^2 + 973.1s + 1.326 \times 10^4}{s^3 + 64.01s^2 + 1326s + 8783}$$

となる．そして，これらの既約分解を (2.2) 式に代入することによって補間モデルが構成される．$\alpha = \alpha_0 (= 0.5)$ のときの $N(\alpha_0)$, $D(\alpha_0)$, $G(\alpha_0)$ はつぎのとおりである．

$$\begin{aligned} N(\alpha_0) &= \alpha_0 N_1 + (1 - \alpha_0) N_2 \\ &= \frac{-7.345 \times 10^{-3}s^3 - 0.4880s^2 - 10.44s - 70.73}{0.001s^6 + 0.1314s^5 + 7.098s^4 + 201.5s^3 + 3164s^2 + 2.602 \times 10^4 s + 8.743 \times 10^4} \end{aligned} \tag{3.17}$$

$$D(\alpha_0) = \alpha_0 D_1 + (1-\alpha_0)D_2$$

$$= \frac{0.001s^6 + 7.909\times10^{-2}s^5 + 1.594s^4 - 25.82s^3 - 1430s^2 - 1.933\times10^4 s - 8.746\times10^4}{0.001s^6 + 0.1314s^5 + 7.098s^4 + 201.5s^3 + 3164s^2 + 2.602\times10^4 s + 8.743\times10^4} \tag{3.18}$$

$$G(\alpha_0) = \frac{-7.345\times10^{-3}s^3 - 0.4880s^2 - 10.44s - 70.73}{0.001s^6 + 7.909\times10^{-2}s^5 + 1.594s^4 - 25.82s^3 - 1430s^2 - 1.933\times10^4 s - 8.746\times10^4}$$

まず，このように構成された補間モデルの近似精度を周波数領域で評価する．G_0 と $G(\alpha_0)$ はともに不安定な伝達関数であるため，(3.15) 式，(3.16) 式の既約分解 N_0, D_0 と (3.17) 式と (3.18) 式の $N(\alpha_0), D(\alpha_0)$ のボード線図を比較することによって行う．Fig.3.2, Fig.3.3 とも実線と破線はほぼ重なっており，G_0 に対して $G(\alpha_0)$ が近くなっていることがわかる．

また，G_0 と $G(\alpha_0)$ の極と零点の比較を Table 3.2 に示す．G_0 の極と零点のそれぞれに近いものが $G(\alpha_0)$ に存在していることがわかる．

なお，G_0 が 3 次の伝達関数であるのに対して，補間モデル $G(\alpha_0)$ は 6 次の伝達関数となっている．これは，第 2 章の注意 2.2 で述べた例と同様の現象である．$G(\alpha_0)$ には次数の増加に伴い新たな極と零点が Table 3.2 のように生じているが，この例の場合，新たに生じた極と零点は互いに近い組（ダイポール）をつくっていることがわかる．

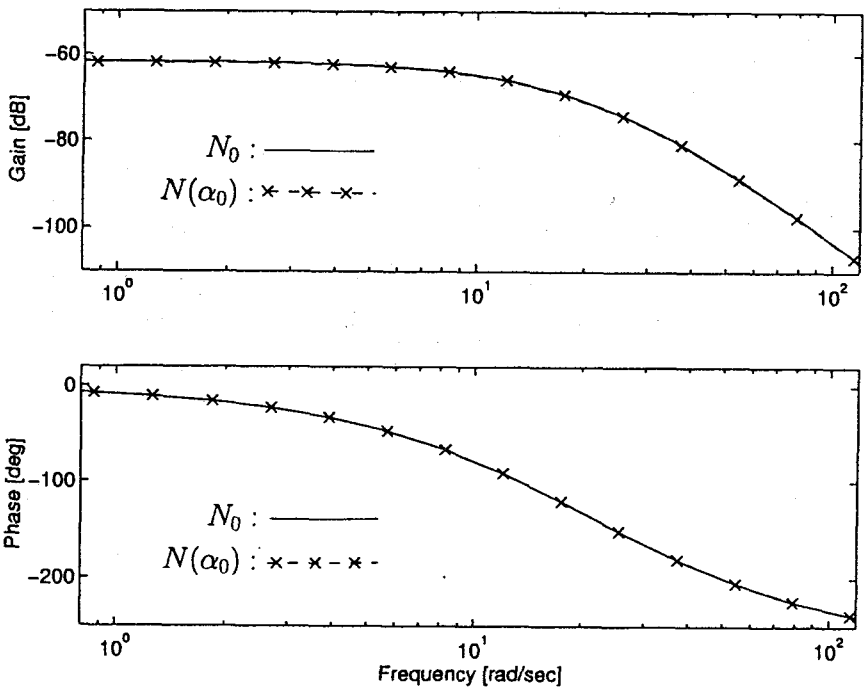

Fig 3.2 Bode diagram of N_0 and $N(\alpha_0)$

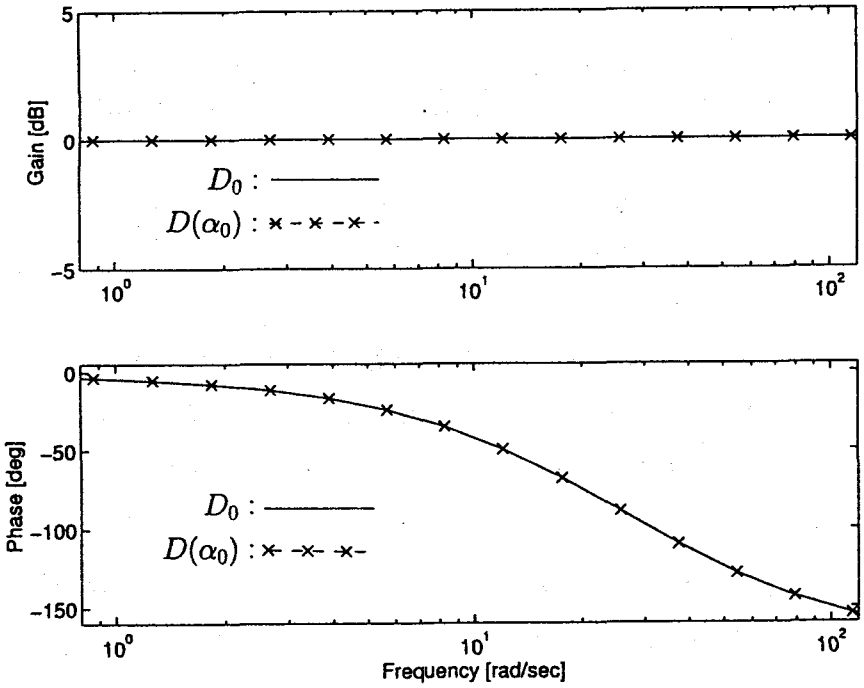

Fig. 3.3 Bode diagram of D_0 and $D(\alpha_0)$

Table.3.2 Poles and zeros of G_0 and $G(\alpha_0)$

zeros of G_0	poles of G_0	zeros of $G(\alpha_0)$	poles of $G(\alpha_0)$
∞	26.14	∞	26.15
∞	-14.07	∞	-14.14
∞	-24.65	∞	-24.10
		-27.18	-26.95
		-25.20	-26.05
		-14.06	-13.97

3.6 結言

動作環境の変化によって動特性が変化する制御対象を補間モデルを用いて近似するときの，補間モデルの構成法（基準モデルの既約分解の選び方）を与えた．補間途中のある点の補間モデルを，対応する動作環境における制御対象のモデル（参照モデル）に近づけることを考え，それらの近さをそれぞれの既約分解の差のノルムによって評価し，これを小さくする基準モデルの既約分解を求める問題として定式化した．そして，基準モデルの既約分解を状態空間でパラメータ行列を用いて表現し，これらをBMIを用いて求める方法を与えた．また，この補間モデルの構成法を，鋼球質量が変化する磁気浮上系のモデリングに適用し，この系が補間モデルによって近似できることと補間モデルの構成法の有効性を示した．

制御対象を補間モデルで表現するとき，本章で示した方法を用いなければならないということはないが，本章は，補間モデルを構成する基準モデルの既約分解の合理的な求め方を与えている．

本章で補間モデルによるモデリングの適用対象とした磁気浮上系は，運動方程式と電気回路の方程式から状態方程式が得られるシステムであり，(3.14) 式はそのような状態方程式を伝達関数に変換して得られたものである．第1章の緒論において，伝達関数によってモデルが得られるシステムに対して補間モデルの適用が有効であることを述べたが，この磁気浮上系のように，状態方程式によってモデルが得られるシステムであっても，状態方程式を伝達関数に変換することによって，補間モデルの適用は可能である．特にこの例のように，質量 M の変化によって Q, X の値が変化し，Table.3.1 のように3つの動作環境においてのみでしかそれらの値がわからない場合，すなわち，互いに相関をもつ複数の物理パラメータが状態方程式に現れ，それらの値が離散的な動作環境でしかわからない場合には，モデルを補間する必要があり，補間モデルによるモデリングが有効となる．

第4章

1入力1出力系に対する安定化問題

4.1 緒言

前章では，動作環境の変化によって動特性が変化する制御対象を補間モデルを用いて表現する方法を示した．本章では1入力1出力の補間モデルを補間コントローラで安定化する問題を考察し [24, 25, 36]．この問題をネバンリナ・ピックの補間問題 [17] に帰着させることにより [44]，補間モデルが補間コントローラによって安定化可能であるための必要十分条件を示す．また，これが成り立つときの，補間コントローラの構成法について述べる．

補間モデルに対して，コントローラを補間せず，固定とした場合の安定化問題が文献 [1, 11] などで考察されている．固定コントローラは，基準モデルに対する2つのコントローラを同一に選んだ場合の補間コントローラと考えることができるから，固定コントローラで安定化できる補間モデルが補間コントローラで安定化できることは明らかである．このように補間コントローラのクラスは固定コントローラを特殊な場合として含むので，補間コントローラの安定化能力が固定コントローラより高いことが予想されるが，本章では，その事実を実際に例題で示す．

4.2 問題設定

Fig.4.1 のような1入力1出力の制御系の安定化を考える．この図における制御対象 G は第2章の (2.2) 式の補間モデルで表され，コントローラ K には (2.8) 式の補間コントローラ $K(\alpha)$ を用いるとする．

第2章では多入力多出力系の補間モデルを (2.2) 式によって定義したが，本章では1入力1出力系に限定して考察を行う．このことを明確にするため，既約分解に関する記号にはつぎに示すように英小文字を用いることにする．まず，制御対象の2つ代表的な動作点における伝達関数（基準モデル）を G_1，G_2 として，これらのプロパーかつ安定な有理関数の集合（以下，RH_∞ と記す）

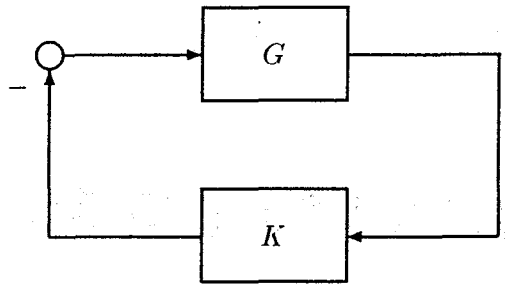

Fig.4.1 Closed-loop system

上の既約分解を

$$G_i = n_i d_i^{-1}, \quad i = 1, 2 \tag{4.1}$$

$$n_i,\ d_i \in RH_\infty$$

とする．これらを用いると (2.2) 式の補間モデルは

$$G(\alpha) = n(\alpha) d(\alpha)^{-1} \tag{4.2}$$

$$\begin{cases} n(\alpha) = \alpha n_1 + (1-\alpha) n_2 \\ d(\alpha) = \alpha d_1 + (1-\alpha) d_2 \end{cases}$$

$$0 \le \alpha \le 1$$

と表わされる．

この補間モデルを安定化するコントローラとして，(2.8) 式の補間コントローラを用いるとする．基準モデル G_1, G_2 に対する安定化コントローラ K_1, K_2 の既約分解を

$$K_1 = n_{k1} d_{k1}^{-1}, \quad K_2 = n_{k2} d_{k2}^{-1} \tag{4.3}$$

とする．これらを用いて，補間コントローラはつぎのように表わされるとする．

$$K(\alpha) = n_k(\alpha) d_k(\alpha)^{-1} \tag{4.4}$$

$$\begin{cases} n_k(\alpha) = \alpha n_{k1} + (1-\alpha) n_{k2} \\ d_k(\alpha) = \alpha d_{k1} + (1-\alpha) d_{k2} \end{cases}$$

$$0 \le \alpha \le 1$$

つぎの節では，(4.2) 式の補間モデルを $0 \leq \alpha \leq 1$ のすべての α に対して安定化する (4.4) 式の存在条件と構成法を示す．その議論の準備として，ベズー方程式

$$x_i n_i + y_i d_i = 1 \ , \quad i = 1, 2 \tag{4.5}$$

が成立するような x_i，$y_i \in RH_\infty$ と，複素平面における以下の領域を定義しておく．

C_+：虚軸と無限遠点を除く右半平面

C_{+e}：虚軸と無限遠点も含む右半平面

E_2：実軸上の区間 $(-\infty, 2\,]$ を含まない領域

D：原点を中心とした半径 1 の開円板

4.3 補間コントローラによる安定化

(4.1) 式の既約分解が与えられているとし，Fig.4.1 における制御対象 G が (4.2) 式の補間モデル $G(\alpha)$ で表されるとする．この図のコントローラ K として (4.4) 式の補間コントローラ $K(\alpha)$ を用いるとき，制御系が内部安定となるような補間コントローラ $K(\alpha)$ が存在する条件と，これが成り立つときの $K(\alpha)$ の構成法を求める問題を考える．

基準モデルに対する (4.3) 式の安定化コントローラ K_i $(i = 1, 2)$ は G_i に対する安定化コントローラの一般形

$$K_i = n_{ki} d_{ki}^{-1} \tag{4.6}$$

$$\begin{cases} n_{ki} = x_i + r_i d_i \\ d_{ki} = y_i - r_i n_i \end{cases}$$

を用いて表現できる．ただし，r_i は，$d_{ki} = 0$ としない任意の RH_∞ の元である．(4.6) 式の任意の K_1，K_2 を補間したのでは，$0 < \alpha < 1$ における制御系の安定性は一般に保証されない．この節の目的は α が 0 から 1 の間のいかなる値をとっても制御系が安定となるような補間コントローラ $K(\alpha)$ が存在するための必要十分条件と，それが成り立つときのコントローラの設計法を明らかにすることである．

制御対象とコントローラがそれぞれ $G(\alpha) = n(\alpha)d(\alpha)^{-1}$，$K(\alpha) = n_k(\alpha)d_k(\alpha)^{-1}$ で表されるとき，Fig.4.1 の制御系が安定であるための必要十分条件は，

$$\Omega(\alpha) = d_k(\alpha)d(\alpha) + n_k(\alpha)n(\alpha)$$

がユニモジュラとなることである [19]．ここで (4.2) 式，(4.4) 式，および (4.6) 式を用いて $\Omega(\alpha)$

を計算すると，

$$\Omega(\alpha) = (1 - 2\alpha + 2\alpha^2) + \alpha(1-\alpha)\Phi \tag{4.7}$$

となる．ただし，

$$\Phi = a + rb \tag{4.8}$$

$$\begin{cases} a = x_1 n_2 + y_1 d_2 + x_2 n_1 + y_2 d_1 \\ b = d_1 n_2 - n_1 d_2 \\ r = r_1 - r_2 \end{cases} \tag{4.9}$$

である．ここで，a, b は G_1, G_2 の既約分解から得られるものであり，r は K_1, K_2 のパラメータ r_1, r_2 から構成されていることに注意する．制御系を安定化するコントローラが存在するための必要十分条件を考えることは，α によらず Ω がユニモジュラとなるような $r \in RH_\infty$ の存在性を考えることである．

(注意 4.1) (4.5) 式を満たす x_i, y_i $(i = 1,2)$ は一意ではないが，それらの自由度は (4.9) 式の r_i $(i = 1,2)$ の自由度によって吸収される．これはつぎのように説明される．x_i と y_i が (4.5) 式を満たすとすると，$x_i + q_i d_i$ と $y_i - q_i n_i$ も (4.5) 式を満たす．ただし，q_i は RH_∞ の要素であり，(4.5) 式の解 x_i, y_i の自由度を表わすものである．(4.8) 式の x_i と y_i の代わりに $x_i + q_i d_i$ と $y_i - q_i n_i$ を代入すると，$\Phi = a + (q_1 - q_2 + r_1 - r_2)b$ と計算される．q_i と r_i $(i = 1,2)$ は RH_∞ の任意の要素であるので，q_i の自由度は r_i の自由度に吸収される．

$\alpha = 0, 1$ のとき，(4.7) 式の $\Omega(\alpha)$ がユニモジュラであることは明らかである．$\alpha \in (0,1)$ において $\Omega(\alpha)$ がユニモジュラになるための条件を考えるため，(4.7) 式を

$$\Omega(\alpha) = \alpha(1-\alpha)\{\frac{1 - 2\alpha + 2\alpha^2}{\alpha(1-\alpha)} + \Phi\}$$

と変形する．

$$\alpha(1-\alpha) > 0\ , \quad \frac{1 - 2\alpha + 2\alpha^2}{\alpha(1-\alpha)} \in [\ 2, \infty)$$

であることに注意すると，α によらず $\Omega(\alpha)$ がユニモジュラとなる必要十分条件，つまり Ω が複素閉右半平面 C_{+e} の s について 0 とならない条件は，

$$\Phi(s) \notin (-\infty, -2\ ]\ , \quad \forall s \in C_{+e} \tag{4.10}$$

である．さらに，

$$r = \frac{\Phi - a}{b} \in RH_\infty$$

であることを考慮すると，b の不安定零点 μ_i ，$i=1,\cdots,m$, が $(\Phi-a)$ で重複度も含めて相殺されなければならない．

ここで，b の不安定零点を

・虚軸上と無限遠点を除く零点 μ_i ， $i=1,\cdots,k$

・虚軸上の有限の零点 μ_i ， $i=k+1,\cdots,l$

・無限遠点の零点 μ_i ， $i=l+1,\cdots,m$

のように分類する．なお，議論を簡単にするため，無限遠点を除く零点に重複はないものと仮定している．無限遠点の零点は $m-l$ の重複度をもつとする．

（注意 4.2） 有限の零点が重複していないという仮定は，実用上それほど制約にはならないであろう．しかし，相対次数が2以上の制御対象の場合，b の無限遠点の零点は必ず重複する．相対次数が1であっても，2つの基準モデルの高周波ゲインが等しければ，同様である．したがって，b の無限遠点の零点が重複しないことを前提とすると，制御対象のクラスを狭めることになる．そこで，本章では，無限遠点については b の零点の重複を許すことにしている．

つぎの補題が成り立つ．

【補題 4.1】 (4.1) 式の既約分解が与えられているとする．このとき，(4.2) 式の補間モデルを安定化する (4.4) 式の補間コントローラが存在する必要十分条件は，

$$\begin{cases} \Phi(s)\in E_2\ , \quad \forall s\in C_{+e} \\ \Phi(\mu_i)=a(\mu_i)\ , \quad i=1,\cdots,l \\ \kappa(\Phi-a)\geq\kappa(b) \end{cases} \tag{4.11}$$

を満たす $\Phi\in RH_\infty$ が存在することである．ただし，κ は伝達関数の相対次数を表わす．

この補題に示すような Φ の存在条件を示す場合，ネバンリナ・ピックの補間問題の可解性に帰着させる手法 [44] が有効である．補題の第3番目の条件 $\kappa(\Phi-a)\geq\kappa(b)$ は，b の無限遠点の零点に関するものである．$\kappa\geq 2$ である場合には，新しく b の代わりに，$\kappa(\tilde{b})=1$ であり，かつ，有限な零点は b と一致するような $\tilde{b}$ を導入することにより（付録Eに示すように，そのような $\tilde{b}$ は容易に求められる），無限遠点の零点の重複がない場合の問題に帰着することができる．したがって，第3番目の条件は，$\kappa(b)=1$ の場合，すなわち，$\kappa(\Phi-a)\geq 1$ という条件について考察すればよい．これは $\Phi(\infty)-a(\infty)=0$ という条件であるため，第2番目の条件と同様に取り扱うことができる．こうすることによって，後にネバンリナ・アルゴリズムの適用が可能になる．

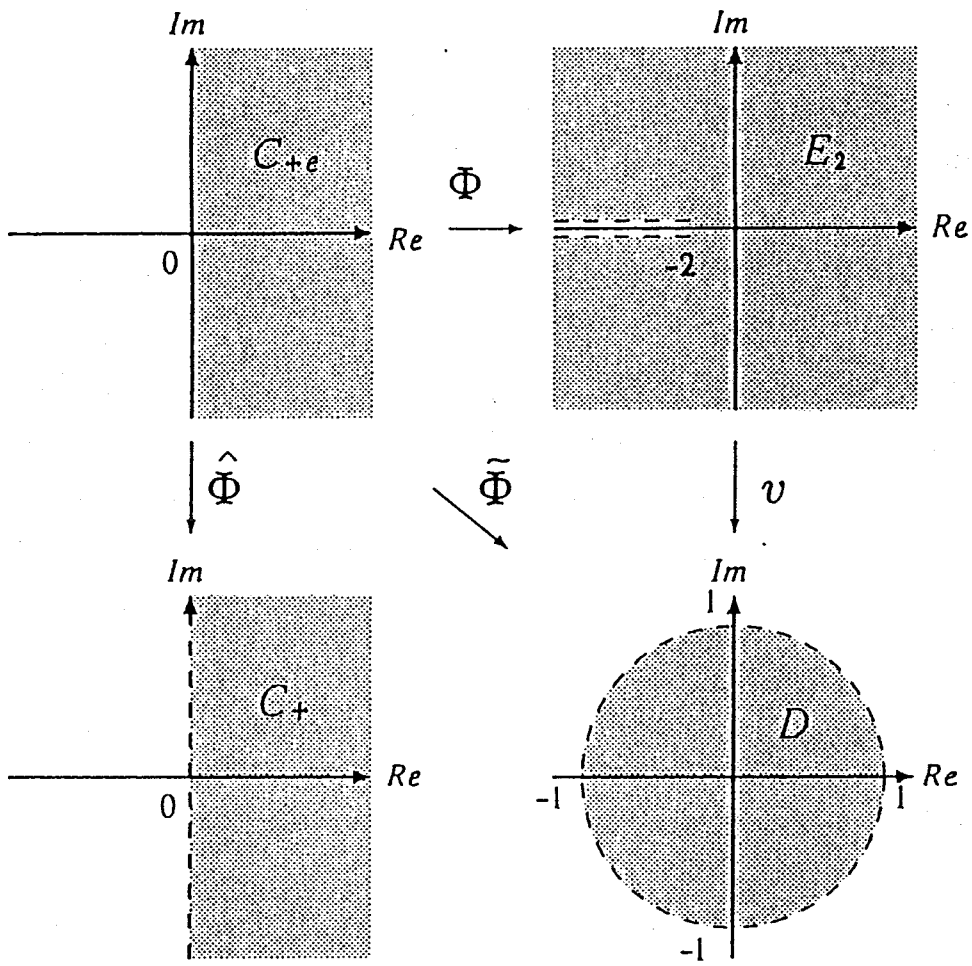

Fig.4.2 Conditions on Φ, $\hat{\Phi}$, and $\tilde{\Phi}$

さて，複素平面の変換（Fig.4.2 参照），

$$\hat{\Phi} = \sqrt{\Phi + 2} \tag{4.12}$$

$$\tilde{\Phi} = \frac{\sqrt{\Phi + 2} - 1}{\sqrt{\Phi + 2} + 1} \tag{4.13}$$

を用いることにより，補題 4.1 の $\Phi(s) \in E_2$ の条件は，これと等価な $\hat{\Phi} \in C_+$ あるいは $\tilde{\Phi} \in D$ という条件に変換される．これに伴い，補題の第2番目の条件 $\Phi(\mu_i) = a(\mu_i)$ も，(4.12) 式，あるいは (4.13) 式に対応して変換される．

以上より，補題 4.1 は補題 4.2 のように書くことができる．

【補題 4.2】 以下の，(i)，(ii)，(iii) は等価である．

(i) (4.11) 式の条件を満たす $\Phi \in RH_\infty$ が存在する．

(ii) $$\begin{cases} \hat{\Phi}(s) \in C_+ \ , \quad \forall s \in C_{+e} \\ \hat{\Phi}(\mu_i) = \sqrt{a(\mu_i)+2} \ , \quad i = 1, \cdots, l+1 \end{cases}$$

を満たす $\hat{\Phi} \in RH_\infty$ が存在する．

(iii) $$\begin{cases} \tilde{\Phi}(s) \in D \ , \quad \forall s \in C_{+e} \\ \tilde{\Phi}(\mu_i) = v(a(\mu_i)) \ , \quad i = 1, \cdots, l+1 \end{cases} \tag{4.14}$$

を満たす $\tilde{\Phi} \in RH_\infty$ が存在する．ただし，

$$v(\eta) = \frac{\sqrt{\eta+2}-1}{\sqrt{\eta+2}+1}$$

である．

この補題で，(i)⇒(ii) および (i)⇒(iii) は，(ii)，(iii) を満たす $\hat{\Phi}$，$\tilde{\Phi} \in H_\infty$ の存在性と，$\hat{\Phi}$，$\tilde{\Phi} \in RH_\infty$の存在性が等価であることから成り立つ．

補題 4.2 により，安定化問題は，ネバンリナ・ピックの補間問題 [17,19] に帰着できることがわかる．この解を用いることにより，制御系を安定化する補間コントローラが存在するための必要十分条件が，つぎの定理のようにまとめられる．ただし，補間条件となる b ($\tilde{b}$) の不安定零点は一般に無限遠点および虚軸上の零点も含むため特別な考慮が必要となるが，これは文献 [16] に示されている手法により対処できる．

【定理 4.1】 (4.1) 式の既約分解が与えられているとする．このとき，(4.2) 式の補間モデルを安定化する (4.4) 式の補間コントローラが存在するための必要十分条件は，以下の (i)，(ii) が成り立つことである．

(i) $P = [p_{ij}] > 0$

ただし，

$$p_{ij} = (1 - v_i \bar{v}_j)/(\mu_i + \bar{\mu}_j) \ , \quad i, j = 1, \cdots, k$$

$$v_i = v(a(\mu_i))$$

である．($\bar{z}$ は z の複素共役を表す)

(ii) $v(a(\mu_i)) \in D \ , \quad i = k+1, \cdots, l+1$

この定理 4.1 の条件 (i), (ii) が成り立つとき，(4.14) 式を満たす $\tilde{\Phi}$ は，ネバンリナアルゴリズム [19] によって求めることができる．そして，(4.11) 式の Φ は，

$$\begin{aligned}\Phi &= v^{-1}(\tilde{\Phi}) \\ &= (\frac{1+\tilde{\Phi}}{1-\tilde{\Phi}})^2 - 2\end{aligned}$$

によって求められる．コントローラのパラメータ r_1，r_2 は，

$$\tilde{r} = \frac{\Phi - a}{\tilde{b}}$$

から付録Eのようにして得られる r について，$r = r_1 - r_2$ の関係を満たす任意のものとなる．

（注意 4.3） この定理の条件 (i) は基本的に Chen らの文献 [6] によって導かれた．しかし，条件 (ii) を加えなければ不充分であることを，文献 [22] では指摘している．これを参考に Chen らも，無限遠点の零点が重複していない場合については，安定化可能条件を改善している [7].

なお，ネバンリナ・ピックの補間問題を，双一次変換を用いて強正実関数の補間問題に置き換えた結果 [19] を用いれば，補題 4.2 の (i) の Φ の存在性を (ii) の $\tilde{\Phi}$ の存在性に帰着させることができ，定理 4.1 は以下のようにも表現できる．

【定理 4.2】 (4.1) 式の既約分解が与えられているとする．このとき，(4.2) 式の補間モデルを安定化する (4.4) 式の補間コントローラが存在するための必要十分条件は，以下の (i) と (ii) が成り立つことである．

(i) $\tilde{P} = [\tilde{p}_{ij}] > 0$

ただし，

$$\tilde{p}_{ij} = (\sqrt{a(\mu_i)+2} + \sqrt{a(\bar{\mu}_j)+2})/(\mu_i + \bar{\mu}_j)\ ,\quad i,j = 1,\cdots,k$$

である．

(ii) $\mathrm{Re}\sqrt{a(\mu_i)+2} > 0\ ,\quad i = k+1,\cdots,l+1$

（注意 4.4） 定理 4.1, 4.2 の条件は，基準モデル G_i $(i = 1,2)$ の既約分解 n_i, d_i $(i = 1,2)$ の選び方に依存している．

4.4 固定コントローラによる安定化

(4.2) 式の補間モデルに対する固定コントローラによる安定化問題は，文献 [1, 11] において考察されているが，前節の手法を用いれば，補間コントローラの場合の定理 4.2 と同様にして，つぎの定理が得られる [22]．定理 4.1 に対応する定理も得られるが，ここでは省略する．

【定理 4.3】 (4.1) 式の既約分解が与えられているとする．このとき，(4.2) 式の補間モデルを安定化する固定コントローラが存在するための必要十分条件は，以下の (i) と (ii) が成り立つことである．ただし，

$$\hat{a} = x_1 n_2 + y_1 d_2 \tag{4.15}$$

であり，μ_i は (4.9) 式の b の不安定零点である．

(i) $Q = [q_{ij}] > 0$

ただし，

$$q_{ij} = (\sqrt{\hat{a}(\mu_i)} + \sqrt{\hat{a}(\bar{\mu}_j)})/(\mu_i + \bar{\mu}_j)\ ,\quad i,j = 1,\cdots,k$$

である．

(ii) $$\mathrm{Re}\sqrt{\hat{a}(\mu_i)} > 0\ ,\quad i = k+1,\cdots,l+1 \tag{4.16}$$

（注意 4.5） 文献 [1, 11] では，虚軸上と無限遠点には (4.9) 式の b の零点が存在しないものと仮定されている．

4.5 安定化能力の比較

補間コントローラは制御対象の変化に対応してそれ自身が変化する．またこれは，基準モデルに対する 2 つのコントローラを同一に選んだ場合として，固定コントローラを含む．これらの事から，補間コントローラで安定化できる制御対象のクラスは，固定コントローラに比べて広く，一般には同一ではないことが期待される．固定コントローラでは安定化できないが，補間コントローラで安定化できる制御対象の例をここで示す．

基準モデルが

$$G_1 = \frac{s-1}{(s-3)(s+1)}$$

$$G_2 = \frac{2(s-1)}{(s-4)(s+1)}$$

であるときの補間モデルの安定化問題を考える．G_1，G_2の既約分解を以下のようなものとする．

$$n_1 = \frac{s-1}{(s+1)^2}\ ,\quad d_1 = \frac{s-3}{s+1}\ ,\quad x_1 = 8\ ,\quad y_1 = \frac{s-3}{s+1}$$

$$n_2 = \frac{2(s-1)(19s+1)^2}{(s+1)^2(s+9)^2}\ ,\quad d_2 = \frac{(s-4)(19s+1)^2}{(s+1)(s+9)^2}$$

$$x_2 = \frac{25(s+9)^2}{6(19s+1)^2}\ ,\quad y_2 = \frac{(s-7/3)(s+9)^2}{(s+1)(19s+1)^2}$$

まず，補間コントローラによる安定化を考える．(4.9) 式の a，b は，

$$a = \frac{(s^2+9s-4)(19s+1)^2}{(s+1)^2(s+9)^2} + \frac{(6s^2-7s+17)(s+9)^2}{6(s+1)^2(19s+1)^2}$$

$$b = \frac{(s-1)(s-2)(19s+1)^2}{(s+1)^3(s+9)^2}$$

となる．定理 4.2 の条件 (i) のピック行列 $\tilde{P}$ を計算すると，$\tilde{p}_{11} = 7/\sqrt{6}$，$\det\tilde{P} = 0.2111 > 0$ なので，$\tilde{P} > 0$ である．また，$a(\infty) > 0$ であるから，定理 4.2 の条件 (ii)

$$\sqrt{a(\infty)+2} > 0$$

が成り立つ．よって，補間コントローラによる安定化が可能である．実際，

$$r = \frac{(s+1)(0.282s^7 + 4.965s^6 + 27.57s^5 + 50.93s^4 - 40.7s^3 - 24.9s^2 - 8.53s - 3.612)}{(1.9s+0.1)^4(0.0651s^2 + .4915s + 1.963)^2}$$

と選べば，(4.8) 式の Φ について (4.10) 式の条件が成立することが確かめられる．

つぎに，固定コントローラによる安定化問題を考える．(4.15) 式の $\hat{a}$ は

$$\hat{a} = \frac{(s^2+9s-4)(19s+1)^2}{(s+1)^2(s+9)^2}$$

と計算できる．定理 4.3 のピック行列 Q を計算すると，$\det Q = -0.0483 < 0$ となり，$Q > 0$ ではないので，固定コントローラによる安定化はできない．

4.6 結言

1入力1出力の補間モデルが補間コントローラによって安定化可能であるための必要十分条件をネバンリナ・ピックの補間問題の結果を用いて示した．安定化可能であるときの補間コントローラの構成法がネバンリナアルゴリズムを用いて与えられることを述べた．

また，固定コントローラでは安定化できないが，補間コントローラでは安定化できる制御対象の存在を数値例で示した．この例より，補間コントローラは固定コントローラよりも安定化能力に優れていることが示された．

第5章

多入力多出力系に対する安定化問題

5.1 緒言

本章では，多入力多出力の補間モデルに対する安定化問題を考察する．1入力1出力系では安定化問題をネバンリナ・ピックの補間問題に帰着させることによって，安定化可能であるための必要十分条件が得られたが，多入力多出力系の場合，同様にネバンリナ・ピックの補間問題に帰着させる手法を用いることは困難である．このため，本章では，安定化可能であるための十分条件を，ある種の H_∞ 制御問題の可解条件に帰着させる．そして，この条件が状態空間において LMI (linear matrix inequality：線形行列不等式）によって表わされることを示す．

このように，補間モデルの安定化問題を H_∞ 制御問題に帰着させて，安定化可能であるための十分条件を導出する手法は，基準モデルの数を2つに限らず，複数とした補間モデルに対しても適用できる．制御対象の変動要因が1つでなく複数存在する場合には，基準モデルの数を多くとることによって制御対象のより複雑な変動を表現することができる．そこで本章では，基準モデルの数を（2つだけでなく）複数とした補間モデルを定義し，これに対して補間コントローラと固定コントローラによる安定化問題を考察する．

5.2 問題設定

m 入力 k 出力の制御対象について，p 個の代表的な動作点を考え，それぞれにおける動特性を表す伝達関数行列 G_i $(i = 1, \cdots, p)$ を基準モデルとする．そして，それらの安定かつプロパーな有理関数行列の集合（RH^∞）上の既約分解を

$$G_i = N_i D_i^{-1} \tag{5.1}$$

$$N_i, D_i \in RH^\infty, \quad i = 1, \cdots, p$$

とする．制御対象は，これらの既約分解を用いた補間モデル，

$$G(\alpha_1,\cdots,\alpha_p)=N(\alpha_1,\cdots,\alpha_p)D(\alpha_1,\cdots,\alpha_p)^{-1} \tag{5.2}$$

$$\begin{cases} N(\alpha_1,\cdots,\alpha_p)=\sum_{i=1}^{p}\alpha_i N_i \\ D(\alpha_1,\cdots,\alpha_p)=\sum_{i=1}^{p}\alpha_i D_i \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{p}\alpha_i=1,\quad 0\le\alpha_i\le 1$$

と表されるとする．ここで，α_i は制御対象の動作環境の変化に応じて，0 から 1 の間を変化するパラメータである．たとえば，$\alpha_i=1,\ \alpha_j=0\ (j\neq i)$ のとき，$G(\alpha_1,\cdots,\alpha_p)=N_iD_i^{-1}=G_i$ となるので，(5.2) 式の $G(\alpha_1,\cdots,\alpha_p)$ は，$G_1,\cdots,G_p$ を $\alpha_1,\cdots,\alpha_p$ によって補間したものである．$p=2$ の場合には，第2章の (2.2) 式に一致する．制御対象の変動要因が複数存在する場合の補間モデルの一例を付録Fに与える．

（注意 5.1） 文献 [40] において，複数の伝達関数モデルの既約分解の凸結合で表わされるモデルが提案されており，これに対する安定化問題が考察されているが，このモデルは本研究の補間モデルとは異なるものである．最も大きな相違点は，文献 [40] では凸結合のパラメータにノルム有界なものを用いているため，端点のモデルの数が偶数となるものに限られていることである．

制御対象の変動要因から補間パラメータ $\alpha_i\ (i=1,\cdots,p)$ の値を知ることができる場合には，(5.2) 式のような制御対象を安定化するコントローラとして，補間コントローラを用いることが考えられる．p 個の安定化コントローラを補間するコントローラを，(2.8) 式の拡張として，つぎのように定義する．

$$K(\alpha_1,\cdots,\alpha_p)=\tilde{D}_K(\alpha_1,\cdots,\alpha_p)^{-1}\tilde{N}_K(\alpha_1,\cdots,\alpha_p)$$

$$\begin{cases} \tilde{N}_K=\sum_{i=1}^{p}\alpha_i\tilde{N}_{Ki} \\ \tilde{D}_K=\sum_{i=1}^{p}\alpha_i\tilde{D}_{Ki} \end{cases} \tag{5.3}$$

$$\tilde{N}_{Ki},\tilde{D}_{Ki}\in RH^\infty,\quad i=1,\cdots,p$$

ここで，

$$\tilde{K}_i=\tilde{D}_{Ki}^{-1}\tilde{N}_{Ki}$$

と定義すれば，(5.3) 式の $K(\alpha_1,\cdots,\alpha_p)$ は，$K_i\ (i=1,\cdots,p)$ を $\alpha_i\ (i=1,\cdots,p)$ によって補間したものである．

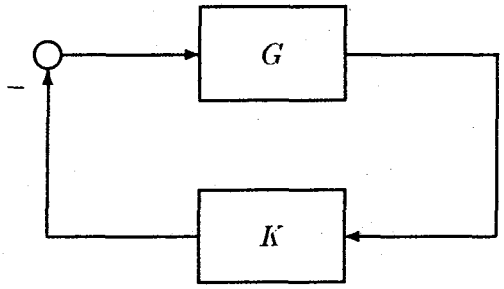

Fig.5.1 Closed-loop system

本章で考える問題は，補間モデルのパラメータ α_i $(i=1,\cdots,p)$ が $0 \le \alpha_i \le 1$ の間のいかなる値をとっても，Fig 5.1 の制御系が安定となるような補間と固定のコントローラの存在条件と構成法を求めることである．

（注意 5.2） (5.2) 式の $G(\alpha_1,\cdots,\alpha_p)$ は，(5.1) 式の G_i の既約分解 $(\tilde{N}_i, \tilde{D}_i)$ の選び方に依存している．第 3 章で示した基準モデルの既約分解の選び方は，基準モデルの数が 3 つ以上の場合にも拡張でき，これを用いて基準モデルの適切な既約分解を求めることは可能である．

（注意 5.3） 本章では，(5.1) 式のように基準モデルの右既約分解が与えられており，(5.2) 式のようにそれらの線形補間で制御対象が表されているとして安定化問題を考察する．左既約分解で制御対象が表される場合も同様な手法によって安定化可能条件を示すことができる．

（注意 5.4） 第 2 章において，基準モデルの数が 2 の場合，補間モデルが安定化可能であるためには，2 つの基準モデルが同時安定化可能であることが必要であることを示した．この結果より，(5.2) 式の補間モデル $G(\alpha_1,\cdots,\alpha_p)$ が安定化可能であるためには，任意の 2 つの基準モデルの組が同時安定化可能であることが必要である．また，$\alpha_1,\cdots,\alpha_p$ を変化させることによって得られる (5.2) 式の任意の 2 つの伝達関数が同時安定化可能であることも必要である．

5.3 補間コントローラによる安定化

Fig.5.1 の制御系において，G が (5.2) 式の補間モデル $G(\alpha_1,\cdots,\alpha_p)$ によって表され，K として (5.3) 式の補間コントローラ $K(\alpha_1,\cdots,\alpha_p)$ を用いるものとし，この系を安定化する問題を考える．$\alpha_i=1, \alpha_j=0$ $(j \ne i)$ のとき，$G(\alpha_1,\cdots,\alpha_p)=G_i$, $K(\alpha_1,\cdots,\alpha_p)=K_i$ となるので，各 K_i

はそれぞれ基準モデル G_i の安定化コントローラ

$$\tilde{K}_i = \tilde{D}_{Ki}^{-1}\tilde{N}_{Ki}\ , \quad \begin{cases} \tilde{N}_{Ki} = X_i + R_i\tilde{D}_i \\ \tilde{D}_{Ki} = Y_i - R_i\tilde{N}_i \end{cases}, \quad i = 1, 2$$

になっていることが必要である．ただし，任意の K_i $(i = 1, \cdots, p)$ を補間しても，一般に制御系の安定性は保証されない．本章で考える問題は，α_i が 0 から 1 の間のいかなる値をとっても制御系が安定であるような K_i，つまり，それらのパラメータ $R_i \in RH^\infty$ の存在条件と構成法を求めることである．

Fig.5.1 の制御系が安定であるための必要十分条件は，

$$\Omega = \tilde{D}_K(\alpha_1, \cdots, \alpha_p)D(\alpha_1, \cdots, \alpha_p) + \tilde{N}_K(\alpha_1, \cdots, \alpha_p)N(\alpha_1, \cdots, \alpha_p)$$

がユニモジュラとなることである [19, 45]．この Ω に，(5.2) 式，(5.3) 式および (2.9) 式を代入し，(2.10) 式を利用すると，

$$\begin{aligned} \Omega &= H^T(\Phi + I)H \\ &= H^TH + H^T\Phi H \end{aligned} \tag{5.4}$$

が得られる．ただし，

$$H = [\ \alpha_1 I_\ell \quad \alpha_2 I_\ell \quad \cdots \quad \alpha_p I_\ell\ ]^T$$

であり，Φ はその i, j ブロックがつぎのような行列である．

$$\Phi_{ij} = \begin{cases} 0, & i = j \\ X_iN_j + Y_iD_j - R_i(\tilde{N}_iD_j - \tilde{D}_iN_j), & i \neq j \end{cases}$$
$$(i = 1, \cdots, p, \quad j = 1, \cdots, p)$$

さらに，

$$\begin{aligned} H^TH &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_p)^2 I_\ell - 2(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \cdots + \alpha_2\alpha_3 \\ &\quad + \alpha_2\alpha_4 + \cdots + \alpha_{p-1}\alpha_p)I_\ell \\ &= I_\ell - 2(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \cdots + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4 + \cdots + \alpha_{p-1}\alpha_p)I_\ell \end{aligned}$$

であることを利用すると，(5.4) 式は，任意の非負数 β を用いてつぎのように変形できる．

$$\begin{aligned} \Omega &= I_\ell - 2EM + \Psi M \\ &= I_\ell + (\beta - 2)EM + (\Psi - \beta E)M \\ &= U + (\Psi - \beta E)M \end{aligned} \tag{5.5}$$

ここで,

$$
\begin{aligned}
E &= [\ \underbrace{I_\ell\ \cdots\ I_\ell}_{\frac{p(p-1)}{2}}\ ] \\
M &= [\alpha_1\alpha_2 I_\ell\ \ \alpha_1\alpha_3 I_\ell\ \ \cdots\ \ \alpha_2\alpha_3 I_\ell\ \ \alpha_2\alpha_4 I_\ell\ \ \cdots\ \ \alpha_{p-1}\alpha_p I_\ell]^T \\
\Psi &= [\ \Phi_{12}+\Phi_{21}\quad \Phi_{13}+\Phi_{31}\ \ \cdots\ \ \Phi_{23}+\Phi_{32}\quad \Phi_{24}+\Phi_{42}\ \ \cdots\ \ \Phi_{p-1,p}+\Phi_{p,p-1}\ ] \\
U &= I_\ell + (\beta-2)EM \\
&= \ \{\ 1+(\beta-2)(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\cdots+\alpha_2\alpha_3+\alpha_2\alpha_4+\cdots+\alpha_{p-1}\alpha_p)\ \}I_\ell
\end{aligned}
$$

である．なお，β を導入した理由は，求める安定化可能条件をよりゆるい十分条件にするためである（注意 5.6, 5.7 参照）．

(5.5) 式において，U はユニモジュラであり，$(\Psi-\beta E)M \in RH^\infty$ であることから，

$$
\|\Psi-\beta E\|_\infty < \frac{\|U\|_\infty}{\|M\|_\infty} \tag{5.6}
$$

であれば，Ω がユニモジュラとなり，制御系が安定となることがわかる．ここで，(5.6) 式の右辺において

$$
\begin{aligned}
\|U\|_\infty &= 1+(\beta-2)(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\cdots+\alpha_2\alpha_3+\alpha_2\alpha_4+\cdots+\alpha_{p-1}\alpha_p) \qquad (5.7)\\
\|M\|_\infty &= (\alpha_1^2\alpha_2^2+\alpha_1^2\alpha_3^2+\cdots+\alpha_2^2\alpha_3^2+\alpha_2^2\alpha_4^2+\cdots+\alpha_{p-1}^2\alpha_p^2)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

であることと，左辺が α_i を含まないことに注意する．なお，$\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\cdots+\alpha_2\alpha_3+\alpha_2\alpha_4+\cdots+\alpha_{p-1}\alpha_p$ の最大値が $0 \le \alpha \le 1$，$\sum_{i=1}^{p}\alpha_i = 1$ のもとで 1/2 より小さいことより，任意の $\beta \ge 0$ に対して，(5.7) 式の右辺の値が 0 または負になることはない．

ここで，α_i $(i=1,\cdots,p)$ の値によらず (5.6) 式が成り立つ条件を導くため，$0<\alpha_i<1$ $(i=1,\cdots,p)$ のときの (5.6) 式の右辺の最小値を考える．最小値は $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_p=1/p$ のときに，つぎの補題のように得られる．

【補題 5.1】

$$
\begin{aligned}
\min \frac{\|U\|_\infty}{\|M\|_\infty} &= \frac{2p^2+(\beta-2)p(p-1)}{\{2p(p-1)\}^{1/2}} \\
&\triangleq m(\beta)
\end{aligned}
$$

これと (5.6) 式より，ある非負数 β に対して，

$$
\|\Psi-\beta E\|_\infty < m(\beta) \tag{5.8}
$$

であれば，(5.5) 式の Ω はユニモジュラである．

さて，(5.8) 式における Ψ は，

$$\Psi = \Psi(R) = T_a - RT_b$$

と表すことができる．ただし，

$$T_a = [\ V_{12}\quad V_{13}\quad \cdots\quad V_{23}\quad V_{24}\quad \cdots\quad V_{p-1,p}\ ] \tag{5.9}$$

$$T_b = \begin{bmatrix} W_{12} & W_{13} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ W_{21} & 0 & \cdots & W_{23} & W_{24} & \cdots & 0 \\ 0 & W_{31} & \cdots & W_{32} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & W_{42} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & W_{p-1,p} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & W_{p,p-1} \end{bmatrix} \tag{5.10}$$

$$R = [\ R_1\quad R_2\quad \cdots\quad R_p\ ] \tag{5.11}$$

であり，V_{ij}, W_{ij} はつぎのような行列である．

$$V_{ij} = X_iN_j + Y_iD_j + X_jN_i + Y_jD_i$$
$$W_{ij} = \tilde{N}_iD_j - \tilde{D}_iN_j$$

以上より，次の定理が成り立つ．

【定理 5.1】 ある非負数 β に対して，

$$\|T_a - \beta E - RT_b\|_\infty < m(\beta) \tag{5.12}$$

を満たす $R \in RH_\infty$ が存在すれば，補間モデル $G(\alpha_1, \cdots, \alpha_p)$ を安定化する補間コントローラ $K(\alpha_1, \cdots, \alpha_p)$ が存在する．

(5.12) 式を満たす $R \in RH_\infty$ の存在性は，H_∞制御問題の可解性によって判定でき，その解を用いることにより R の構成法を得ることができる．R が得られれば (5.11) 式より各 K_i のパラメータ R_i が得られ，K_i から補間コントローラ $K(\alpha_1, \cdots, \alpha_p)$ を構成できる．状態空間での具体的な R の存在条件と構成法は第 5.5 節において述べる．

(注意 5.5) 与えられた N_i, D_i $(i = 1, \cdots, p)$ に対して，(2.10) 式を満たす $\tilde{N}_i, \tilde{D}_i, X_i, Y_i, \tilde{X}_i, \tilde{Y}_i$ $(i = 1, \cdots, p)$ は一意ではないが，その自由度は R_i $(i = 1, \cdots, p)$ によって吸収され，定理 5.1 の条

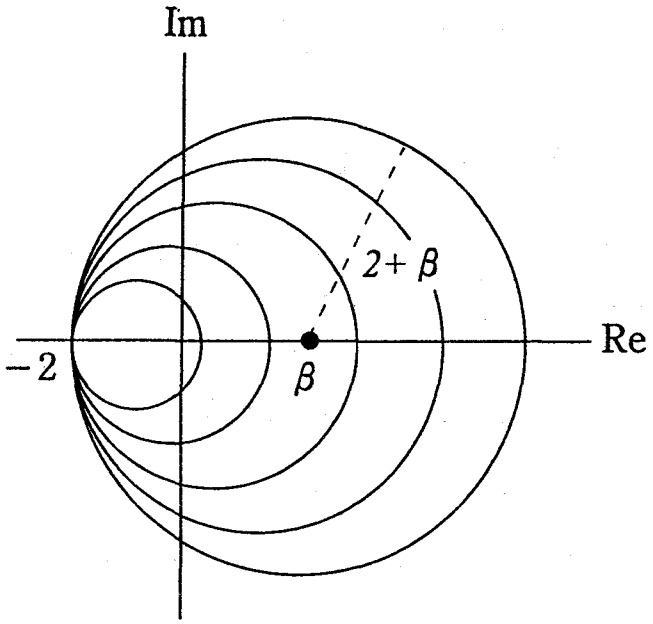

Fig.5.2 Condition on Ψ

件の成否には影響しない．このことはつぎのように説明される．(2.10) 式を $\tilde{N}_i$, $\tilde{D}_i$, X_i, Y_i, $\tilde{X}_i$, $\tilde{Y}_i$ $(i=1,\cdots,p)$ が満たすとき，$Z_i\tilde{N}_i$, $Z_i\tilde{D}_i$, $X_i+Q_i\tilde{D}_i$, $Y_i-Q_i\tilde{N}_i$, $(\tilde{X}_i+D_iQ_i)Z_i^{-1}$, $(\tilde{Y}_i-N_iQ_i)Z_i^{-1}$ $(i=1,\cdots,p)$ もやはり (2.10) 式を満たす．ただし，Z_i は RH_∞ 上の任意のユニモジュラ行列，Q_i は任意の RH_∞ の行列である．G_i の左既約分解 $\tilde{N}_i$, $\tilde{D}_i$ の自由度がユニモジュラ行列 Z_i で表わされることと，ベズー方程式 $Y_iD_i+X_iN_i=I$, $\tilde{N}_i\tilde{X}_i+\tilde{D}_i\tilde{Y}_i=I$ の一般解が Q_i を用いて表わされることから，$Z_i\tilde{N}_i$, $Z_i\tilde{D}_i$, $X_i+Q_i\tilde{D}_i$, $Y_i-Q_i\tilde{N}_i$, $(\tilde{X}_i+D_iQ_i)Z_i^{-1}$, $(\tilde{Y}_i-N_iQ_i)Z_i^{-1}$ $(i=1,\cdots,p)$ は，N_i, D_i $(i=1,\cdots,p)$ が与えられたときの (2.10) 式の一般解となる．(5.12) 式において，$\tilde{N}_i$, $\tilde{D}_i$, X_i, Y_i の代わりに，$Z_i\tilde{N}_i$, $Z_i\tilde{D}_i$, $X_i+Q_i\tilde{D}_i$, $Y_i-Q_i\tilde{N}_i$ を代入すると $\|T_a-\beta E-\tilde{R}T_b\|_\infty<m(\beta)$ が得られる．ここで，$\tilde{R}=[\ Z_1R_1+Q_1\ \ Z_2R_2+Q_2\ \cdots\ Z_pR_p+Q_p\ ]$ である．Z_i と Q_i の定義より，これらの自由度は R_i $(i=1,\cdots,p)$ の自由度によって吸収される．

（注意 5.6） ある $\beta=\hat{\beta}$ に対して (5.12) 式が成り立つならば，$\hat{\beta}\le\tilde{\beta}$ であるような $\tilde{\beta}$ に対して $\beta=\tilde{\beta}$ とした (5.12) 式も成り立つ．これは $\|T_a-\tilde{\beta}E-RT_b\|_\infty\le\|T_a-\hat{\beta}E-RT_b\|_\infty+\|-(\tilde{\beta}-\hat{\beta})E\|_\infty<m(\hat{\beta})+(\tilde{\beta}-\hat{\beta})(p(p-1)/2)^{1/2}=m(\tilde{\beta})$ が成り立つことからわかる．

（注意 5.7） $p=2$，すなわち基準モデルの数が 2 の場合，定理 5.1 は $\|T_a-\beta E-RT_b\|_\infty<2+\beta$ となり，文献 [23] の補題 3b に一致する．さらにこれを 1 入力 1 出力系にあてはめた場合，この条件は，右閉半平面の s に対する $\Psi=T_a-RT_b$ の値が Fig.5.2 の円の内部に入ることを意味する．

この場合，注意 5.6 は，より大きな β に対する円が，小さな β に対する円を含むことを意味する．安定化可能条件の十分性をよりゆるくするために，(5.5) 式において β を導入した効果は，β の自由度により，Ψ が入るべき円を大きくできることに現れている．

5.4 固定コントローラによる安定化

ここでは，固定コントローラによる安定化問題を前節と同様な手法によって考察する．まず，(5.2) 式によって表される補間モデルを安定化するコントローラは，$\alpha_1 = 1$，$\alpha_2 = 0, \cdots, \alpha_p = 0$ のとき，つまり $G(\alpha_1, \cdots, \alpha_p) = G_1$ のとき制御系を安定化することが必要である．そこでまず，固定コントローラを G_1 に対する安定化コントローラの一般形

$$
\begin{aligned}
K = K_1 &= \tilde{D}_{K1}^{-1}\tilde{N}_{K1} \\
\tilde{N}_{K1} &= X_1 + R_1\tilde{D}_1 \ , \ \tilde{D}_{K1} = Y_1 - R_1\tilde{N}_1 \\
R_1 &\in RH_\infty
\end{aligned}
\tag{5.13}
$$

によって表現する．そして前節と同様，

$$
\hat{\Omega} = \tilde{D}_{K1}D(\alpha_1, \cdots, \alpha_p) + \tilde{N}_{K1}N(\alpha_1, \cdots, \alpha_p) \tag{5.14}
$$

がユニモジュラとなるような R_1 の存在条件を考える．

(5.2) 式，(2.10) 式，および (5.13) 式を用いると，(5.14) 式は，任意の正数 β を用いて，

$$
\begin{aligned}
\hat{\Omega} &= \alpha_1 I_\ell + \Psi_1\hat{H} \\
&= \alpha_1 I_\ell + \beta(\alpha_2 + \cdots + \alpha_p)I_\ell + (\Psi_1 - \beta\hat{E})\hat{H}
\end{aligned}
\tag{5.15}
$$

と書くことができる．ただし，

$$
\begin{aligned}
\hat{H} &= [\alpha_2 I_\ell \ \cdots \ \alpha_p I_\ell]^T \\
\Psi_1 &= \left[\hat{\Phi}_2 \ \cdots \ \hat{\Phi}_p\right] \\
\hat{\Phi}_i &= X_1 N_i + Y_1 D_i - R_1(\tilde{N}_1 D_i - \tilde{D}_1 N_i) \\
\hat{E} &= [\underbrace{I_\ell \ \cdots \ I_\ell}_{p-1}]
\end{aligned}
$$

である．β は求める安定化可能条件をよりゆるい十分条件にするために導入したものであり，後で示す定理 5.2 の条件の成立を可能にするために正数としている．

(5.15) 式より,

$$\|\Psi_1 - \beta\hat{E}\|_\infty < \frac{\alpha_1 + \beta(\alpha_2 + \cdots + \alpha_p)}{\|[\ \alpha_2 I_\ell \cdots \alpha_p I_\ell\ ]\|_\infty} \tag{5.16}$$

であれば, $\hat{\Omega}$ がユニモジュラとなることがわかる. (5.16) 式の右辺の最小値は $\alpha_k = 1\ (k = 2, \cdots, p)$, $\alpha_i = 0\ (i = 1, \cdots, k-1, k+1, \cdots, p)$ のときの値, すなわち β である. また, (5.16) 式における Ψ_1 は,

$$\begin{aligned}
\Psi_1 &= \hat{T}_a - R_1\hat{T}_b \\
\hat{T}_a &= [X_1N_2 + Y_1D_2 \ \cdots \ X_1N_p + Y_1D_p] \\
\hat{T}_b &= \left[\tilde{N}_1D_2 - \tilde{D}_1N_2 \ \cdots \ \tilde{N}_1D_p - \tilde{D}_1N_p\right]
\end{aligned}$$

と表現できる. これらの考察からつぎの定理が得られる.

【定理 5.2】 ある正数 β に対して,

$$\|\hat{T}_a - \beta\hat{E} - R_1\hat{T}_b\|_\infty < \beta \tag{5.17}$$

を満たす $R_1 \in RH_\infty$ が存在すれば, 補間モデル $G(\alpha_1, \cdots, \alpha_p)$ を安定化する固定コントローラ $K(\alpha_1, \cdots, \alpha_p)$ が存在する.

(注意 5.8) $p = 2$ すなわち基準モデルの数が 2 つの場合の定理 5.2 は, 文献 [23] の補題 2 と一致する. さらにこの条件を 1 入力 1 出力系の場合にあてはめると, 右閉半平面の s に対する $\Psi_1 = \hat{T}_a - R_1\hat{T}_b$ の値が Fig.5.3 の円の内部に入ることを意味する.

(注意 5.9) 注意 5.5 と同様に, (5.17) 式における $X_1, Y_1, \tilde{N}_1, \tilde{D}_1$ の自由度は, R_1 によって吸収され, 定理 5.2 の条件の成否には影響しない.

5.5 LMI を用いた安定化可能条件とコントローラの設計

補間モデルを安定化する補間および固定コントローラの存在条件は, 定理 5.1, 定理 5.2 に示したような H_∞制御問題に帰着される. これらは一般の場合の H_∞ 制御問題と異なり, 例えば定理 5.1 では, (5.12) 式のノルム条件を満たす R とともに, 非負数 β も同時に求める問題となっている. このような問題に対しては, LMI (線形行列不等式) を用いた解法が有効である. ここでは, 定理 5.1 で得られた条件を LMI を用いて状態空間で表現する. なお, 記述の煩雑さを避けるため, 制御対象は厳密にプロパーであると仮定する.

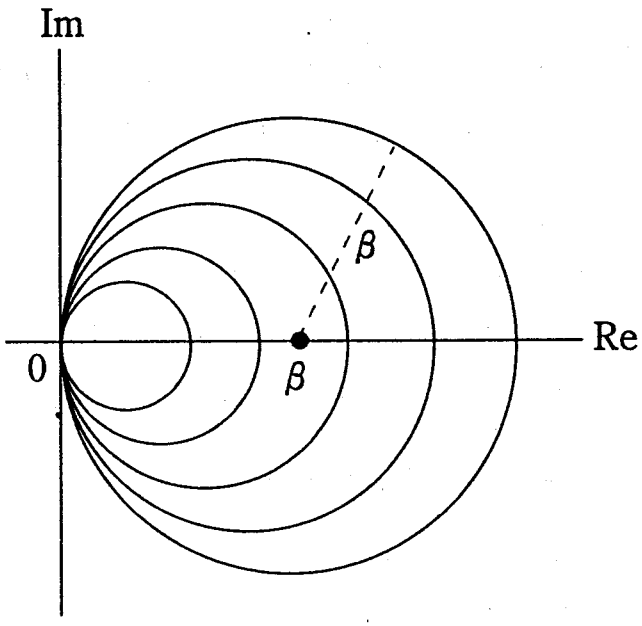

Fig.5.3 Condition on Ψ_1

第3章において，補間モデルの構成法として，基準モデルの既約分解を (3.4) 式のクラスの中から選ぶ方法を与えた．この節では，基準モデルの既約分解は (3.4) 式によって表わされるものが得られているとする．このとき，(2.10) 式を満たす既約分解の状態空間表現は，つぎの補題のようになる．なお，第3章で述べた補間モデルの構成法を用いず，何らかの方法で基準モデルの既約分解が得られているという状況の場合には，より一般的な既約分解に対して状態空間表現を与える方法が必要である．これに関しては，付録Gで述べている．

【補題 5.2】 (3.4) 式で表わされるの基準モデルの既約分解 $N_i, D_i \in RH_\infty$ に対して (2.10) 式を満たす $\tilde{N}_i, \tilde{D}_i, X_i, Y_i, \tilde{X}_i, \tilde{Y}_i \in RH_\infty$ の状態空間表現はつぎのように表される．

$$
\begin{aligned}
\tilde{N}_i &= \left[\begin{array}{c|c} A_{Li} & B_i \\ \hline C_i & 0 \end{array}\right], \quad \tilde{D}_i = \left[\begin{array}{c|c} A_{Li} & L_i \\ \hline -C_i & I \end{array}\right] \\
\tilde{X}_i &= \left[\begin{array}{c|c} A_{Fi} & L_i \\ \hline F_i & 0 \end{array}\right], \quad \tilde{Y}_i = \left[\begin{array}{c|c} A_{Fi} & L_i \\ \hline C_i & I \end{array}\right] \\
X_i &= \left[\begin{array}{c|c} A_{Li} & L_i \\ \hline J_i^{-1}F_i & 0 \end{array}\right], \quad Y_i = \left[\begin{array}{c|c} A_{Li} & B_i \\ \hline J^{-1}F_i & J^{-1} \end{array}\right]
\end{aligned}
\tag{5.18}
$$

ただし，A_{Li} は $A_i - L_iC_i$ を安定にする任意の行列である．

これらの状態空間表現を用いて，(5.9) 式，(5.10) 式の T_a, T_b を表わすことにより，つぎの式が得られる．

$$\begin{bmatrix} T_a - \beta E \\ T_b \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} A_\sharp & B_{\sharp 1} \\ \hline C_{\sharp 1} & J_{\sharp 1} - \beta E \\ C_{\sharp 2} & 0 \end{array}\right]$$

が得られる．ただし，

$$\begin{aligned}
A_\sharp &= \mathrm{diag}\{\ A_{\phi 12},\ A_{\phi 13},\ \cdots,\ A_{\phi 23},\ A_{\phi 24},\ \cdots,\ A_{\phi p-1,p}\ \} \\
B_{\sharp 1} &= \mathrm{diag}\{\ B_{\phi 12},\ B_{\phi 13},\ \cdots,\ B_{\phi 23},\ B_{\phi 24},\ \cdots,\ B_{\phi p-1,p} \\
C_{\sharp 1} &= [\ C_{\phi 12}\ \ C_{\phi 13}\ \ \cdots\ \ C_{\phi 23}\ \ C_{\phi 24}\ \ \cdots\ \ C_{\phi p-1,p}\ ] \\
C_{\sharp 2} &= [\ C_{\psi 12}\ \ C_{\psi 13}\ \ \cdots\ \ C_{\psi 23}\ \ C_{\psi 24}\ \ \cdots\ \ C_{\psi p-1,p}\ ] \\
J_{\sharp 1} &= [\ J_{\phi 12}\ \ J_{\phi 13}\ \ \cdots\ \ J_{\phi 23}\ \ J_{\phi 24}\ \ \cdots\ \ J_{\phi p-1,p}\ ] \\
A_{\phi ij} &= \begin{bmatrix} A_{Li} & A_{\varphi ij} & 0 & 0 \\ 0 & A_{Fj} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{Lj} & A_{\varphi ji} \\ 0 & 0 & 0 & A_{Fi} \end{bmatrix} \\
A_{\varphi ij} &= L_iC_j - B_iF_j \\
B_{\phi ij} &= [\ B_iJ_j\ \ B_jJ_j\ \ B_jJ_i\ \ B_iJ_i\ ]^T \\
C_{\phi ij} &= [\ J_i^{-1}F_i\ \ -J_i^{-1}F_j\ \ J_j^{-1}F_j\ \ -J_j^{-1}F_i\ ] \\
C_{\psi ij} &= \begin{bmatrix} & i\left\{\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \vdots & \vdots \\ C_i & -C_j & & \end{array}\right\} j & \\ & \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & C_j & -C_i \end{array} & \\ & \begin{array}{cccc} \vdots & \vdots & 0 & 0 \\ & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} & \end{bmatrix} \\
J_{\phi ij} &= J_i^{-1}J_j + J_j^{-1}J_i
\end{aligned}$$

である．このような状態空間表現の T_a, T_b に対して，

$$\|T_a - \beta E - RT_b\|_\infty < 2 + \beta$$

を満たす $R \in RH_\infty$ および $\beta \geq 0$ が存在するための必要十分条件を LMI（線形行列不等式）を用いて示す．それは，文献 [14] の結果より，

$$\begin{bmatrix} 0 \\ I \\ 0 \end{bmatrix}^{\perp} \times \begin{bmatrix} A_\sharp P + PA_\sharp^T & PC_{\sharp 1}^T & B_{\sharp 1} \\ C_{\sharp 1}P & -(2+\beta)I & J_{\sharp 1} - \beta E \\ B_{\sharp 1}^T & J_{\sharp 1}^T - \beta E^T & -(2+\beta)I \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ I \\ 0 \end{bmatrix}^{\perp T} < 0 \tag{5.19}$$

$$\begin{bmatrix} C_{\sharp 2}^T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^{\perp} \times \begin{bmatrix} QA_\sharp + A_\sharp^T Q & QB_{\sharp 1} & C_{\sharp 1}^T \\ B_{\sharp 1}^T Q & -(2+\beta)I & J_{\sharp 1}^T - \beta E^T \\ C_{\sharp 1} & J_{\sharp 1} - \beta E & -(2+\beta)I \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} C_{\sharp 2}^T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^{\perp T} < 0 \tag{5.20}$$

$$\begin{bmatrix} P & I \\ I & Q \end{bmatrix} \geq 0 \tag{5.21}$$

を満たす $P > 0, Q > 0$ が存在することである．ただし，$\perp$ は文献 [15] で定義された直交補空間を表す．

上の (5.19) 式において

$$\begin{bmatrix} 0 \\ I \\ 0 \end{bmatrix}^{\perp} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

とできることから，(5.19) 式は

$$\begin{bmatrix} A_\sharp P + PA_\sharp^T & B_{\sharp 1} \\ B_{\sharp 1}^T & -(2+\beta)I \end{bmatrix} < 0 \tag{5.22}$$

となる．(5.20) 式，(5.21) 式，(5.22) 式は，P, Q, β に関して線形であるので，容易に解を求めることができる．さらに，(5.21) 式と (5.22) 式はそれぞれ，

$$P \geq Q^{-1} > 0 \tag{5.23}$$

$$A_\sharp P + PA_\sharp^T + \frac{1}{2+\beta} B_{\sharp 1} B_{\sharp 1}^T < 0 \tag{5.24}$$

と等価である．$A_\sharp$ が安定であることより，ある定まった Q, β に対して，(5.23) 式，(5.24) 式を満たす $P > 0$ は必ず存在する．この意味で，上で得られた LMI において，解 P の存在性はほぼ自

明であり，(5.20) 式を満たす $Q > 0, \beta \geq 0$ の存在条件が実質的な安定化可能条件となっている．これをつぎの定理としてまとめる．

【定理 5.3】 (5.20) 式を満たす $Q > 0, \beta \geq 0$ が存在すれば，補間モデル $G(\alpha_1, \cdots, \alpha_p)$ を安定化する補間コントローラ $K(\alpha_1, \cdots, \alpha_p)$ が存在する．

解が存在した場合，文献 [15] に示される方法を用いることにより，(5.12) 式を満たす R の状態空間表現を得ることができる．

以上では，補間コントローラの存在条件を LMI で表し，その解を用いて補間コントローラが得られることを述べた．定理 5.2 の固定コントローラの場合についても同様である．

5.6 数値例

ここでは，補間コントローラの構成の数値例を示す．基準モデルがそれぞれ

$$
\begin{aligned}
G_1 &= \frac{1}{(s-1)(s+1)}, \quad G_2 = \frac{1}{(s-2)(s+1)} \\
G_3 &= \frac{1}{(s-1)(s-2)}
\end{aligned}
$$

であるとし，それらの既約分解がつぎのように与えられているとする．

$$
\begin{aligned}
&\tilde{N}_1 = \tilde{N}_2 = \tilde{N}_3 = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\
&\tilde{D}_1 = \frac{s-1}{s+2}, \quad \tilde{D}_2 = \frac{s-2}{s+2}, \quad \tilde{D}_3 = \frac{s^2-3s+2}{(s+1)(s+2)}
\end{aligned}
$$

これらに対して (2.10) 式を満たす $N_i, D_i, X_i, Y_i, \tilde{X}_i, \tilde{Y}_i$ $(i = 1,2,3)$ を，

$$
N_i = \tilde{N}_i, \quad D_i = \tilde{D}_i, \quad i = 1,2,3
$$

$$
X_1 = \tilde{X}_1 = \frac{18}{s+2}, \quad X_2 = \tilde{X}_2 = \frac{48}{s+2}, \quad X_3 = \tilde{X}_3 = \frac{108s-72}{(s+1)(s+2)}
$$

$$
Y_1 = \tilde{Y}_1 = \frac{s^2+6s+14}{(s+1)(s+2)}, \quad Y_2 = \tilde{Y}_2 = \frac{s^2+7s+22}{(s+1)(s+2)}, \quad Y_3 = \tilde{Y}_3 = \frac{s^2+9s+38}{(s+1)(s+2)}
$$

と選ぶ．このとき (5.2) 式の補間モデル $G(\alpha_1, \cdots, \alpha_p)$ は，つぎのようになる．

$$
G(\alpha_1, \cdots, \alpha_3) = \frac{1}{s^2 - (\alpha_2 + 3\alpha_3)s - \alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\alpha_3}
$$

上記の既約分解の状態空間表現を求め，数値計算ツールを用いることにより，(5.19) 式，(5.21) 式，(5.22) 式の LMI を満たす $P > 0$（最小固有値 0.66), $Q > 0$（最小固有値 4.60），$\beta(= 5.18)$ が得られる．さらに文献 [15] の結果と適当な低次元化により，コントローラのパラメータ行列 R_1，R_2，R_3 を求めたものはつぎのとおりである．

$$R_1 = \frac{R_{n1}}{R_d},\ R_2 = \frac{R_{n2}}{R_d},\ R_3 = \frac{R_{n3}}{R_d}$$

$$R_d = 5.54s^3 + 28.7s^2 + 22.8s + 1.36$$

$$R_{n1} = -1.97s^3 + 25.5s^2 - 22.2s + 10.2$$

$$R_{n2} = -6.45s^3 - 12.0s^2 + 14.3s - 13.0$$

$$R_{n3} = 3.65s^3 + 100s^2 - 99.2s - 179$$

これらの R_i $(i = 1, \cdots, 3)$ により，つぎのような補間コントローラ $K(\alpha_1, \cdots, \alpha_p)$ が得られる．

$$K = \frac{K_n}{K_d}$$

ただし，

$$\begin{aligned} K_n &= \{(18\alpha_1 + 48\alpha_2 + 108\alpha_3)s + 18\alpha_1 + 48\alpha_2 - 72\alpha_3\}R_d + \alpha_1(s^2 - 1)R_{n1} \\ &\quad + \alpha_2(s^2 - s - 2)R_{n2} + \alpha_3(s^2 - 3s + 2)R_{n3} \\ K_d &= \{s^2 + (6\alpha_1 + 7\alpha_2 + 9\alpha_3)s + 14\alpha_1 + 22\alpha_2 + 38\alpha_3\}R_d \\ &\quad - \alpha_1 R_{n1} - \alpha_2 R_{n2} - \alpha_3 R_{n3} \end{aligned}$$

である．

5.7 結言

本章では多入力多出力の補間モデルを，基準モデルの数を2つだけでなく，2つ以上の複数として定義した．そして，この補間モデルに対する補間および固定のコントローラによる安定化問題を考察し，制御系を安定化する補間および固定コントローラが存在するための十分条件を，ある種の H_∞ 制御問題に帰着させることによって与えた．そして，この条件を状態空間における LMI を用いた条件として表現し，コントローラの構成法を示した．

第 6 章

補間モデル集合の安定化問題

6.1 緒言

制御対象の動特性やその変化の仕方によっては，すべての動作点である 1 つの補間モデルが充分な近似になるとは限らない．このような制御対象の安定化を考えるために，本章では，ある 1 つのノミナルモデルを覆うような補間モデルの集合を導入する．そして，この集合の中に制御対象の動特性が含まれると考え，この補間モデル集合の要素すべてを安定化する問題を考える [27, 29]．補間モデルの集合としては，基準モデルごとに既約分解のある集合を考え，それらの集合間を線形補間して得られるものとする．このような補間モデルの集合の要素すべてを，補間と固定のコントローラで安定化する問題を考察し，それらがある種の H_∞ 制御問題に帰着できることを示す．そして，これにより得られる s 領域の安定化可能条件を，基準モデルの既約分解の状態空間表現を用いて，LMI（線形行列不等式）の形に表わす．

なお本章では，制御対象は多入力多出力とし，補間モデルの基準モデルの数は 2 つとする．

6.2 問題設定

第 3 章では，補間モデルのある動作点において制御対象の動特性を近似するような既約分解の求め方を与えた．このような最適な既約分解は，近似を考える動作点ごとに異なるであろう．それらがそれほど違わない場合は，1 つの補間モデルを対象に安定化問題を考えればよいが，そうでない場合は，既約分解の集合によって決まる補間モデルの集合を考える必要がある．そこで本章では，基準モデルごとに以下で述べるような既約分解の集合を定義し，それらの集合の要素を補間して得られるモデルの集合を考える．制御対象の動特性はこの補間モデルの集合に含まれるとして，補間モデルの集合の要素すべてを安定化する問題を考える．

まず，補間モデル集合を構成する基準モデルの既約分解のクラスを定義する．すでに述べたよ

うに基準モデル G_i $(i = 1,2)$ の既約分解は一意ではない．そのすべては，ある1つの既約分解 (N_i, D_i), $i = 1,2$,（この既約分解をノミナルな既約分解と呼ぶ）を用いて，

$$G_i = (N_i U_i)(D_i U_i)^{-1}$$

と表わされる．ここで U_i は RH_∞ 上のユニモジュラ行列である．本章では補間モデル集合を定義するため，U_i $(i = 1,2)$ のクラスを，ある非負数 δ に対して，

$$\|U_i - I\|_\infty \leq \delta < 1\ , \quad i = 1,2 \tag{6.1}$$

を満たすものとする．そして，これを満たす任意の U_i から得られる既約分解の集合の要素を補間としたものとして，つぎのような補間モデルによってつくられる集合を補間モデル集合と定義する．

$$\begin{aligned} &G_u(\alpha) = N_u(\alpha) D_u^{-1}(\alpha) \\ &\quad \begin{cases} N_u(\alpha) = \alpha N_1 U_1 + (1-\alpha) N_2 U_2 \\ D_u(\alpha) = \alpha D_1 U_1 + (1-\alpha) D_2 U_2 \end{cases} \\ &\quad 0 \leq \alpha \leq 1 \end{aligned} \tag{6.2}$$

$\alpha = 1,0$ のときには，$G_u(\alpha)$ は G_1, G_2 であり，これらの点では (2.2) 式の $G(\alpha)$ と一致する．(6.1) 式を満たす U_i を導入することにより，$0 < \alpha < 1$ において，$G_u(\alpha)$ の集合は，$G(\alpha)$ を含み，かつ δ によって決まる大きさで $G(\alpha)$ のまわりを覆うモデル集合となる．すなわち，$\delta = 0$ のときは，$U_i = I$ で $G_u(\alpha) = G(\alpha)$ であり，$\delta > 0$ のときは，大きな δ によって定義された $G_u(\alpha)$ の集合が，小さな δ によって定義された $G_u(\alpha)$ の集合を含む．なお，ノミナルな既約分解 N_i, D_i $(i = 1,2)$ を補間して得られる補間モデル，すなわち，$U_i = I$ $(i = 1,2)$ のときの $G_u(\alpha)$ をノミナルな補間モデルと呼ぶことにする．

（注意 6.1） (6.2) 式を用いて表わされる補間モデル集合を定義するとき，ノミナルな既約分解 (N_i, D_i), $i = 1,2$, をいかに選ぶかが問題となる．本章では，ノミナルな既約分解 (N_i, D_i), $i = 1,2$, は何らかの方法によって与えられていると仮定するが，それらの選び方の1つとして，第3章で述べた方法をある重要な動作点に対して用いることが考えられる．

本章の目的は，(6.2) 式の補間モデルの集合のすべての要素に対して，α の値にかかわらず制御系が安定になるような，補間コントローラおよび固定のコントローラの存在条件と構成法を求めることである．

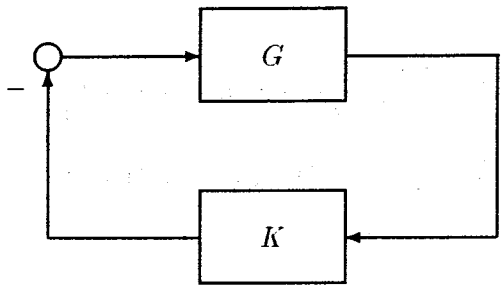

Fig.6.1 Closed-loop system

6.3 補間コントローラによる安定化

制御対象の変化を表わすパラメータ α の値を知ることができる場合には，第2章の (2.8) 式の補間コントローラを用いることが考えられる．この節では，(2.8) 式の補間コントローラによって (6.2) 式の補間モデル集合を安定化する問題を考察する．

Fig.6.1 における制御対象 G の動特性は，(6.1) 式と (6.2) 式の $G_u(\alpha)$ によって決まる補間モデルの集合に含まれるものとする．また，図におけるコントローラ K として，(2.8) 式の補間コントローラを用いるものとする．制御対象とコントローラがそれぞれ $G_u(\alpha) = N_u(\alpha)D_u(\alpha)^{-1}$, $K(\alpha) = \tilde{D}_K(\alpha)^{-1}\tilde{N}_K(\alpha)$ と表わされるとき，Fig.6.1 の制御系が安定であるための必要十分条件は，

$$\Omega(\alpha) = \tilde{D}_K(\alpha)D_u(\alpha) + \tilde{N}_K(\alpha)N_u(\alpha)$$

が RH_∞ 上のユニモジュラとなることである [19, 45]．この $\Omega(\alpha)$ は，(6.2) 式，(2.8) 式，(2.9) 式および (2.10) 式より，

$$\Omega(\alpha) = \alpha^2 U_1 + (1-\alpha)^2 U_2 + \alpha(1-\alpha)\Phi_1 U_2 + \alpha(1-\alpha)\Phi_2 U_1 \tag{6.3}$$

となる．ただし，

$$\begin{aligned} &\Phi_1 = T_{a1} + R_1 T_{b1}\ , \quad \Phi_2 = T_{a2} + R_2 T_{b2} \\ &T_{a1} = X_1 N_2 + Y_1 D_2\ , \quad T_{a2} = X_2 N_1 + Y_2 D_1 \\ &T_{b1} = \tilde{D}_1 N_2 - \tilde{N}_1 D_2\ , \quad T_{b2} = \tilde{D}_2 N_1 - \tilde{N}_2 D_1 \end{aligned} \tag{6.4}$$

である．

この節の目的は $\Omega(\alpha)$ がユニモジュラとなるような補間コントローラの存在条件を求めることであるが，(6.3) 式より $\alpha = 0, 1$ では $\Omega(\alpha)$ がユニモジュラとなることは保証されているので，

$\alpha \in (0,1)$ における条件を考察する．よりゆるい十分条件を得るために非負の実数 β_i $(i=1,2)$ を導入して，(6.3) 式を

$$\begin{aligned}\Omega(\alpha) &= \alpha(1-\alpha)\{(\frac{\alpha^2+(1-\alpha)^2}{\alpha(1-\alpha)}+\beta_1+\beta_2)I+(\frac{\alpha}{1-\alpha}+\beta_2)(U_1-I)\\ &\quad+(\frac{1-\alpha}{\alpha}+\beta_1)(U_2-I)+(\Phi_1-\beta_1 I)+(\Phi_1-\beta_1 I)(U_2-I)\\ &\quad+(\Phi_2-\beta_2 I)+(\Phi_2-\beta_2 I)(U_1-I)\}\end{aligned}$$

と書き換える．これと (6.1) 式より，

$$\begin{aligned}\frac{\alpha^2+(1-\alpha)^2}{\alpha(1-\alpha)}+\beta_1+\beta_2 &> (\frac{\alpha}{1-\alpha}+\beta_2)\delta+(\frac{1-\alpha}{\alpha}+\beta_1)\delta\\ &\quad+\|\Phi_1-\beta_1 I\|_\infty+\|\Phi_2-\beta_2 I\|_\infty\\ &\quad+\|\Phi_1-\beta_1 I\|_\infty\delta+\|\Phi_2-\beta_2 I\|_\infty\delta\end{aligned}$$

であれば，$\Omega(\alpha)$ はユニモジュラとなる．さらにこの不等式は

$$\begin{aligned}\frac{\alpha^2+(1-\alpha)^2}{\alpha(1-\alpha)}(1-\delta) &> (\delta-1)\beta_1+(\delta-1)\beta_2\\ &\quad+\|\Phi_1-\beta_1 I\|_\infty(1+\delta)+\|\Phi_2-\beta_2 I\|_\infty(1+\delta)\end{aligned} \tag{6.5}$$

と変形できる．ここで，

$$\frac{\alpha^2+(1-\alpha)^2}{\alpha(1-\alpha)} \geq 2\ ,\quad \forall\alpha\in(0,1)$$

であることから，

$$\begin{aligned}2(1-\delta) &> (\delta-1)\beta_1+(\delta-1)\beta_2\\ &\quad+\|\Phi_1-\beta_1 I\|_\infty(1+\delta)+\|\Phi_2-\beta_2 I\|_\infty(1+\delta)\end{aligned} \tag{6.6}$$

が成り立てば，α の値にかかわらず (6.5) 式が成り立つ．これより，つぎの定理が得られる．

【定理 6.1】

$$2(1-\delta) > (\delta-1)\beta_1+(\delta-1)\beta_2+\gamma_1(1+\delta)+\gamma_2(1+\delta) \tag{6.7}$$

$$\|\Phi_1-\beta_1 I\|_\infty \leq \gamma_1\ ,\quad \|\Phi_2-\beta_2 I\|_\infty \leq \gamma_2 \tag{6.8}$$

を成立させる $\beta_i \geq 0$, $\gamma_i > 0$ および (6.4) 式の $R_i \in RH_\infty$ $(i=1,2)$ が存在すれば，(6.1) 式の U_i $(i=1,2)$ から得られる (6.2) 式の補間モデル $G_u(\alpha)$ のすべてを安定化する (2.8) 式の補間コント

ローラ $K(\alpha)$ が存在する.

(6.4) 式の T_{ai}, T_{bi} $(i=1,2)$ は基準モデル G_i $(i=1,2)$ の既約分解によって決まる伝達関数行列であることから, (6.8) 式を成立させる $R_i \in RH_\infty$ の存在性は H_∞ 制御問題の可解性によって判定できる. 定理 6.1 の条件を (6.6) 式ではなく, それと等価な (6.7) 式, (6.8) 式の表現にしているのは, そのほうが H_∞制御問題として考えやすいからである. なお, (6.4) 式の T_{ai}, T_{bi} $(i=1,2)$ の定義における X_i, Y_i, $\tilde{N}_i$, $\tilde{D}_i$ $(i=1,2)$ は一意なものではないが, その自由度は $R_i \in RH_\infty$ によって吸収され, 解の存在性には影響しないことは, 第 5 章の (注意 5.5) と同様に示すことができる.

(注意 6.2) ノミナルな既約分解を補間したモデル $G(\alpha)$ に対する補間コントローラによる安定化可能条件は, 第 5 章において $p=2$ の場合の (5.12) 式により,

$$\|\Phi_1+\Phi_2-\beta I\|_\infty < \beta+2 \tag{6.9}$$

と得られる. (6.1) 式において $\delta=0$ のとき, つまり $U_i=I$ $(i=1,2)$, $G_u(\alpha)=G(\alpha)$ であるとき, 定理 6.1 の条件 (6.7) 式, (6.8) 式と等価な (6.6) 式は

$$\|\Phi_1-\beta_1 I\|_\infty + \|\Phi_2-\beta_2 I\|_\infty < \beta_1+\beta_2+2$$

となる. これは, (6.9) 式を Φ_1 と Φ_2 に関して分離したものと考えることができる.

定理 6.1 における安定化可能条件のパラメータ β_i, γ_i $(i=1,2)$ を, 特に $\beta_1=\beta_2 \triangleq \beta$, $\gamma_1=\gamma_2 \triangleq \gamma$ とした場合, (6.7) 式と (6.8) 式は,

$$\gamma < \frac{1-\delta}{1+\delta}(\beta+1)$$
$$\|\Phi_i-\beta I\|_\infty \le \gamma\ ,\quad i=1,2$$

と書ける. これより, つぎの系が得られる.

【系 6.1】

$$\|\Phi_i-\beta I\|_\infty < \frac{1-\delta}{1+\delta}(\beta+1)\ ,\quad i=1,2 \tag{6.10}$$

を成立させる $\beta \ge 0$ と $R_i \in RH_\infty$ $(i=1,2)$ が存在すれば, (6.1) 式の U_i $(i=1,2)$ から得られる (6.2) 式の補間モデル $G_u(\alpha)$ のすべてを安定化する (2.8) 式の補間コントローラ $K(\alpha)$ が存在する.

(注意 6.3) 制御対象を 1 入力 1 出力とした場合, (6.10) 式の条件は, $\Phi_i(j\omega)$ $(i=1,2)$ が Fig.6.2 における円のいずれかの内部に入ることを意味する. 円の中心は $(\beta,0)$, 半径は $\frac{1-\delta}{1+\delta}(\beta+1)$ である.

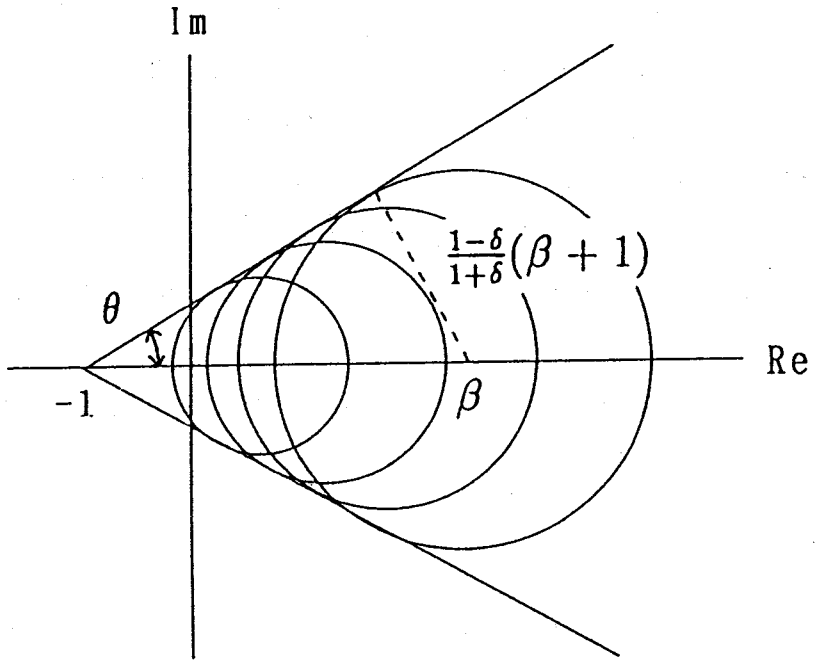

Fig.6.2 Condition on Φ_i

円の包絡線のなす角度 θ は (6.1) 式の δ によって決まり，$\theta = \sin^{-1}\frac{1-\delta}{1+\delta}$ である．$\delta \to 0$ のとき，θ はその上限 $\pi/2$ に近づく．さらに，$\beta \to \infty$ とすれば，(6.10) 式の条件は，$\mathrm{Re}(\Phi_i(j\omega)+1) > 0$ $(i = 1, 2)$ に近づく．$\delta \to 1$ のときは，$\theta \to 0$ となり，(6.10) 式を満たす Φ_i は存在しない．

6.4 固定コントローラによる安定化

制御対象の変化を表わすパラメータ α の値を知ることができない場合には，補間コントローラを用いることはできず，固定コントローラによって安定化を行うしかない．固定コントローラ K が補間モデル $G_u(\alpha)$ を安定化するためには，少なくとも基準モデル G_1 を安定化することが必要である．したがって，まず固定コントローラ K を，G_1 に対する安定化コントローラの一般形 [45] を用いて

$$K = K_1 = \tilde{D}_{K1}^{-1}\tilde{N}_{K1}$$
$$\begin{cases} \tilde{N}_{K1} = X_1 + R_1\tilde{D}_1 \\ \tilde{D}_{K1} = Y_1 - R_1\tilde{N}_1 \ , \quad R_1 \in RH_\infty \end{cases} \tag{6.11}$$

と表わす．ただし，$R_1 \in RH_\infty$ は

$$\Omega_1(\alpha) = \tilde{D}_{K1}D(\alpha) + \tilde{N}_{K1}N(\alpha)$$

が RH_∞ 上のユニモジュラとなるように求めるものである．

この $\Omega_1(\alpha)$ は，(6.2) 式, (2.10) 式および (6.11) 式より，

$$\Omega_1(\alpha) = \alpha U_1 + (1-\alpha)\Phi_1 U_2$$

と書き換えられ，さらに正数 β_1 を導入することにより，

$$\begin{aligned}\Omega_1(\alpha) &= \alpha I + (1-\alpha)\beta_1 I + \alpha(U_1 - I) + (1-\alpha)\beta_1(U_2 - I) \\ &\quad + (1-\alpha)(\Phi_1 - \beta_1 I)(U_2 - I) + (1-\alpha)(\Phi_1 - \beta_1 I)\end{aligned}$$

と表わすことができる．これより，

$$\begin{aligned}\alpha + (1-\alpha)\beta_1 &> \alpha\|U_1 - I\|_\infty + (1-\alpha)\beta_1\|U_2 - I\|_\infty \\ &\quad +(1-\alpha)\|\Phi_1 - \beta_1 I\|_\infty\|U_2 - I\|_\infty \\ &\quad +(1-\alpha)\|\Phi_1 - \beta_1 I\|_\infty\end{aligned}$$

であれば，$\Omega_1(\alpha)$ が RH_∞上のユニモジュラとなる．この不等式の両辺は α に関して一次式なので，$\alpha = 0$ と $\alpha = 1$ において成り立てば，すべての $\alpha \in [0,1]$ に対して成り立つ．$\alpha = 0$ のとき

$$\beta_1 > \beta_1\|U_2 - I\|_\infty + \|\Phi_1 - \beta_1 I\|_\infty\|U_2 - I\|_\infty + \|\Phi_1 - \beta_1 I\|_\infty \tag{6.12}$$

であり，$\alpha = 1$ のとき

$$1 > \|U_1 - I\|_\infty \tag{6.13}$$

となる．(6.1) 式より (6.13) 式は成立しており，(6.12) 式は

$$\beta_1 > \beta_1\delta + \|\Phi_1 - \beta_1 I\|_\infty\delta + \|\Phi_1 - \beta_1 I\|_\infty$$

であれば成り立つ．これよりつぎの定理が得られる．

【定理 6.2】

$$\|\Phi_1 - \beta_1 I\|_\infty < \frac{1-\delta}{1+\delta}\beta_1 \tag{6.14}$$

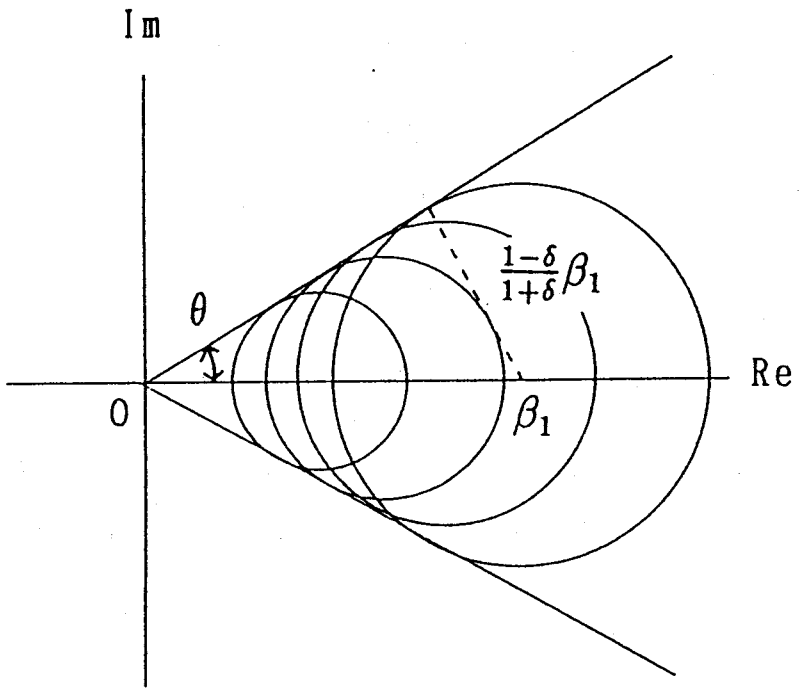

Fig.6.3 Condition on Φ_1

を成立させる $\beta_1 > 0$ と $R_1 \in RH_\infty$ が存在すれば，(6.1) 式の U_i $(i = 1, 2)$ から得られる (6.2) 式の補間モデル $G_u(\alpha)$ のすべてを安定化する固定コントローラ K が存在する．

（注意 6.4） (6.1) 式で $\delta = 0$ のとき，つまり $G_u(\alpha) = G(\alpha)$ であるとき，(6.14) 式は $\|\Phi_1 - \beta_1 I\|_\infty < \beta_1$ となる．これは，第5章で $p = 2$ としたときの固定コントローラによる安定化可能条件，すなわち，$p = 2$ のときの (5.17) 式と一致する．

（注意 6.5） 制御対象を1入力1出力とした場合，(6.14) 式の条件は，$\Phi_1(j\omega)$ が Fig.6.3 の円のいずれかの内部に入ることを意味する．円の中心は $(\beta_1, 0)$，半径は $\frac{1-\delta}{1+\delta}\beta_1$ であり，円の包絡線のなす角度 θ は (6.1) 式の δ によって決まり，$\theta = \sin^{-1}\frac{1-\delta}{1+\delta}$ となる．$\delta \to 0$ のとき $\beta_1 \to \infty$ とすると，(6.14) 式の条件は $\mathrm{Re}(\Phi_1(j\omega)) > 0$ に近づく．

6.5 LMI を用いた安定化可能条件とコントローラの設計

(6.2) 式の補間モデル $G_u(\alpha)$ を安定化する補間および固定コントローラの存在条件は，定理 6.1, 6.2 および系 6.1 で示したような H_∞制御問題に帰着される．これらは第5章の定理 5.1, 5.2 と同様に一般の場合の H_∞制御問題と異なり，例えば定理 6.1 では，(6.7) 式と (6.8) 式を成立させる

$R_i \in RH_\infty, \beta_i \geq 0$ および $\gamma_i > 0$ $(i = 1,2)$ を同時に求める問題となっている．このような問題に対しては，LMI（線形行列不等式）を用いた解法が有効である．この節では，定理 6.1 で得られた安定化可能条件を LMI を用いて状態空間で表現する．なお，記述の煩雑さを避けるために，基準モデル G_1, G_2 は厳密にプロパーであると仮定する．

まず，(6.8) 式における $\|\Phi_1 - \beta_1 I\|_\infty \leq \gamma_1$ は

$$\|T_{a1} - \beta_1 I + R_1 T_{b1}\|_\infty \leq \gamma_1 \tag{6.15}$$

である．ここで (6.4) 式における T_{a1}, T_{b1} の状態空間表現を求める．本章でも，前章と同様に，基準モデルの既約分解は (3.4) 式と (5.18) 式によって表わされるものとする．これらにより，$T_{a1} - \beta_1 I$, T_{b1} の状態空間表現は

$$\begin{bmatrix} T_{a1} - \beta_1 I \\ T_{b1} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \hat{A}_1 & \hat{B}_1 \\ \hline \hat{C}_{11} & \hat{J}_1 - \beta_1 I \\ \hat{C}_{12} & 0 \end{array}\right]$$

となる．ただし，

$$\begin{aligned}
\hat{A}_1 &= \begin{bmatrix} A_1 - L_1 C_1 & L_1 C_2 - B_1 F_2 \\ 0 & A_2 - B_2 F_2 \end{bmatrix} \\
\hat{B}_1 &= \begin{bmatrix} (B_1 J_2)^T & (B_2 J_2)^T \end{bmatrix}^T \\
\hat{C}_{11} &= \begin{bmatrix} J_1^{-1} F_1 & -J_1^{-1} F_2 \end{bmatrix} \\
\hat{C}_{12} &= \begin{bmatrix} -C_1 & C_2 \end{bmatrix}, \quad \hat{J}_1 = J_1^{-1} J_2
\end{aligned}$$

である．文献 [14] の結果を用いると，(6.15) 式を満たす $R_1 \in RH_\infty$ が存在するための必要十分条件は，

$$\begin{bmatrix} 0 \\ I \\ 0 \end{bmatrix}^{\perp} \cdot \begin{bmatrix} \hat{A}_1 P_1 + P_1 \hat{A}_1^T & P_1 \hat{C}_{11}^T & \hat{B}_1 \\ \hat{C}_{11} P_1 & -\gamma_1 I & \hat{J}_1 - \beta_1 I \\ \hat{B}_1^T & \hat{J}_1 - \beta_1 I & -\gamma_1 I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ I \\ 0 \end{bmatrix}^{\perp T} < 0 \tag{6.16}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{C}_{12}^T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^{\perp} \cdot \begin{bmatrix} Q_1 \hat{A}_1 + \hat{A}_1^T Q_1 & Q_1 \hat{B}_1 & \hat{C}_{11}^T \\ \hat{B}_1^T Q_1 & -\gamma_1 I & \hat{J}_1 - \beta_1 I \\ \hat{C}_{11} & \hat{J}_1 - \beta_1 I & -\gamma_1 I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{C}_{12}^T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^{\perp T} < 0 \tag{6.17}$$

$$\begin{bmatrix} P_1 & I \\ I & Q_1 \end{bmatrix} \geq 0 \tag{6.18}$$

を満たす $P_1 > 0, Q_1 > 0$ が存在することである．ただし，$\perp$ は文献 [15] で定義された直交補空間を表わす．ここで，

$$\begin{bmatrix} 0 \\ I \\ 0 \end{bmatrix}^{\perp} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

とできるので，上の (6.16) 式は，

$$\begin{bmatrix} \hat{A}_1 P_1 + P_1 \hat{A}_1^T & \hat{B}_1 \\ \hat{B}_1^T & -\gamma_1 I \end{bmatrix} < 0 \tag{6.19}$$

となる．

(6.8) 式の Φ_2 についての条件も，(6.17) 式，(6.18) 式および (6.19) 式と同様な不等式における $P_2 > 0, Q_2 > 0$ の存在性として書き表わすことができる．すなわち，$T_{b2} - \beta_2 I, T_{b2}$ の状態空間表現を

$$\begin{bmatrix} T_{a2} - \beta_2 I \\ T_{b2} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \hat{A}_2 & \hat{B}_2 \\ \hline \hat{C}_{21} & \hat{J}_2 - \beta_2 I \\ \hat{C}_{22} & 0 \end{array}\right]$$

$$\hat{A}_2 = \begin{bmatrix} A_2 - L_2 C_2 & L_2 C_1 - B_2 F_1 \\ 0 & A_1 - B_1 F_1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{B}_2 = \begin{bmatrix} (B_2 J_1)^T & (B_1 J_1)^T \end{bmatrix}^T$$

$$\hat{C}_{21} = \begin{bmatrix} J_2^{-1} F_2 & -J_2^{-1} F_1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{C}_{22} = \begin{bmatrix} -C_2 & C_1 \end{bmatrix}, \quad \hat{J}_2 = J_2^{-1} J_1$$

とすれば，(6.17) 式，(6.18) 式と (6.19) 式に対応する式がそれぞれ，

$$\begin{bmatrix} \hat{C}_{22}^T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^{\perp} \cdot \begin{bmatrix} Q_2 \hat{A}_2 + \hat{A}_2^T Q_2 & Q_2 \hat{B}_2 & \hat{C}_{21}^T \\ \hat{B}_2^T Q_2 & -\gamma_2 I & \hat{J}_2 - \beta_2 I \\ \hat{C}_{21} & \hat{J}_2 - \beta_2 I & -\gamma_2 I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{C}_{22}^T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^{\perp T} < 0 \tag{6.20}$$

$$\begin{bmatrix} P_2 & I \\ I & Q_2 \end{bmatrix} \geq 0 \tag{6.21}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{A}_2 P_2 + P_2 \hat{A}_2^T & \hat{B}_2 \\ \hat{B}_2^T & -\gamma_2 I \end{bmatrix} < 0 \tag{6.22}$$

と得られる．

(6.17) 式 ~ (6.22) 式および (6.7) 式は，$P_i > 0, Q_i > 0, \beta_i, \gamma_i$ $(i = 1,2)$ に関する LMI となっているので，容易に解を求めることができる．

ところで，(6.18) 式，(6.21) 式と (6.19) 式，(6.22) 式は，それぞれ

$$P_i > Q_i^{-1} > 0 \tag{6.23}$$

$$\hat{A}_i P_i + P_i \hat{A}_i^T + \frac{1}{\gamma_i}\hat{B}_i \hat{B}_i^T < 0\ , \quad i = 1,2 \tag{6.24}$$

と等価である．$\hat{A}_i$ $(i = 1,2)$ が安定であるので，ある定まった Q_i, γ_i $(i = 1,2)$ に対して (6.23) 式と (6.24) 式を満たす $P_i > 0$ $(i = 1,2)$ は必ず存在する．この意味で，上で得られた LMI において P_i $(i = 1,2)$ の存在性は明らかであり，(6.17) 式と (6.20) 式と (6.7) 式を満たす Q_i, β_i, γ_i $(i = 1,2)$ の存在性が本質的な安定化可能条件となっている．これをつぎの定理としてまとめる．

【定理 6.3】 (6.17) 式，(6.20) 式と (6.7) 式を満たす Q_i, β_i, γ_i $(i = 1,2)$ が存在すれば，(6.1) 式の U_i $(i = 1,2)$ から得られる (6.2) 式の補間モデル $G_u(\alpha)$ のすべてを安定化する (2.8) 式の補間コントローラ $K(\alpha)$ が存在する．

LMI の解 $P_i > 0, Q_i > 0, \beta_i, \gamma_i$ $(i = 1,2)$ が存在するとき，文献 [14] で与えられた方法を用いることにより，$R_i \in RH_\infty$ $(i = 1,2)$ の状態空間表現を得ることができ，補間コントローラ $K(\alpha)$ を構成できる．

(注意 6.6) 本節では，定理 6.1 で与えられた補間コントローラの存在条件を LMI で表わし，その解を用いて補間コントローラが得られることを述べた．系 6.1，定理 6.2 の場合についても同様である．

6.6 数値例

前節では定理 6.1 の結果を LMI を用いて状態空間で表現した．この節では，これを適用した数値例を示す．

基準モデルはそれぞれ

$$G_1 = \frac{1}{(s-1)(s+1)}$$

$$G_2 = \frac{1}{(s-1)(s-2)}$$

であるとし，それらの既約分解がつぎのように与えられているとする．

$$N_1 = N_2 = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

$$D_1 = \frac{s-1}{s+2}\ ,\quad D_2 = \frac{(s-1)(s-2)}{(s+1)(s+2)}$$

これらに対して(2.10)式を満たす $\tilde{N}_i, \tilde{D}_i, X_i, Y_i, \tilde{X}_i, \tilde{Y}_i\ (i=1,2)$ を,

$$\begin{aligned}
&\tilde{N}_i = N_i\ ,\quad \tilde{D}_i = D_i\ ,\quad i=1,2\\
&X_1 = \tilde{X}_1 = \frac{18}{s+2}\ ,\quad X_2 = \tilde{X}_2 = \frac{108s-72}{(s+1)(s+2)}\\
&Y_1 = \tilde{Y}_1 = \frac{s^2+6s+14}{(s+1)(s+2)}\ ,\quad Y_2 = \tilde{Y}_2 = \frac{s^2+9s+38}{(s+1)(s+2)}
\end{aligned}$$

とする.

これらの既約分解について, ある δ に対して, (6.17)式～(6.22)式および(6.7)式からなるLMIの解 $P_i, Q_i, \beta_i, \gamma_i\ (i=1,2)$ を求める. そして, これらの解を用いてコントローラのパラメータ行列 R_1, R_2 を得る.

まず, $\delta=0$ のとき, つまり, $G_u(\alpha)=G(\alpha)$ のときは, LMIの解として, $\beta_1=25.83, \gamma_1=27.17, \beta_2=25.56, \gamma_2=25.84$, および $\lambda_{min}(P_1)=11.27>0, \lambda_{min}(Q_1)=0.4565>0, \lambda_{min}(P_2)=11.14>0, \lambda_{min}(Q_2)=0.0450>0$ であるような $P_i, Q_i\ (i=1,2)$ が得られる (λ_{min} は最小固有値を表わす). これらを用いて R_1, R_2 を求めたものはつぎのとおりである.

$$\begin{aligned}
R_1 &= \frac{-20.16s^3-120.2s^2-265.4s-127.2}{s^3+5.569s^2+19.12s+11.13}\\
R_2 &= \frac{-98.57s^3-913.4s^2-3615s-6900}{s^3+10.37s^2+55.33s+182.5}
\end{aligned}$$

$\delta=0.1$ のときは, $\beta_1=4.069, \gamma_1=4.275, \beta_2=4.411, \gamma_2=4.120, \lambda_{min}(P_1)=117.2>0, \lambda_{min}(Q_1)=0.208>0, \lambda_{min}(P_2)=113.6>0, \lambda_{min}(Q_2)=0.0318>0$ となり, R_1, R_2 は,

$$\begin{aligned}
R_1 &= \frac{-56.63s^3-380.5s^2-985.6s-493.1}{s^3+9.038s^2+58.29s+45.76}\\
R_2 &= \frac{-137.3s^3-1367s^2-5929s-10490}{s^3+11.16s^2+96.86s+270.1}
\end{aligned}$$

となる.

また, $\delta=0.3$ のときは, $\beta_1=1.348, \gamma_1=1.320, \beta_2=1.794, \gamma_2=1.315, \lambda_{min}(P_1)=105.8>0, \lambda_{min}(Q_1)=0.127>0, \lambda_{min}(P_2)=106.0>0, \lambda_{min}(Q_2)=0.0165>0$ が得られ, R_1, R_2 は,

$$\begin{aligned}
R_1 &= \frac{-71.04s^3-484.0s^2-1236s-821.7}{s^3+9.928s^2+69.61s+65.35}\\
R_2 &= \frac{-171.1s^3-1825s^2-8382s-15920}{s^3+13.05s^2+126.4s+420.7}
\end{aligned}$$

となる.

$\delta = 0.5$ のときは，LMI の解は存在しない.

(注意 6.7)　この例で得られた $\delta = 0,\ 0.1,\ 0.3$ のときの $\beta_i, \gamma_i\ (i = 1, 2)$ の値を，それぞれ (6.8) 式に代入して得られる条件は，δ の値が小さいほどゆるいものとなっている.

6.7 結言

既約分解の自由度から決まる補間モデルの集合を定義し，これに対する安定化問題を定式化した．そして，制御系を安定化する補間と固定のコントローラが存在するための十分条件を示し，これを LMI を用いて状態空間で表現して，コントローラの構成法を与えた．補間モデルの集合の要素すべてを安定化することによって，実際問題への適用が現実的となった.

第7章

2自由度ロバストサーボ系の設計

7.1 緒言

第4章から第6章では，補間モデルで表わされる制御対象を安定化する問題について考察した．しかし，一般に制御系設計においては，安定化だけでなく目標値応答などの制御特性を向上させることも望まれる．そこで本章では，補間モデルによって表わされる制御対象に対して，制御量を定常偏差なくステップ状の目標値に追従させるロバストサーボ系を設計することを考える．制御系は2自由度構成とし，フィードバック要素とフィードフォワード要素のそれぞれを補間を用いて構成することを考え，それらが満たすべき条件と設計法を示す [41].

7.2 ロバストサーボ問題

動作環境によって動特性が変化する多入力多出力の制御対象が，(2.2) 式の補間モデルによって表わされるとする．

本章では，つぎの仕様を満たすロバストサーボ系の設計を考える．

(A1) 制御系は安定である．

(A2) ステップ状の目標値に対して，制御対象の出力が定常偏差なく追従する．

(A3) 系の内部安定性を乱さない制御対象の任意の変動に対して (A2) が成立する．

これらの仕様を満たし，目標値応答の設計を容易にするために，制御系の構成として Fig.7.1 のような2自由度制御系 [43] を用いる．この図で G は制御対象であり，(2.2) 式の補間モデルによって表わされるとする．また，G_R は目標値発生器であり，r_0 は未知のインパルス入力，K はフィードバック要素，DZ, NZ はフィードフォワード要素を表わす．目標値発生器の既約分解を $G_R = \tilde{D}_R^{-1}\tilde{N}_R$ $(\tilde{D}_R(0) = 0)$ とすると，つぎの補題 [43] が成り立つ．

【補題 7.1】 Fig.7.1 におけるロバストサーボ補償器が存在するための必要十分条件は，N と $\phi_R I$

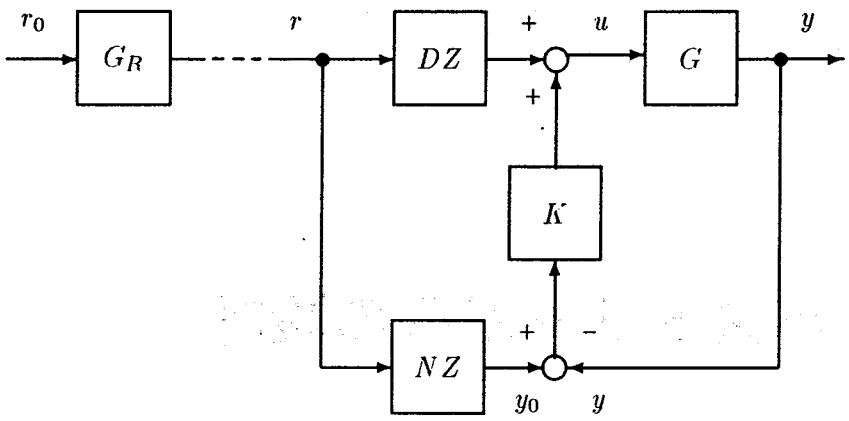

Fig.7.1 Two-degree-of-freedom Servosystem

が左既約なことである．また，このとき，NZ, K のクラスは

$$NZ \in \{NZ \in RH_\infty \mid N(0)Z(0) = I,\ \forall\alpha \in [0,1]\} \tag{7.1}$$

$$K = C_s/\phi_R,\ C_s \in \Omega(G/\phi_R),\ \forall\alpha \in [0,1] \tag{7.2}$$

と表わされる．ここで，ϕ_R は $\tilde{D}_R$ の最大単因子であり，$\Omega(G/\phi_R)$ は G/ϕ_R に対する安定化コントローラの集合を表わす．

7.3 補間による補償器の設計

本節では，N と $\phi_R I$ は左既約であるとし，前節で示した2自由度ロバストサーボ系のフィードバック要素とフィードフォワード要素を補間を用いて設計する方法を与える．

7.3.1 フィードバック要素の設計

(7.2)式に示されるように，フィードバック要素 K は，G/ϕ_R の安定化コントローラ C_s に $1/\phi_R$ を付加したものである．本節では，G/ϕ_R の安定化コントローラ C_s をつぎのような補間形式で構成することを考える．

$$C_s = \tilde{D}_{Cs}^{-1}\tilde{N}_{Cs} \tag{7.3}$$

$$\begin{cases} \tilde{N}_{Cs} = \alpha\tilde{N}_{k1} + (1-\alpha)\tilde{N}_{k2} \\ \tilde{D}_{Cs} = \alpha\tilde{D}_{k1} + (1-\alpha)\tilde{D}_{k2} \end{cases}$$

ここで，

$$C_i = \tilde{D}_{ki}^{-1}\tilde{N}_{ki}\ ,\quad i = 1,2 \tag{7.4}$$

と定義すれば，(7.3) 式の C_s は，C_1 と C_2 を補間したものである．

G/ϕ_R における G が (2.2) 式で表わされることに注意すると，G/ϕ_R は，基準モデルを G_i/ϕ_R $(i=1,2)$ とし，これらの既約分解を

$$G_i/\phi_R = N_i(\phi_R D_i)^{-1}\ ,\quad i=1,2 \tag{7.5}$$

としたときの補間モデルとして，つぎのように書き表わされる．

$$G/\phi_R = N(\alpha)D_\phi(\alpha)^{-1}$$
$$\begin{cases} N(\alpha) = \alpha N_1 + (1-\alpha)N_2 \\ D_\phi(\alpha) = \alpha\phi_R D_1 + (1-\alpha)\phi_R D_2 \end{cases}$$

この補間モデルを安定化する (7.3) 式のコントローラが存在するための十分条件は，第 5 章で $p=2$ としたときと同様な手法を用いることにより得ることができる．まず，$\alpha=1,0$ の場合を考えると，C_1 は G_1/ϕ_R，C_2 は G_2/ϕ_R に対する安定化コントローラとなっていることが必要である．そこで，(7.4) 式の C_i $(i=1,2)$ の既約分解 $\tilde{D}_{ki}$, $\tilde{N}_{ki}$ $(i=1,2)$ を，G/ϕ_R に対する安定化コントローラの一般形 [45] を用いて

$$\begin{cases} \tilde{N}_{ki} = X_{\phi i} + R_i\tilde{D}_{\phi i} \\ \tilde{D}_{ki} = Y_{\phi i} - R_i\tilde{N}_{\phi i} \end{cases}\ ,\quad i=1,2 \tag{7.6}$$

と表わす．ここで，$\tilde{N}_{\phi i}, \tilde{D}_{\phi_i}, X_{\phi i}, Y_{\phi i} \in RH_\infty$ は，(7.5) 式の G_i/ϕ_R の既約分解 $(N_i, \phi_R D_i)$ と，適当な $\tilde{X}_{\phi i}, \tilde{Y}_{\phi i}$ $(i=1,2)$ に対して，

$$\begin{bmatrix} Y_{\phi i} & X_{\phi i} \\ -\tilde{N}_{\phi i} & \tilde{D}_{\phi i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_R D_i & -\tilde{X}_{\phi i} \\ N_i & \tilde{Y}_{\phi i} \end{bmatrix} = I\ ,\quad i=1,2 \tag{7.7}$$

を満たすものである．また，R_i $(i=1,2)$ は RH_∞ に属するパラメータ行列であり，ここでは，$\alpha \in [0,1]$ において C_s が G/ϕ_R を安定化するように決められなければならない．このような R_i $(i=1,2)$ の求め方は，第 5 章で $p=2$ とした場合としてつぎの定理のように与えられる．

【定理 7.1】 (7.2) 式を満たす C_s は，ある正数 γ に対して，

$$\|T_a - \gamma I - RT_b\|_\infty < 2+\gamma \tag{7.8}$$

を満たす $R \in RH_\infty$ により得られる．ただし，

$$T_a = X_{\phi 1}N_2 + \phi_R Y_{\phi 1}D_2 + X_{\phi 2}N_1 + \phi_R Y_{\phi 2}D_1$$

$$T_b = \begin{bmatrix} \phi_R \tilde{N}_{\phi 1} D_2 - \tilde{D}_{\phi 1} N_2 \\ \phi_R \tilde{N}_{\phi 2} D_1 - \tilde{D}_{\phi 2} N_1 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} R_1 & R_2 \end{bmatrix}$$

である.

このような R_i $(i = 1, 2)$ の具体的な求め方は，第5章の 5.5 節で示した LMI において，$p = 2$ とした場合として示すことができる.

7.3.2 フィードフォワード要素の設計

ここでは，フィードフォワード要素 NZ, DZ の構成法を示す．N, D が既約分解 N_i, D_i $(i = 1, 2)$ によって (2.2) 式における $N(\alpha)$, $D(\alpha)$ で与えられているとき，(7.1) 式を満たすような Z を求めることを考える．その1つとして，

$$Z = \{\alpha N_1(0) + (1 - \alpha) N_2(0)\}^{-1} \tag{7.9}$$

とすることが考えられる．このような Z を構成すれば，α によらず，$N(0)Z(0) = I$ が成り立つことは明らかである.

7.4 数値例

基準モデルを

$$G_1 = \frac{1}{s^2 + 5s + 2}, \quad G_2 = \frac{1}{s^2 + 4s + 1} \tag{7.10}$$

とし，それらの既約分解が

$$\begin{aligned} N_1 = N_2 &= \frac{1}{(s+2)(s+3)} \\ D_1 = \frac{s^2 + 5s + 2}{(s+2)(s+3)}, &\quad D_2 = \frac{s^2 + 4s + 1}{(s+2)(s+3)} \end{aligned} \tag{7.11}$$

と与えられているとする．目標値発生器の伝達関数を $G_R = 1/s$ とし，その既約分解 $G_R = \tilde{D}_R^{-1} \tilde{N}_R$ を

$$\tilde{N}_R = \frac{1}{s+1}, \quad \tilde{D}_R = \frac{s}{s+1}$$

とする．また，$\tilde{D}_R$ の最大単因子を

$$\phi_R = \frac{s}{s+1}$$

とする.

まず, 第 7.3.1 節の方法によって, フィードバック要素を求める.

$$G_1/\phi_R = \frac{s+1}{s(s^2+5s+2)}\ ,\quad G_2/\phi_R = \frac{s+1}{s(s^2+4s+1)}$$

の既約分解 $G_i/\phi_R = N_i(\phi_R D_i)^{-1}$ に対して, (7.7) 式を満たす $X_{\phi i}, Y_{\phi i}, \tilde{N}_{\phi i}, \tilde{D}_{\phi i}$ $(i=1,2)$ を求め, (7.8) 式を満たす R_i $(i=1,2)$, γ を第 5.5 節で $p=2$ としたときの LMI を用いて求めると,

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{-76.69s^3+32.48s^2+112.7s-13.33}{s^3+2.378s^2+2.170s+0.7714} \\ R_2 &= \frac{-53.21s^3+10.04s^2-23.16s-101.4}{s^3+2.378s^2+2.170s+0.7714} \\ \gamma &= 104.4 \end{aligned} \tag{7.12}$$

が得られる.

また, (7.9) 式の $Z = \{\alpha N_1(0) + (1-\alpha)N_2(0)\}^{-1}$ は, この例の場合 $N_1(0) = N_2(0) = 1/6$ であることから, α によらず

$$Z = 6 \tag{7.13}$$

となる.

(7.12) 式の R_i $(i=1,2)$ から構成されるフィードバック要素 K と, (7.13) 式のフィードフォワード要素 Z を用いて, Fig 7.1 のサーボ系を構成したときのステップ応答を調べる. ただし, サーボ特性のロバスト性を調べるために, ステップ応答のシミュレーションに用いる補間モデルは, (7.10) 式, (7.11) 式から構成されるものとは異なるものとし, 基準モデルを

$$G_1 = \frac{1}{s^2+7s+3}\ ,\quad G_2 = \frac{1}{s^2+3s+2}$$

とし, 既約分解を

$$\begin{aligned} N_1 = N_2 &= \frac{1}{(s+4)(s+5)} \\ D_1 &= \frac{s^2+7s+3}{(s+4)(s+5)}\ ,\quad D_2 = \frac{s^2+3s+2}{(s+4)(s+5)} \end{aligned}$$

としたものから得られるものとする. 目標値を単位ステップとし, $\alpha = 0,\ 0.25,\ 0.5,\ 0.75,\ 1$ における制御量 y の推移を Fig.7.2 に示す. 各 α において, 定常偏差なしに目標値に追従していることが確認できる.

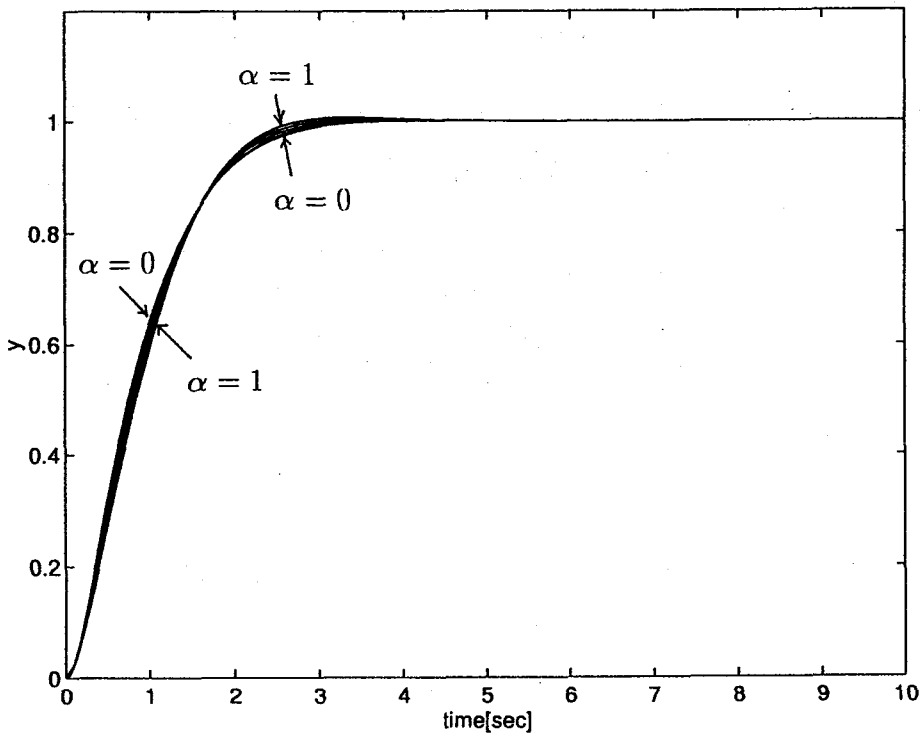

Fig.7.2 Controlled outputs ($\alpha = 0,\ 0.25,\ 0.5,\ 0.75,\ 1$)

7.5 結言

補間モデルで表わされる制御対象に対して，制御量を定常偏差なくステップ状の目標値に追従させるロバストサーボ系を構成することを考え，2自由度制御系を構成するフィードバック要素とフィードフォワード要素を補間を用いて設計する方法を示した.

第 8 章

制御対象の時間的変化への対応

8.1 緒言

第 2 章で定義した補間モデルは s 領域で記述されているため，これにおける補間パラメータは，時間の関数とはなっていない．したがって，そのような補間モデルを用いたモデリングと制御系設計法が適用できるのは，制御対象の変化を表わすパラメータが時間に関して区分的に一定であり，かつ，変化の頻度が少ないものに限られる．

本章では，第 2 章で定義した補間モデルを，その状態空間表現を用いることによって，変動パラメータが時間的に変化するものに拡張する．そして，補間モデルの状態空間表現と同様な補間形式をもつ補間コントローラを状態空間で定義する．これらの時間的変化を考慮した補間モデルと補間コントローラから構成される制御系の安定化問題を考え，安定化可能条件と補間コントローラの構成法を BMI（bilinear matrix inequality，双線形行列不等式）を用いて示す．BMI を解く手法について，最近さまざまな研究がされつつあるが [10, 12]，一般に計算が複雑となるため，これをより解きやすい LMI に変換することは有用である．本章では，補間コントローラの自由度を少し制限して BMI を LMI に変換し，これを用いた補間コントローラの構成法を与える．

8.2 時間的変化を表わす補間モデル

第 2 章において，動作環境の変化によって動特性が変化する制御対象のモデルとして，(2.2) 式の補間モデルを定義した．このモデルは s 領域で記述されたものであるため，制御対象の変化を表わす補間パラメータ α は時間の関数にはなっていない．すなわち (2.2) 式は時不変なモデルである．この章では制御対象の時間的変化を表現するため，(2.2) 式の補間モデルを状態空間で表現し，これにおける α を時間 t の関数とする．

(2.1) 式における基準モデル G_i $(i=1,2)$ の最小実現を

$$G_i = \left[\begin{array}{c|c} A_i & B_i \\ \hline C_i & 0 \end{array}\right] \quad , \quad i=1,2$$

とする．G_i $(i=1,2)$ に対する既約分解 N_i, D_i $(i=1,2)$ の状態空間表現として，本章では

$$\begin{bmatrix} N_i \\ D_i \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} A_i - B_iF_i & B_i \\ \hline C_i & 0 \\ -F_i & I \end{array}\right] \quad , \quad i=1,2 \tag{8.1}$$

を用いる [37]．ここで，F_i $(i=1,2)$ は $A_i - B_iF_i$ を安定にする行列である．

この既約分解の状態空間表現を用いると，(2.2) 式の補間モデルは，状態空間において，

$$G(\alpha) = \left[\begin{array}{cc|c} A_1-(1-\alpha)B_1F_1 & \alpha B_1F_2 & \alpha B_1 \\ (1-\alpha)B_2F_1 & A_2-\alpha B_2F_2 & (1-\alpha)B_2 \\ \hline C_1 & C_2 & 0 \end{array}\right]$$

と表わされる．本章では，上式における制御対象の動特性の変化を表わすパラメータ α を時間の関数とした，時変な補間モデルを状態空間でつぎのように表現し，これの安定化問題を考察する．

$$\mathbf{G} \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_g(t) = \begin{bmatrix} A_1-(1-\alpha(t))B_1F_1 & \alpha(t)B_1F_2 \\ (1-\alpha(t))B_2F_1 & A_2-\alpha(t)B_2F_2 \end{bmatrix} x_g(t) + \begin{bmatrix} \alpha(t)B_1 \\ (1-\alpha(t))B_2 \end{bmatrix} u_g(t) \\ y(t) = [C_1 \ \ C_2]x_g(t) \end{array} \right. \tag{8.2}$$

ここで $\alpha(t) \in [0,1]$ は任意の時間的変化を表わす補間パラメータである．

(注意 8.1) 本章では，(8.1) 式における F_i $(i=1,2)$ は与えられているものと仮定する．これらの選び方としては，例えば，第 3 章の構成法を用いることが考えられる（ただし，(3.10) 式における J_i $(i=1,2)$ は単位行列に固定する）．

8.3 補間コントローラ

本章では，補間パラメータ $\alpha(t)$ の値を知ることができるとし，これを用いてコントローラを補間して制御系を安定化することを考える．コントローラの補間に時間関数 $\alpha(t)$ を用いるため，本節では状態空間において補間コントローラを新たに定義する．

まず，基準モデル G_i $(i=1,2)$ に対する安定化コントローラ K_i $(i=1,2)$ の状態空間表現を

$$K_1 = \left[\begin{array}{c|c} A_{k1} & B_{k1} \\ \hline C_{k1} & 0 \end{array}\right] \quad , \quad K_2 = \left[\begin{array}{c|c} A_{k2} & B_{k2} \\ \hline C_{k2} & 0 \end{array}\right] \tag{8.3}$$

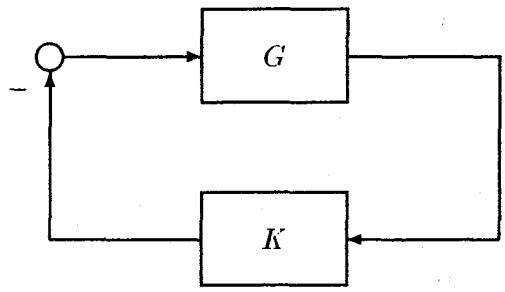

Fig.8.1 Closed-loop system

とする．これらを用いて，補間コントローラを

$$\mathbf{K}\left\{\begin{array}{l}\dot{x}_k(t)=\begin{bmatrix}A_{k1}-(1-\alpha(t))V & \alpha(t)W\\ (1-\alpha(t))Y & A_{k2}-\alpha(t)Z\end{bmatrix}x_k(t)+\begin{bmatrix}\alpha(t)B_{k1}\\ (1-\alpha(t))B_{k2}\end{bmatrix}y(t)\\ y_k(t)=[C_{k1}\quad C_{k2}]x_k(t)\end{array}\right. \tag{8.4}$$

と定義する．ここで，V, W, Y, Z は上式を定義するために適当なサイズを持つ実数行列であり，補間コントローラの設計のために決められるべきものである．$\alpha = 1\ (= 0)$ のとき (8.4) 式の $\mathbf{K}$ は，V, W, Y, Zとは無関係に $K_1\ (K_2)$ となる．

本章の目的は，(8.4) 式の $\mathbf{K}$ の構成法を示すこと，すなわち，(8.4) 式の補間コントローラ $\mathbf{K}$ が (8.2) 式の補間モデル $\mathbf{G}$ を安定化するように，(8.4) 式における $A_{ki}, B_{ki}, C_{ki}\ (i = 1,2), V, W, Y, Z$ を求める方法を示すことである．

（注意 8.2） (8.4) 式における $A_{ki}, B_{ki}, C_{ki}\ (i = 1,2)$ と V, W, Y, Z に，後に与える (8.11) 式と $V = [B_1^T\ \ 0]^T C_{k1}$，$W = [B_1^T\ \ 0]^T C_{k2}$，$Y = [B_2^T\ \ 0]^T C_{k1}$，$Z = [B_2^T\ \ 0]^T C_{k2}$ を代入すると，第 3 章で定義した (2.8) 式の補間コントローラ $K(\alpha)$ の状態空間表現と一致する．

8.4 補間コントローラの構成法

8.4.1 行列不等式による安定化可能条件

この節では，Fig.8.1 における G が (8.2) 式の補間モデル $\mathbf{G}$ によって表され，K として (8.4) 式の補間コントローラ $\mathbf{K}$ を用いるとし，制御系が安定であるための条件を行列不等式を用いて示す．なお，記述の簡単化のため，この節では “$\alpha(t)$” を “α” と省略して書くことにする．

(8.2) 式と (8.4) 式を用いると，Fig.8.1 の閉ループ系の状態空間表現は

$$\mathbf{F}: \ \dot{x}_f(t) = A_f(\alpha)x_f(t)$$

$$A_f(\alpha) = \alpha A_a + (1-\alpha)A_b \tag{8.5}$$

$$A_a = \begin{bmatrix} A_1 & B_1F_2 & -B_1C_{k1} & -B_1C_{k2} \\ 0 & A_2 - B_2F_2 & 0 & 0 \\ B_{k1}C_1 & B_{k1}C_2 & A_{k1} & W \\ 0 & 0 & 0 & A_{k2} - Z \end{bmatrix} \tag{8.6}$$

$$A_b = \begin{bmatrix} A_1 - B_1F_1 & 0 & 0 & 0 \\ B_2F_1 & A_2 & -B_2C_{k1} & -B_2C_{k2} \\ 0 & 0 & A_{k1} - V & 0 \\ B_{k2}C_1 & B_{k2}C_2 & Y & A_{k2} \end{bmatrix} \tag{8.7}$$

となる．この系が安定であるための十分条件（2次安定であるための必要十分条件 [3]）は，

$$Q(\alpha) = PA_f(\alpha) + A_f^T(\alpha)P < 0 \ , \quad \forall\alpha \in [0,1]$$

を満たす正定行列 P が存在することである．ここで，(8.5) 式に見られるように $A_f(\alpha)$ が α に関して線形であるため，この不等式条件と等価な条件をつぎのように述べることができる．

【補題 8.1】

$$\begin{cases} Q(1) = PA_a + A_a^TP < 0 \\ Q(0) = PA_b + A_b^TP < 0 \end{cases} \tag{8.8}$$

を満たす $P > 0$ が存在するならば，Fig.8.1 の系は安定である．

この補題により，本章で考える安定化問題は，正定行列 P に対して (8.8) 式を満たす A_{ki}, B_{ki}, C_{ki} $(i = 1,2)$, V, W, Y, Z を求めることに帰着される．ただし，(8.8) 式は，P と求めるべき行列に関して双線形である，つまり BMI となっていることに注意する．一般に BMI を解くことは容易ではないため，本章ではこれを LMI に変換することを考える．

ここで，(8.8) 式を満たす行列 P をブロック対角行列に限定することによって LMI に変換することは可能であるが，この手法により得られる条件は A_1, A_2, A_{k1}, A_{k2} が安定であること，すなわち，基準モデル G_i $(i = 1,2)$ とそれに対する安定化コントローラ K_i $(i = 1,2)$ が安定であることを必要とする．このような制限を避けるため，閉ループ系の状態を適当に正則変換した後に行列 P をブロック対角に限定する．

この手法を用いるため，まず，(8.3) 式の安定化コントローラ K_i $(i=1,2)$ の状態空間表現を書き直す．K_i $(i=1,2)$ は安定化コントローラの一般形 [45] を用いることにより，

$$K_i = (\tilde{X}_i + D_i R_i)(\tilde{Y}_i - N_i R_i)^{-1} \ , \quad i = 1,2 \tag{8.9}$$

と表わされる．ここで R_i $(i=1,2)$ は RH_∞ に属する行列であり，$\tilde{X}_i, \tilde{Y}_i$ は，適当な $\tilde{N}_i, \tilde{D}_i, X_i, Y_i \in RH_\infty$ に対して (2.10) 式を満たす RH_∞ の行列である．(8.9) 式における R_i $(i=1,2) \in RH_\infty$ の状態空間表現を

$$R_i = \left[\begin{array}{c|c} A_{Ri} & B_{Ri} \\ \hline C_{Ri} & 0 \end{array}\right] \ , \quad i = 1,2 \tag{8.10}$$

とする．ただし，A_{Ri} $(i=1,2)$ は安定な行列である．(8.9) 式に，(8.10) 式の R_i と $N_i, D_i, \tilde{X}_i, \tilde{Y}_i$ の状態空間表現 [37] を用いることにより，(8.3) 式における A_{ki}, B_{ki}, C_{ki} $(i=1,2)$ は，

$$\begin{aligned} A_{ki} &= \begin{bmatrix} A_i - B_i F_i - L_i C_i & B_i C_{Ri} \\ B_{Ri} C_i & A_{Ri} \end{bmatrix} \\ B_{ki} &= [\ -L_i^T \ \ B_{Ri}^T\ ]^T \\ C_{ki} &= [\ -F_i \ \ C_{Ri}\ ] \ , \quad i = 1,2 \end{aligned} \tag{8.11}$$

と書き表すことができる．ただし，L_i $(i=1,2)$ は $A_i - L_i C_i$ $(i=1,2)$ を安定にする任意の行列である．

(8.11) 式を (8.6) 式と (8.7) 式に代入した後，状態の相似変換行列として

$$T = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -I & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & -I & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

を用いて，

$$\tilde{A}_a \triangleq T^{-1} A_a T \ , \quad \tilde{A}_b \triangleq T^{-1} A_b T$$

を計算すると，

$$\tilde{A}_a = \begin{bmatrix} A_1 - B_1F_1 & 0 & B_1F_1 & -B_1C_{R1} & B_1F_2 & -B_1C_{R2} \\ 0 & A_2 - B_2F_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -W_{11} - L_1C_2 & A_1 - L_1C_1 & 0 & W_{11} + B_1F_2 & W_{12} - B_1C_{R2} \\ 0 & -W_{21} + B_{R1}C_2 & B_{R1}C_1 & A_{R1} & W_{21} & W_{22} \\ 0 & L_2C_2 + Z_{11} & 0 & 0 & A_2 - L_2C_2 - B_2F_2 - Z_{11} & B_2C_{R2} - Z_{12} \\ 0 & -B_{R2}C_2 + Z_{21} & 0 & 0 & B_{R2}C_2 - Z_{21} & A_{R2} - Z_{22} \end{bmatrix} \tag{8.12}$$

$$\tilde{A}_b = \begin{bmatrix} A_1 - B_1F_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 - B_2F_2 & B_2F_1 & -B_2C_{R1} & B_2F_2 & -B_2C_{R2} \\ V_{11} + L_1C_1 & 0 & A_1 - L_1C_1 - B_1F_1 - V_{11} & B_1C_{R1} - V_{12} & 0 & 0 \\ V_{21} - B_{R1}C_1 & 0 & B_{R1}C_1 - V_{21} & A_{R1} - V_{22} & 0 & 0 \\ -Y_{11} - L_2C_1 & 0 & B_2F_1 + Y_{11} & Y_{12} - B_2C_{R1} & A_2 - L_2C_2 & 0 \\ -Y_{21} + B_{R2}C_1 & 0 & Y_{21} & Y_{22} & B_{R2}C_2 & A_{R2} \end{bmatrix} \tag{8.13}$$

が得られる．ただし，$V_{ij}, W_{ij}, Y_{ij}, Z_{ij}$ $(i, j = 1, 2)$ は，行列 V, W, Y, Z を適当なサイズに分割したブロック行列である．また，補題の (8.8) 式は，$\tilde{P} \triangleq T^TPT$ と 任意の正則行列 $\tilde{T}$ に対して，

$$\begin{cases} \tilde{T}^T(\tilde{P}\tilde{A}_a + \tilde{A}_a^T\tilde{P})\tilde{T} < 0 \\ \tilde{T}^T(\tilde{P}\tilde{A}_b + \tilde{A}_b^T\tilde{P})\tilde{T} < 0 \end{cases} \tag{8.14}$$

と等価である．

これらより，考える問題は，正定行列 $\tilde{P}$ と，ある正則な行列 $\tilde{T}$ に対して，(8.14) 式を満たすような (8.12) 式と (8.13) 式における行列 $A_{Ri}, B_{Ri}, C_{Ri}, L_i$ $(i = 1, 2)$, $V_{ij}, W_{ij}, Y_{ij}, Z_{ij}$ $(i, j = 1, 2)$ を求めることとなる．

8.4.2 LMI による安定化可能条件 I

前節で示した (8.14) 式はやはり BMI であるが，$\tilde{P}$ の構造を限定し，適当な変数変換 [5] を行うことにより，LMI に変換できることを本節とつぎの節で示す．

正定行列 $\tilde{P}$ を

$$\tilde{P} = \mathrm{diag}\{P_1^{-1}, P_2^{-1}, P_3, I, P_5, I\} \tag{8.15}$$

に限定し，

$$\tilde{T} = \mathrm{diag}\{P_1, P_2, I, I, I, I\}$$

とおく．さらに，V, W, Y, Z を

$$V = \begin{bmatrix} -L_1C_1 & V_{12} \\ B_{R1}C_1 & V_{22} \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} -L_1C_2 & W_{12} \\ B_{R1}C_2 & W_{22} \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} -L_2C_1 & Y_{12} \\ B_{R2}C_1 & Y_{22} \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} -L_2C_2 & Z_{12} \\ B_{R2}C_2 & Z_{22} \end{bmatrix} \tag{8.16}$$

として，新たな変数，

$$L_{P1} = P_3L_1, \quad L_{P2} = P_5L_2$$
$$V_P = P_3(B_1C_{R1} - V_{12}), \quad W_P = P_3(W_{12} - B_1C_{R2})$$
$$Y_P = P_5(Y_{12} - B_2C_{R1}), \quad Z_P = P_5(B_2C_{R2} - Z_{12})$$

を導入すると，(8.14) 式の BMI は，つぎの定理における (8.17) 式の LMI に変換される．

【定理 8.1】 行列 M_a と M_b を

$$M_a = \begin{bmatrix} (A_1 - B_1F_1)P_1 & 0 & B_1F_1 & -B_1C_{R1} & B_1F_2 & -B_1C_{R2} \\ 0 & (A_2 - B_2F_2)P_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_3A_1 - L_{P1}C_1 & 0 & -L_{P1}C_2 + P_3B_1F_2 & W_P \\ 0 & 0 & B_{R1}C_1 & A_{R1} & B_{R1}C_2 & W_{22} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_5(A_2 - B_2F_2) & Z_P \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{R2} - Z_{22} \end{bmatrix}$$

$$M_b = \begin{bmatrix} (A_1 - B_1F_1)P_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (A_2 - B_2F_2)P_2 & B_2F_1 & -B_2C_{R1} & B_2F_2 & -B_2C_{R2} \\ 0 & 0 & P_3(A_1 - B_1F_1) & V_P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{R1} - V_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_5B_2F_1 - L_{P2}C_1 & Y_P & P_5A_2 - L_{P2}C_2 & 0 \\ 0 & 0 & B_{R2}C_1 & Y_{22} & B_{R2}C_2 & A_{R2} \end{bmatrix}$$

と定義する．このとき，

$$\begin{cases} M_a + M_a^T < 0 \\ M_b + M_b^T < 0 \end{cases} \tag{8.17}$$

を満たす $P_1 > 0, P_2 > 0, P_3 > 0, P_5 > 0, A_{Ri}, B_{Ri}, C_{Ri}, L_{Pi}\ (i = 1, 2)$ と $V_P, V_{22}, W_P, W_{22}, Y_P, Y_{22}, Z_P, Z_{22}$ が存在すれば，(8.2) 式の補間モデル $\mathbf{G}$ は，(8.4) 式の補間コントローラ $\mathbf{K}$ によっ

て安定化される．補間コントローラにおいて変数となっていた行列 A_{Ri}, B_{Ri}, C_{Ri}, L_i $(i=1,2)$, V_{ij}, W_{ij}, Y_{ij}, Z_{ij} $(i,j=1,2)$ は，(8.17) 式の解と，

$$\begin{aligned} V_{12} &= B_1C_{R1} - P_3^{-1}V_P\ , \quad W_{12} = B_1C_{R2} + P_3^{-1}W_P \\ Y_{12} &= B_2C_{R1} + P_5^{-1}Y_P\ , \quad Z_{12} = B_2C_{R2} - P_5^{-1}Z_P \\ L_1 &= P_3^{-1}L_{P1}\ , \quad L_2 = P_5^{-1}L_{P2} \end{aligned} \tag{8.18}$$

によって求められる．

(8.10) 式と (8.11) 式の導入において，A_{Ri} $(i=1,2)$ は安定な行列で，L_i $(i=1,2)$ は $A_i - L_iC_i$ を安定にする行列であることを仮定した．これらは定理の条件である (8.17) 式が成り立つとき，自動的に満たされる．

(注意 8.3)　(8.14) 式の BMI を LMI に変換するために，(8.15) 式の代わりに，$\tilde{P} = \mathrm{diag}\{P_1^{-1}, P_2^{-1}, P_3, P_4, P_5, P_6\}$ を用いることが考えられる．この $\tilde{P}$ は (8.15) 式よりも LMI の解となり得るための多くの自由度を持っているように見えるが，変数変換を行った後に得られる LMI は (8.17) 式と等価なものとなる．したがって，$\tilde{P} = \mathrm{diag}\{P_1^{-1}, P_2^{-1}, P_3, P_4, P_5, P_6\}$ でなく，(8.15) 式を用いて (8.17) 式の LMI を導いている．

8.4.3 LMI による安定化可能条件 II

前節では，(8.16) 式に見られるように，行列 V, W, Y, Z の自由度を制限することによって LMI 条件を得た．この節では，この制限の代わりに，(8.10) 式における行列 C_{Ri} $(i=1,2)$ が与えられているものとして別の LMI 条件を導く．

(8.14) 式において，$\tilde{T} = I$ とするとともに，正定行列 $\tilde{P}$ を

$$\tilde{P} = \mathrm{diag}\{P_1, P_2, P_3, I, P_5, I\} \tag{8.19}$$

に限定する．そして，新たな変数，

$$L_{P1} = P_3L_1\ , \quad L_{P2} = P_5L_2$$

$$\begin{bmatrix} V_a & V_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_3V_{11} & P_3V_{12} \end{bmatrix}\ , \quad \begin{bmatrix} W_a & W_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_3W_{11} & P_3W_{12} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Y_a & Y_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_5Y_{11} & P_5Y_{12} \end{bmatrix}\ , \quad \begin{bmatrix} Z_a & Z_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_5Z_{11} & P_5Z_{12} \end{bmatrix}$$

を導入すると，(8.14) 式の BMI は，つぎの定理における (8.20) 式の LMI に変換される．

【定理 8.2】 行列 $\tilde{M}_a$, $\tilde{M}_b$ を

$$\tilde{M}_a = \begin{bmatrix} P_1(A_1 - B_1F_1) & 0 & P_1B_1F_1 & -P_1B_1C_{R1} & P_1B_1F_2 & -P_1B_1C_{R2} \\ 0 & P_2(A_2 - B_2F_2) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -W_a - L_{P1}C_2 & P_3A_1 - L_{P1}C_1 & 0 & W_a + P_3B_1F_2 & W_b - P_3B_1C_{R2} \\ 0 & -W_{21} + B_{R1}C_2 & B_{R1}C_1 & A_{R1} & W_{21} & W_{22} \\ 0 & L_{P2}C_2 + Z_a & 0 & 0 & P_5(A_2 - B_2F_2) - L_{P2}C_2 - Z_a & P_5B_2C_{R2} - Z_b \\ 0 & -B_{R2}C_2 + Z_{21} & 0 & 0 & B_{R2}C_2 - Z_{21} & A_{R2} - Z_{22} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{M}_b = \begin{bmatrix} P_1(A_1 - B_1F_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_2(A_2 - B_2F_2) & P_2B_2F_1 & -P_2B_2C_{R1} & P_2B_2F_2 & -P_2B_2C_{R2} \\ V_a + L_{P1}C_1 & 0 & P_3(A_1 - B_1F_1) - L_{P1}C_1 - V_a & P_3B_1C_{R1} - V_b & 0 & 0 \\ V_{21} - B_{R1}C_1 & 0 & B_{R1}C_1 - V_{21} & A_{R1} - V_{22} & 0 & 0 \\ -Y_a - L_{P2}C_1 & 0 & P_5B_2F_1 + Y_a & Y_b - P_5B_2C_{R1} & P_5A_2 - L_{P2}C_2 & 0 \\ -Y_{21} + B_{R2}C_1 & 0 & Y_{21} & Y_{22} & B_{R2}C_2 & A_{R2} \end{bmatrix}$$

と定義する．このとき，

$$\begin{cases} \tilde{M}_a + \tilde{M}_a^T < 0 \\ \tilde{M}_b + \tilde{M}_b^T < 0 \end{cases} \tag{8.20}$$

を満たす $P_1 > 0$, $P_2 > 0$, $P_3 > 0$, $P_5 > 0$, V_a, V_b, V_{21}, V_{22}, W_a, W_b W_{21}, W_{22}, Y_a, Y_b, Y_{21}, Y_{22}, Z_a, Z_b Z_{21}, Z_{22}, L_{Pi}, A_{Ri}, B_{Ri} $(i = 1, 2)$ が存在すれば，(8.2) 式の補間モデル $\mathbf{G}$ は，(8.4) 式の補間コントローラ $\mathbf{K}$ によって安定化される．補間コントローラにおいて変数となっていた行列

A_{Ri}, B_{Ri}, C_{Ri}, L_i $(i=1,2)$, V_{ij}, W_{ij}, Y_{ij}, Z_{ij} $(i,j=1,2)$ は，(8.20) 式の解と

$$
\begin{aligned}
&L_1 = P_3^{-1}L_{P1}\ ,\quad L_2 = P_5^{-1}L_{P2} \\
&\begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_3^{-1}V_a & P_3^{-1}V_b \end{bmatrix}\ ,\quad \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_3^{-1}W_a & P_3^{-1}W_b \end{bmatrix} \\
&\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_5^{-1}Y_a & P_5^{-1}Y_b \end{bmatrix}\ ,\quad \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_5^{-1}Z_a & P_5^{-1}Z_b \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{8.21}
$$

によって求められる．

(8.20) 式の安定化可能条件が成り立てば，A_{Ri} と $A_i - L_iC_i$ $(i=1,2)$ の安定性は自動的に満たされる．

(注意 8.4)　(注意 8.3) と同様に，(8.19) 式の $\tilde{P}$ 代わりに $\tilde{P} = \mathrm{diag}\{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\}$ を用いて得られる LMI は (8.20) 式と等価である．

8.5 数値例

ここでは，定理 8.1 と 8.2 で示した補間コントローラの設計例を示す．

2 つの基準モデルとそれらの既約分解が，つぎのように与えられているとする．

$$
\begin{aligned}
G_1 &= \frac{s-1}{s^2+2s+3}\ ,\quad N_1 = \frac{s-1}{(s+1)(s+2)}\ ,\quad D_1 = \frac{s^2+2s+3}{(s+1)(s+2)} \\
G_2 &= \frac{s+2}{s^2+2s-1}\ ,\quad N_2 = \frac{s+2}{(s+1)(s+2)}\ ,\quad D_2 = \frac{s^2+2s-1}{(s+1)(s+2)}
\end{aligned}
\tag{8.22}
$$

そして，これらの状態空間表現を与える (8.1) 式における行列 A_i, B_i, C_i, F_i $(i=1,2)$ を

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\ ,\quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\ ,\quad C_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}\ ,\quad F_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \\
A_2 &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\ ,\quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\ ,\quad C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}\ ,\quad F_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{8.23}
$$

とする．

こららの状態空間表現を用いて，定理 8.1 における (8.17) 式の LMI を解くと，解として

$$
P_1 = \begin{bmatrix} 39.34 & -37.31 \\ -37.31 & 76.05 \end{bmatrix}\ ,\quad P_2 = \begin{bmatrix} 39.34 & -37.31 \\ -37.31 & 76.05 \end{bmatrix}
$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} 19.57 & 19.29 \\ 19.29 & 93.42 \end{bmatrix}, \quad P_5 = \begin{bmatrix} 20.51 & 18.77 \\ 18.77 & 90.60 \end{bmatrix}$$

$$A_{R1} = \begin{bmatrix} -41.44 & 0 \\ 0 & -41.44 \end{bmatrix}, \quad A_{R2} = \begin{bmatrix} -41.44 & 0 \\ 0 & -41.44 \end{bmatrix}$$

$$B_{R1} = B_{R2} = C_{R1} = C_{R2} = 0 \tag{8.24}$$

$$L_{P1} = \begin{bmatrix} 25.99 \\ 23.75 \end{bmatrix}, \quad L_{P2} = \begin{bmatrix} 21.29 \\ 28.13 \end{bmatrix}$$

$$V_P = V_{22} = W_P = W_{22} = Y_P = Y_{22} = Z_P = Z_{22} = 0 \tag{8.25}$$

が得られる．また，これらの解から (8.18) 式における行列が

$$V_{12} = W_{12} = Y_{12} = Z_{12} = 0 \tag{8.26}$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1.352 \\ -0.0249 \end{bmatrix}, \quad L_2 = \begin{bmatrix} 0.930 \\ 0.118 \end{bmatrix} \tag{8.27}$$

と決まり，(8.11) 式と (8.16) 式から，(8.4) 式の補間コントローラにおける行列 A_{ki}, B_{ki} , C_{ki} $(i = 1, 2)$, V, W, Y, Z を計算することができる．

この例の場合，(8.24) 式のように，B_{Ri}, C_{Ri} $(i = 1, 2)$ の解が 0 として得られる．さらに，(8.25) 式，(8.26) 式から，(8.16) 式の V, W, Y, Z において，(1,2), (2,1), (2,2) ブロックが 0 となる．このように (8.11) 式と (8.16) 式の行列のいくつかのブロックが 0 となることから，これらの行列から構成される (8.4) 式の状態空間表現では，A_{Ri} $(i = 1, 2)$ に相当する部分が不可制御かつ不可観測となる．そして，この部分を取り除いて低次元化した結果として得られる補間コントローラは，

$$\mathbf{K} \begin{cases} \dot{x}_k(t) = \begin{bmatrix} A_1 - B_1F_1 - L_1C_1 + (1-\alpha(t))L_1C_1 & -\alpha(t)L_1C_2 \\ -(1-\alpha(t))L_2C_1 & A_2 - B_2F_2 - L_2C_2 + \alpha(t)L_2C_2 \end{bmatrix} x_k(t) \\ \qquad + \begin{bmatrix} \alpha(t)L_1 \\ (1-\alpha(t))L_2 \end{bmatrix} y(t) \\ y_k(t) = [F_1 \quad F_2] x_k(t) \end{cases} \tag{8.28}$$

となる．なお，これは，基準モデルに対する安定化コントローラの既約分解を

$$K_i = \tilde{X}_i \tilde{Y}_i^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} A_i - B_iF_i & L_i \\ \hline F_i & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} A_i - B_iF_i & L_i \\ \hline C_i & I \end{array}\right]^{-1}, \quad i = 1, 2$$

として，

$$K(\alpha) = N_K(\alpha)D_K(\alpha)^{-1}$$
$$\begin{cases} N_K(\alpha) = \alpha\tilde{X}_1 + (1-\alpha)\tilde{X}_2 \\ D_K(\alpha) = \alpha\tilde{Y}_1 + (1-\alpha)\tilde{Y}_2 \end{cases} \tag{8.29}$$

という補間をしたコントローラ $K(\alpha)$ を状態空間で表現し，α を $\alpha(t)$ としたものと一致する．

つぎに，(8.22) 式の既約分解から得られる補間モデルに対して，定理 8.2 を適用した例について述べる．基準モデルとそれらの既約分解の状態空間表現は (8.23) 式と同じものを用い，$C_{Ri} = 0$ $(i = 1, 2)$ として定理 8.2 の LMI を解くと，解として

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.177 & 0.137 \\ 0.137 & 0.818 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0.177 & 0.137 \\ 0.137 & 0.818 \end{bmatrix}$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} 0.244 & 0.233 \\ 0.233 & 1.12 \end{bmatrix}, \quad P_5 = \begin{bmatrix} 0.263 & 0.221 \\ 0.221 & 1.06 \end{bmatrix}$$

$$A_{R1} = \begin{bmatrix} -0.517 & 0 \\ 0 & -0.517 \end{bmatrix}, \quad A_{R2} = \begin{bmatrix} -0.517 & 0 \\ 0 & -0.517 \end{bmatrix}$$

$$B_{R1} = B_{R2} = 0$$

$$L_{P1} = \begin{bmatrix} 0.311 \\ 0.257 \end{bmatrix}, \quad L_{P2} = \begin{bmatrix} 0.248 \\ 0.356 \end{bmatrix}$$

$$V_a = \begin{bmatrix} -0.298 & 0.289 \\ -0.278 & 0.291 \end{bmatrix}, \quad W_a = \begin{bmatrix} -0.277 & -0.676 \\ -0.245 & -0.606 \end{bmatrix}$$

$$Y_a = \begin{bmatrix} -0.256 & 0.256 \\ -0.288 & 0.288 \end{bmatrix}, \quad Z_a = \begin{bmatrix} -0.283 & -0.540 \\ -0.399 & -0.662 \end{bmatrix}$$

$$V_B = V_{21} = V_{22} = W_B = W_{21} = W_{22} = Y_B = Y_{21} = Y_{22} = Z_B = Z_{21} = Z_{22} = 0$$

が得られ，(8.21) 式の行列が

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1.319 \\ -0.0448 \end{bmatrix}, \quad L_2 = \begin{bmatrix} 0.801 \\ 0.169 \end{bmatrix}$$

$$V_{11} = \begin{bmatrix} -1.232 & 1.172 \\ 0.007 & 0.016 \end{bmatrix}, \quad W_{11} = \begin{bmatrix} -1.160 & -2.820 \\ 0.0224 & 0.0448 \end{bmatrix}$$

$$Y_{11} = \begin{bmatrix} -0.900 & 0.900 \\ -0.0843 & 0.0843 \end{bmatrix}, \quad Z_{11} = \begin{bmatrix} -0.920 & -1.848 \\ -0.184 & -0.239 \end{bmatrix}$$

$$V_{12} = W_{12} = Y_{12} = Z_{12} = 0$$

と決まる．この場合も，B_{Ri}, C_{Ri} $(i = 1, 2)$, $V_{ij}, W_{ij}, Y_{ij}, Z_{ij}$ $(ij = 12, 21, 22)$ が 0 となることから，定理 8.1 を用いた場合と同様に，(8.4) 式を低次元化することができ，補間コントローラは，

$$\mathbf{K}\left\{\begin{array}{l} \dot{x}_k(t) = \begin{bmatrix} A_1 - B_1F_1 - L_1C_1 - (1-\alpha(t))V_{11} & \alpha(t)W_{11} \\ (1-\alpha(t))Y_{11} & A_2 - B_2F_2 - L_2C_2 - \alpha(t)Z_{11} \end{bmatrix} x_k(t) \\ \qquad + \begin{bmatrix} \alpha(t)L_1 \\ (1-\alpha(t))L_2 \end{bmatrix} y(t) \\ y_k(t) = [F_1 \quad F_2]x_k(t) \end{array}\right. \tag{8.30}$$

となる．

8.6 結言

第 2 章で伝達関数の既約分解を用いて定義した補間モデルを時間的変化を表わすものに拡張するために，状態空間で補間モデルを表わした．そして，これを安定化する補間コントローラを状態空間で定義し，これによる安定化可能条件を示した．安定化可能条件として得られる BMI を，コントローラの自由度を制限することによって，解きやすい LMI による条件に変換し，補間コントローラの構成法を与えた．

第9章

結論

本研究では，動作環境によって動特性が変化するシステムに対するモデリングと制御のため理論について考察し，以下の成果を得た．

第2章ではまず，動作環境の変化によって動特性が変化する制御対象のモデルとして，代表的な動作点における制御対象の伝達関数行列（基準モデル）の既約分解を補間したモデル，すなわち補間モデルを定義した．そして，制御対象の変化に応じてコントローラを変化させることにより，固定コントローラを用いるよりも，安定化可能な制御対象のクラスを広げることができるであろうという動機から，基準モデルに対する安定化コントローラの既約分解を補間したコントローラを補間コントローラとして定義した．またこの章では，補間モデルが安定化可能であるためには，2つの基準モデルが同時安定化可能であることが必要であることを示した．

第3章では，補間モデルを構成する基準モデルの既約分解は一意ではないことと，補間モデルが基準モデルの既約分解の自由度に依存していることに着目し，実際の制御対象に補間モデルが近くなるように基準モデルの既約分解を求める問題を定式化し，この問題の解法を与えた．例として磁気浮上系に補間モデルの構成法の適用を示し，この構成法の有効性を示した．

第4章では，1入力1出力の補間モデルに対する補間コントローラによる安定化問題を考え，これをネバンリナ・ピックの補間問題に帰着させ，補間モデルが補間コントローラによって安定化可能であるための必要十分条件と，補間コントローラの構成法を示した．また，コントローラを補間せず固定とした場合についても安定化可能条件とコントローラの構成法を示した．さらに，数値例により，固定コントローラよりも補間コントローラのほうが安定化可能な制御対象のクラスが広いことを示した．

第5章では，基準モデルの数を2つだけでなく複数とした多入力多出力の補間モデルを定義し，これに対する安定化問題を考察した．補間コントローラと固定コントローラによって安定化可能であるための十分条件がある種の H_∞ 制御問題の可解条件によって表わされることを示した．そ

して，この可解条件が状態空間において線形行列不等式によって表わされることを示し，コントローラの構成法を示した．

第6章では，制御対象に対する補間モデルの近似誤差に対処するために，補間モデルの集合を定義し，これに対する安定化問題を考察した．この章では，あるノミナルな補間モデルを覆うような補間モデルの集合を，基準モデルの既約分解のあるクラスから得られる集合として導入し，この補間モデル集合のすべての要素に対して制御系の安定性を保証するような補間コントローラと固定コントローラの構成法を与えた．安定化可能条件（十分条件）が，ある種の H_∞ 制御問題に帰着できることによって示すとともに，その安定化可能条件を線形行列不等式によって表現できることを示し，コントローラの構成法について述べた．

第7章では，補間モデルによって表わされる制御対象に対して，制御量を定常偏差なくステップ状の目標値に追従させるロバストサーボ系を，2自由度構成によって設計する方法を考察した．フィードバック要素とフィードフォワード要素のそれぞれを補間を用いて設計することを考え，それらが満たすべき条件と設計法を示した．

第8章では，第2章で定義した補間モデルを状態空間で表現することによって，変動パラメータが時間的に変化するものに拡張するとともに，これを安定化する補間コントローラを状態空間で定義した．これらの補間モデルと補間コントローラから構成される制御系の安定化問題を考え，安定化可能条件と補間コントローラの構成法を行列不等式を用いて示した．

以上のように，補間モデルの構成法，補間コントローラの存在条件と構成法が明らかになった．モデルやコントローラを補間するという発想に基づいた制御理論はこれまでに数少なく，そのような理論を新たに体系的に構築した本研究の意義は大きいと考えられる．

従来から実システムのモデリングや制御系設計において，モデルやコントローラを補間することに対する多くの検討があったと思われる．しかし，どのような補間を行えばよいのかという問題に直面したとき，試行錯誤や経験的な調整といった方法によって，問題に対する答を見つけだしていたことが数多くあったのではないだろうか．本研究で得られた成果は，モデルやコントローラを補間するときの，理論に基づくシステマティックな方法を与えており，実用面においても研究成果の意義は大きいと思われる．

今後の研究課題について述べておく．本研究では，補間コントローラによる制御仕様として，（第7章を除いて）制御系の安定化のみを考えている．制御系がもつべき特性として安定性は最優先されるべきものなので，これを保証するような補間コントローラの設計法を明らかにした本研究の意義は大きいと思われるが，より多くの実システムへの適用のためには，安定化以外の制御仕様も考慮した制御問題を考える必要がある．また，補間の形式についても考察の余地がある．本

研究ではモデルおよびコントローラの補間に既約分解の線形補間を用いているが，文献 [13] では線形補間を拡張した双一次補間を導入している．これらのような補間に限らず，より多くの自由度をもつ補間方法を考えることにより，表現可能な補間モデルのクラスを広くしたり，補間コントローラの安定化能力をより高くすることができると考えられる．

文献 [38] では，補間モデルと補間コントローラを鉄鋼プラントの圧延プロセスの制御に適用し，良好な制御結果が得られているという報告がされている．このように，本研究が，動特性が変化する実システムの制御系設計の一助となれば幸いである．

参考文献

[1] C. Abdallah, P. Dorato, F. Perez, and D. Docampo: From Nyquist to Kharitonov: Synthesis of Robust Controllers, Preprints of 12th IFAC World Congress, Vol.I, pp.41~44 (1993)

[2] P. Apkarian and P. Gahinet: A Convex Characterization of Gain-Scheduled H_∞ Controllers, IEEE Trans. Automatic Control, Vol.AC-40, pp.853~864 (1995)

[3] B. R. Barmish: Necessary and Sufficient Conditions for Quadratic Stabilizability of an Uncertain Linear System, Journal of Optimization Theory Appl., Vol.46, No.3, pp.399~408 (1985)

[4] G. Becker, A. Packard: Robust Performance of Linear Parametrically Varying Systems Using Parametrically Dependent Linear Feedback, Systems & Control Letters, Vol.23, pp.205~215 (1994)

[5] J. Bernussou, P. L. D. Peres, and J. C. Geromel: A Linear Programming Oriented Procedure for Quadratic Stabilization of Uncertain Systems, Systems & Control Letters, Vol.13, pp.65~72 (1989)

[6] Z. Chen, Y. Hayakawa, and S. Fujii: On the Stabilizability of Plants with Variable Operating Conditions, submitted to 12th IFAC World Congress (1992)

[7] Z. Chen, Y. Hayakawa and S. Fujii: On the Stabilizability of Plants with Variable Operating Conditions, 計測自動制御学会論文集, Vol.30, No.9, pp.999~1004 (1994)

[8] P. J. Davis: Interpolation & Approximation, Braisdell (1963)

[9] P. Gahinet and P. Apkarian: A Linear Matrix Inequality Approach to H_∞ Control, Int. Journal of Robust and Nonlinear Control, No.4, pp.421~448 (1994)

[10] K. C. Gho, M. G. Safonov, and G. P. Papavassilopoulos: A global optimization approach for the BMI problem, Proceedings of the 33rd Conf. on Decision and Control, pp.2009~2014 (1994)

[11] B.K. Ghosh: An Approach to Simultaneous System Design, Part II: Nonswitching Gain and Dynamic Feedback Compensation by Algebraic Geometric Methods, SIAM Journal of Control and Optimization, Vol.26, No.4, pp.919~963 (1988)

[12] 星島，藤岡：BMI 固有値問題の解の上界および下界とその性質，第 40 回システム制御情報学会研究発表講演会論文集，pp.453~454 (1996)

[13] 三島，浅井，原：双一次変換パラメータをもつ補間コントローラ，計測自動制御学会論文集，Vol.32, No.1, pp.45~54 (1996)

[14] T. Iwasaki: Control System Design via LMIs, 計測と制御，Vol.34, No.3, pp.164~169 (1995)

[15] T. Iwasaki and R.E. Skelton: All Controllers for the General H_∞ Control Problem: LMI Existence Conditions and State Space Formulas, Automatica, Vol.30, No.8, pp.1307~1317 (1994)

[16] P.P. Khargonekar and A. Tannenbaum: Non-Euclidean Metrics and the Robust Stabilization of Systems with Parameter Uncertainty, IEEE Trans. Automatic Control, Vol.AC-30, No.10, pp.1005~1013 (1985)

[17] 木村 英紀：ハーディ空間における補間極値問題とシステム理論，計測と制御, Vol.24, No.7, pp.23~32 (1985)

[18] 木村，藤井，森：ロバスト制御，コロナ社 (1994)

[19] 前田，杉江：アドバンスト制御のためのシステム制御理論，朝倉書店 (1990)

[20] M. G. Meyer and G. F. Franklin: A Connection Between Normalized Coprime Factorizations and Linear Quadratic Regulator Theory, IEEE Trans. Automatic Control, Vol.AC-32, No.3, pp.227~228 (1987)

[21] 村松，池田，玉井：動作状態が変化するプラントの制御 — 複数のコントローラの補間 —，第 21 回制御理論シンポジウム資料，pp.213~216 (1992)

[22] 村松，池田：動作状態が変化する制御対象の安定化，第 15 回 Dymamical System Theory シンポジウム資料, pp.53~56 (1992)

[23] 村松，池田，玉井：動作状態が変化する多入出力システムの安定化，システム制御情報学会論文誌，Vol.7, No.2, pp.42~50 (1994)

[24] 村松，池田，星井：動作状態が変化する制御対象の安定化，計測自動制御学会論文集，Vol.31, No.9, pp.1336~1342 (1995)

[25] E. Muramatsu, M. Ikeda, and N. Hoshii: An Interpolated Controller for a Plant with Variable Operating Conditions, Proceedings of the 34th IEEE Conf. Decision and Control, New Orleans, LA, U.S.A., pp.4349~4354 (1995)

[26] 村松，西野，池田：動作環境が変化する多入出力システムの安定化 — 基準モデルの数が 3 以上の場合，システム制御情報学会論文誌，Vol.9, No.4, pp.188~196 (1996)

[27] 村松，池田，松本：既約分解アプローチによる補間モデル集合の安定化 — 動作環境が変化するプラントのロバスト制御 —，計測自動制御学会論文集，Vol.32, No.6, pp.835~843 (1996)

[28] 村松，池田：動作環境が変化する制御対象のモデリング — 既約分解アプローチによる補間モデル —，計測自動制御学会論文集，Vol.32, No.11, pp.1501~1509 (1996)

[29] E. Muramatsu, M. Ikeda, and K. Matsumoto: Stabilization of a Set of Interpolated Plants: A Factorization Approach, Preprints of the 13th IFAC World Congress, Vol.D, pp.137-142 (1996)

[30] E. Muramatsu, M. Ikeda, and T. Tamai: Stabilization of a Multi-Input Multi-Output Plant with Variable Operating Conditions, Proceedings of the 2nd World Congress on Nonlinear Analysts (1996)

[31] E. Muramatsu and M. Ikeda: Modeling of a Plant with Variable Operating Conditions: An Interpolation of Coprime Factorization Models, Proceedings of the 35th IEEE Conf. Decision and Control, Kobe, Japan, pp.2255-2260 (1996)

[32] 村松，池田：補間アプローチによる磁気浮上系のモデリング，第 41 回システム制御情報学会研究発表講演会資料 (1997)

[33] 村松，横井，大辻，池田：補間アプローチによる原子炉動特性のモデリング，日本原子力学会第35回春の年会要旨集，pp.251 (1997)

[34] E. Muramatsu, M. Ikeda, and S. Nishino: Stabilization of a Plant with Variable Operating Conditions: Interpolation of More than Two Representative Models, Proceedings of the European Control Conference, TU-E-B3 (1997)

[35] E. Muramatsu and M. Ikeda: Stabilization of a Plant with Time-Varying Operating Conditions: An Interpolated Stabilizing Controller, Proceedings of the 36th IEEE Conf. Decision and Control, San Diego, U.S.A. (1997) (to be presented)

[36] E. Muramatsu, M. Ikeda, and N. Hoshii: An Interpolated Controller for Stabilization of a Plant with Variable Operating Conditions, IEEE Trans. Automatic Control (to appear)

[37] C.N. Nett, C.A. Jacobson, and M.J. Balas: A Connection Between State-Space and Doubly Coprime Fractional Representations, IEEE Trans. Automatic Control, Vol.AC-29, No.9, pp.831~832 (1984)

[38] 西野，楢崎，北村，藤田，浅田：補間コントローラを用いた熱延ルーパの高さ制御，システム制御情報学会論文誌，Vol.9, No.11, pp.548~554 (1996)

[39] A. Packard: Gain Scheduling via Linear Fractional Transformations, Systems & Control Letters, Vol.22, pp.79~92 (1994)

[40] A. Rantzer and A. Megretski: A Convex Parametrization of Robustly Stabilizing Controllers, IEEE Trans. Automatic Control, Vol.AC-39, No. 9, pp.1802~1808 (1994)

[41] 首藤，池田，村松：動作環境が変化するシステムに対する2自由度ロバストサーボ系の設計，第35回SICE学術講演会資料，pp.871~872 (1996)

[42] 杉江，川西：物理パラメータ変動を考慮した磁気浮上系の解析と設計，システム制御情報学会論文誌，Vol.8, No.2, pp.70~79 (1995)

[43] 杉江，吉川：2自由度制御系の基本構造とそのサーボ問題への応用，計測自動制御学会論文集，Vol.22, No.2, pp.156~161 (1986)

[44] A. Tannenbaum: Feedback Stabilization of Linear Dynamical Plants with Uncertainty in the Gain Factor, Int. Journal of Control, Vol.32, No.1, pp.1~16 (1980)

[45] M. Vidyasagar: Control System Synthesis: A Factorization Approach, MIT Press (1985)

[46] M. Vidyasagar, H. Kimura: Robust Controllers for Uncertain Linear Multivariable Systems, Automatica, Vol.22, No.1, pp.85~94 (1986)

付録

A. 補間コントローラの状態空間表現

第 2.2 節で定義された補間コントローラ

$$K(\alpha) = \tilde{D}_K^{-1}(\alpha)\tilde{N}_K(\alpha)$$
$$\begin{cases} \tilde{N}_K(\alpha) = \alpha\tilde{N}_{K1} + (1-\alpha)\tilde{N}_{K2} \\ \tilde{D}_K(\alpha) = \alpha\tilde{D}_{K1} + (1-\alpha)\tilde{D}_{K2} \end{cases} \tag{A.1}$$

の状態空間表現を求める.

まず, 基準モデル G_i $(i = 1, 2)$ の状態空間表現を

$$G_i = \left[\begin{array}{c|c} A_i & B_i \\ \hline C_i & D_i \end{array}\right] \quad , \quad i = 1, 2 \tag{A.2}$$

とし, これらの既約分解 N_i, D_i $(i = 1, 2)$ の状態空間表現が,

$$\begin{bmatrix} N_i \\ D_i \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} A_i - B_iF_i & B_i \\ \hline C_i & 0 \\ -F_i & I \end{array}\right] \quad , \quad i = 1, 2 \tag{A.3}$$

と表わされるとする. このとき, (2.10) 式を満たす X_i, Y_i, $\tilde{D}_i$, $\tilde{N}_i$, $\tilde{X}_i$, $\tilde{Y}_i \in RH_\infty$ の状態空間表現は,

$$X_i = \left[\begin{array}{c|c} A_i - L_iC_i & L_i \\ \hline F_i & 0 \end{array}\right] \quad , \quad Y_i = \left[\begin{array}{c|c} A_i - L_iC_i & B_i \\ \hline F_i & I \end{array}\right] \tag{A.4}$$

$$\tilde{N}_i = \left[\begin{array}{c|c} A_i - L_iC_i & B_i \\ \hline C_i & 0 \end{array}\right] \quad , \quad \tilde{D}_i = \left[\begin{array}{c|c} A_i - L_iC_i & L_i \\ \hline -C_i & I \end{array}\right] \tag{A.5}$$

$$\tilde{X}_i = \left[\begin{array}{c|c} A_i - B_i F_i & L_i \\ \hline F_i & 0 \end{array}\right] \ , \ \tilde{Y}_i = \left[\begin{array}{c|c} A_i - B_i F_i & L_i \\ \hline C_i & I \end{array}\right] \tag{A.6}$$

と表わすことができる．ここで，L_i $(i = 1, 2)$ は，$A_i - L_i C_i$ を安定にする任意の行列である．

ここで，(2.9) 式における R_i $(i = 1, 2)$ の状態空間表現が，

$$R_i = \left[\begin{array}{c|c} A_{Ri} & B_{Ri} \\ \hline C_{Ri} & 0 \end{array}\right] \ , \ i = 1, 2 \tag{A.7}$$

によって得られているとする．このとき，(A.1) 式 ~ (A.7) 式を用いると，補間コントローラの状態空間表現は，

$$K(\alpha) = \tilde{D}_K(\alpha)^{-1} \tilde{N}_K(\alpha) = \left[\begin{array}{c|c} A_K(\alpha) & B_K(\alpha) \\ \hline C_K & 0 \end{array}\right] \tag{A.8}$$

$$A_K(\alpha) = \begin{bmatrix} A_1 - L_1 C_1 - \alpha B_1 F_1 & \alpha B_1 C_{R1} & -\alpha B_1 F_2 & \alpha B_1 C_{R2} \\ B_{R1} C_1 & A_{R1} & 0 & 0 \\ -(1-\alpha) B_2 F_1 & (1-\alpha) B_2 C_{R1} & A_2 - L_2 C_2 - (1-\alpha) B_2 F_2 & (1-\alpha) B_2 C_{R2} \\ 0 & 0 & B_{R2} C_2 & A_{R2} \end{bmatrix}$$

$$B_K(\alpha) = \begin{bmatrix} -\alpha L_1^T & \alpha B_{R1}^T & -(1-\alpha) L_2^T & (1-\alpha) B_{R2}^T \end{bmatrix}^T$$

$$C_K = \begin{bmatrix} -F_1 & C_{R1} & -F_2 & C_{R2} \end{bmatrix}$$

となる．

B. 補間モデルの既約性について

ここでは，第3章の手法によって得られた補間モデルが既約であるかどうか，すなわち，基準モデルの既約分解が得られたとき，(2.2) 式における $N(\alpha)$ と $D(\alpha)$ の既約性を調べる方法を示す．

まず，基準モデルの既約分解 N_i, D_i $(i=1,2)$ が，(3.4) 式で表されるとき，$N(\alpha)$, $D(\alpha)$ の状態空間表現は，

$$\begin{bmatrix} N(\alpha) \\ D(\alpha) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} A_1 - B_1F_1 & 0 & \alpha B_1 J_1 \\ 0 & A_2 - B_2F_2 & (1-\alpha)B_2J_2 \\ \hline C_1 & C_2 & 0 \\ -F_1 & -F_2 & \alpha J_1 + (1-\alpha)J_2 \end{array}\right]$$

となる．これより，

$$R(s) \triangleq \begin{bmatrix} A_1 - B_1F_1 - sI & 0 & \alpha B_1 J_1 \\ 0 & A_2 - B_2F_2 - sI & (1-\alpha)B_2J_2 \\ C_1 & C_2 & 0 \\ -F_1 & -F_2 & \alpha J_1 + (1-\alpha)J_2 \end{bmatrix}$$

と定義すると，$N(\alpha)$ と $D(\alpha)$ が既約であることは，

$$\mathrm{rank}R(s) = n_1 + n_2 + k,\ \forall s \in C_{+\epsilon}\ ,\quad \forall \alpha \in [0,1] \tag{B.1}$$

が成り立つことと等価である．ただし，n_i $(i=1,2)$ は A_i の次数，k は入力の数，$C_{+\epsilon}$ は閉右半平面を表わす．ここで，$\alpha = 0,1$ においては，$N(\alpha)$ と $D(\alpha)$ は既約であるから，(B.1) 式が成り立つ．

$$\mathrm{rank}R(s) < n_1 + n_2 + k$$

となる s の α に関する連続性より，(B.1) 式が成り立つことは，

$$\mathrm{rank}R(j\omega) = n_1 + n_2 + k,\ \forall \omega \in [-\infty, \infty]\ ,\quad \forall \alpha \in (0,1)$$

すなわち，

$$R^T(-j\omega)R(j\omega) > 0,\ \forall \omega \in [-\infty, \infty]\ ,\quad \forall \alpha \in (0,1)$$

が成り立つことと等価である．これにより，$N(\alpha)$ と $D(\alpha)$ の既約性を調べることができる．

C. 既約分解のクラスについて

ここでは，(3.3) 式のように，基準モデル G_i の状態空間表現が与えられたとき，行列 F_i, J_i $(i = 1,2)$ をパラメータとする，(3.4) 式の既約分解 (N_i, D_i) $(i = 1,2)$ のクラスについて考察する．記述の簡略化のため，G_i などにおける添え字 $_i$ は省略し，m 次の基準モデル G に対して，n 次 $(n \geq m)$ の可安定かつ可検出な状態空間表現

$$G = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & 0 \end{array}\right] \tag{C.1}$$

が与えられており，

$$G = ND^{-1}$$
$$N, D \in RH_\infty$$

を満たす既約分解 (N, D) を，状態空間表現

$$\begin{bmatrix} N \\ D \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} A - BF & BJ \\ \hline C & 0 \\ -F & J \end{array}\right] \tag{C.2}$$

で表わすとする．ただし，F は $A - BF$ を安定にする行列であり，J は正則な行列とする．

まず，$m = n$，すなわち，(C.1) 式が最小実現の場合，つぎの命題が成り立つ．

【命題 B.1】 G は m 次であり，(C.1) 式により G のある最小実現が与えられているとする．このとき，適当に F, J を決めることにより，(C.2) 式は，m 次の任意の既約分解を表わす．

（証明） m 次の任意の既約分解を (N_c, D_c) とし，その最小実現を

$$\begin{bmatrix} N_c \\ D_c \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} A_c & B_c \\ \hline C_{Nc} & 0 \\ C_{Dc} & J_c \end{array}\right] \tag{C.3}$$

とする．これらは，$G = N_c D_c^{-1}$ を満たすので，

$$
\begin{aligned}
G &= N_c D_c^{-1} \\
&= \left[\begin{array}{c|c} A_c & B_c \\ \hline C_{Nc} & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} A_c & B_c \\ \hline C_{Dc} & J_c \end{array}\right]^{-1} \\
&= \left[\begin{array}{c|c} A_c - B_c J_c^{-1} C_{Dc} & B_c J_c^{-1} \\ \hline C_{Nc} & 0 \end{array}\right] \qquad \text{(C.4)} \\
&= \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & 0 \end{array}\right] \qquad \text{(C.5)}
\end{aligned}
$$

が得られる．(C.4) 式と (C.5) 式がともに m 次の状態空間表現であることから，

$$T(A_c - B_c J_c^{-1} C_{Dc}) T^{-1} = A$$

$$T B_c J_c^{-1} = B \ , \quad C_{Nc} T^{-1} = C$$

すなわち，

$$A_c = T^{-1} A T + T^{-1} B C_{Dc}$$

$$B_c = T^{-1} B J_c \ , \quad C_{Nc} = C T$$

を満たす正則な行列 T が存在する．これを用いると，(C.3) 式は

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} N_c \\ D_c \end{bmatrix} &= \left[\begin{array}{c|c} T^{-1} A T + T^{-1} B C_{Dc} & T^{-1} B J_c \\ \hline C T & 0 \\ C_{Dc} & J_c \end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{c|c} A + B C_{Dc} T^{-1} & B J_c \\ \hline C & 0 \\ C_{Dc} T^{-1} & J_c \end{array}\right]
\end{aligned}
$$

と表わされる．この式は，$-C_{Dc} T^{-1}$ を F に，J_c を J に置き換えれば，(C.2) 式と一致する．したがって，(C.2) 式は，適当な F と J によって，m 次の任意の既約分解を表わす．

一般に，G よりも高次の既約分解が存在する．すなわち，m 次の G に対して，n $(n > m)$ 次の既約分解 (N, D) が存在する．これを，(C.2) 式によって表現する場合には，(C.1) 式を最小実現とせず，可安定あるいは可検出なものにすることが考えられる．しかし，(C.1) 式に不可制御部分を持たせて，A の次数を大きくしても，高次の既約分解を表現することには寄与しない．なぜなら，(A, B) が不可制御のとき，いかなる F, J に対しても，(C.2) 式における，$(A - BF, BJ)$

も不可制御となるからである．一方，(A, C) に安定な不可観測部分を持たせて，A の次数を n 次とすれば，G よりも高次の既約分解を (C.2) 式で表わすことができる．

ただし，こうしても，n 次の任意の既約分解を表現できるとは限らない．例えば，

$$G = \frac{1}{s-1}$$

の既約分解として，

$$N = \frac{(s+\beta)}{(s+1)(s+2)},\ D = \frac{(s-1)(s+\beta)}{(s+1)(s+2)} \tag{C.6}$$

が存在する．ただし，β は 1,2 以外の任意の正数とする．いま，(C.1) 式によって，G の (A, B) が可制御，(A, C) が可検出な 2 次の状態空間表現が与えられているとし，(C.2) 式の F, J をパラメータとして，任意の β に対する (C.6) 式を表現できるか考えよう．(C.6) 式の N および D の極が -1 と -2 であることより，(C.2) 式における F は，$A - BF$ の固有値が $-1, -2$ となるように一意に決まる（可制御性より，そのような F は存在する）．(C.2) 式において，J の値を変えても，N, D の零点の値は変わらない．したがって，F が一意に決まると，(C.2) 式から得られる N, D において，(C.6) 式の $-\beta$ に相当する零点は固定されてしまい，任意の β に対する (C.6) 式を表現できない．

D. 第3.3節における行列 M の詳細

(3.8) 式の M は，(3.7) 式と (3.9) 式を代入すると，

$$M = [M_{ij}],\ i = 1, \cdots, 6,\ j = 1, \cdots, 6$$

の (6,6) ブロックによって表わされる．ただし，各ブロックはつぎのとおりである．

$$\begin{aligned}
M_{11} &= A_n P_{11} + P_{11} A_n^T \\
M_{12} &= A_n P_{12} + P_{12} A_1^T - P_{12} F_1^T B_1^T \\
M_{13} &= A_n P_{13} + P_{13} A_2^T - P_{13} F_2^T B_2^T \\
M_{14} &= P_{11} C_{Nn}^T + P_{12} C_1^T + P_{13} C_2^T \\
M_{15} &= P_{11} C_{Dn}^T - P_{12} F_1^T - P_{13} F_2^T \\
M_{16} &= B_n \\
M_{22} &= A_1 P_{22} - B_1 F_1 P_{22} + P_{22} A_1^T - P_{22} F_1^T B_1^T \\
M_{23} &= A_1 P_{23} - B_1 F_1 P_{23} + P_{23} A_2^T - P_{23} F_2^T B_2^T \\
M_{24} &= P_{12}^T C_{Nn}^T + P_{22} C_1^T + P_{23} C_2^T \\
M_{25} &= P_{12}^T C_{Dn}^T - P_{22} F_1^T - P_{23} F_2^T \\
M_{26} &= -\alpha_0 B_1 J_1 \\
M_{33} &= A_2 P_{33} - B_2 F_2 P_{33} + P_{33} A_2^T - P_{33} F_2^T B_2^T \\
M_{34} &= P_{13}^T C_{Nn}^T + P_{23}^T C_1^T + P_{33} C_2^T \\
M_{35} &= P_{13}^T C_{Dn}^T - P_{23}^T F_1^T - P_{33} F_2^T \\
M_{36} &= -(1 - \alpha_0) B_2 J_2 \\
M_{44} &= -\gamma I \\
M_{45} &= 0 \\
M_{46} &= 0
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
M_{55} &= -\gamma I \\
M_{56} &= I - \alpha_0 J_1 - (1-\alpha_0) J_2 \\
M_{66} &= -\gamma I
\end{aligned}
$$

これら以外のブロックは、M の対称性により定まる.

E. 無限遠点の零点が重複している補間問題について

ここでは，b の無限遠点の零点が重複している場合の補間問題，すなわち，

$$\begin{aligned} &\Phi(s) \in E_2\ , \quad \forall s \in C_{+e} \\ &r \in RH_\infty \end{aligned} \tag{E.1}$$

を満たす

$$\Phi = a + rb, \quad a, b \in RH_\infty \tag{E.2}$$

の存在性が，

$$\begin{aligned} &\phi(s) \in E_2\ , \quad \forall s \in C_{+e} \\ &\tilde{r} \in RH_\infty \end{aligned} \tag{E.3}$$

を満たす

$$\phi = a + \tilde{r}\tilde{b}, \quad a, \tilde{b} \in RH_\infty \tag{E.4}$$

の存在性に等価であることを示す．ただし，$\tilde{b}$ は，その無限遠点の零点に重複はなく，虚軸上および C_+ における零点は b の零点と一致している伝達関数である．ここで，b の無限遠点の零点の重複度を ν とする，すなわち，$\kappa(b) = \nu$ とし，$\tilde{b}$ として簡単のため，

$$\tilde{b} = (s+1)^{\nu-1} b,$$

とおく．

まず，(E.2) 式に対する補間問題が解をもつとする．このときの解，$r \in RH_\infty$ に対して，

$$\tilde{r} = \frac{1}{(s+1)^{\nu-1}} r$$

が (E.4) 式の補間問題の解になることは明らかである．

つぎに，(E.4) 式の補間問題が解をもつとする．このときの解 $\tilde{r}$ を用いて，

$$r = \frac{(s+1)^{\nu-1}}{(\varepsilon s+1)^{\nu-1}} \tilde{r} \in RH_\infty$$

を構成する．ただし，ε は十分小さな正数である．このときの (E.2) 式の Φ が (E.1) 式を満たすことを示すために，

$$\Phi - \phi = \left[\frac{1}{(\varepsilon s + 1)^{\nu-1}} - 1\right] \tilde{r}\tilde{b}.$$

について考える．この右辺の $1/(\varepsilon s + 1)^{\nu-1} - 1$ と $\tilde{r}\tilde{b}$ は $C_{+\epsilon}$ において有界である．そして，前者は ε を適当に小さく選ぶことによって，$s = 0$ のまわりの任意に広い範囲の $C_{+\epsilon}$ において，いくらでも 0 に近付けることができる．一方，後者は，$\tilde{r}$ がプロパーで $\tilde{b}$ が厳密にプロパーだから，$|s| \to \infty$ とともに 0 に近付く．したがって，それらの積である Φ と Ψ の差は，$C_{+\epsilon}$ においていくらでも小さくすることができる．したがって，(E.3) 式が成り立つとき，(E.1) 式も成り立つ．

F. 変動要因が複数ある場合の補間モデル

動作環境によって動特性が変化する制御対象において，変動要因が複数存在する場合，(5.2) 式の補間モデルおける基準モデルの選び方と，変動要因と補間パラメータ α_i $(i = 1, \cdots, p)$ の関係の例を示す．ここでは，変動要因が 2 つの場合，4 つの基準モデルを用いることによって，すべての変動を表すような補間モデルが構成できる例を示す．

つぎのような制御対象について考える．

$$G(s) = \frac{1}{c_1 s^2 + c_2 s + 1} \tag{F.1}$$

ただし，パラメータ c_1, c_2 は，

$$1 \leq a \leq 2, \quad 4 \leq b \leq 9$$

の値をとる制御対象の変動要因 a, b によってつぎのように変化するものとする．

$$c_1 = a^2 + 3, \quad c_2 = -\sqrt{b} + 1 \tag{F.2}$$

いま，(F.1) 式のような制御対象に対して，基準モデルを

$$G_1 = \frac{1}{4s^2 - s + 1}, \quad G_2 = \frac{1}{7s^2 - s + 1}$$
$$G_3 = \frac{1}{4s^2 - 2s + 1}, \quad G_4 = \frac{1}{7s^2 - 2s + 1}$$

とし，既約分解を

$$\tilde{N}_1 = \tilde{N}_2 = \tilde{N}_3 = \tilde{N}_4 = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$
$$\tilde{D}_1 = \frac{4s^2 - s + 1}{(s+1)(s+2)}, \quad \tilde{D}_2 = \frac{7s^2 - s + 1}{(s+1)(s+2)}$$
$$\tilde{D}_3 = \frac{4s^2 - 2s + 1}{(s+1)(s+2)}, \quad \tilde{D}_4 = \frac{7s^2 - 2s + 1}{(s+1)(s+2)}$$

とする．これらの既約分解の補間によって表される (5.2) 式の補間モデル G は

$$G = \frac{1}{\{4(\alpha_1 + \alpha_3) + 7(\alpha_2 + \alpha_4)\}s^2 - \{(\alpha_1 + \alpha_2)}$$

$$\overline{+2(\alpha_3+\alpha_4)\}s+1}$$

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=1,\ \ 0\le\alpha_i\le 1$$

となる．これは，(F.1) 式の G のすべてを表現する（基準モデルの数が 2 つでは，(F.1) 式の G のすべてを補間モデルの形式で表現することはできない）．補間コントローラを用いる場合，検知した変動要因 a, b に応じて，α_i $(i=1,\cdots,4)$ を

$$\begin{aligned}&\alpha_1+\alpha_3=\frac{4-a^2}{3}\ ,\ \ \alpha_1+\alpha_2=3-\sqrt{b}\\&\alpha_4=1-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3,\ \ 0\le\alpha_i\le 1\end{aligned}\tag{F.3}$$

を満たすものとして求められる．これらは

$$\begin{aligned}\alpha_1&=\frac{(a^2-4)(\sqrt{b}-3)}{3}+\varepsilon\\\alpha_2&=\frac{(a^2-1)(-\sqrt{b}+3)}{3}-\varepsilon\\\alpha_3&=\frac{(a^2-4)(-\sqrt{b}+2)}{3}-\varepsilon\\\alpha_4&=\frac{(a^2-1)(\sqrt{b}-2)}{3}+\varepsilon\end{aligned}$$

と表わされる．ただし，ε は上式において $0\le\alpha_i\le 1$ の制約を満たす任意の実数である．

なお，(F.2) 式と (F.3) 式に示すように，制御対象の変動要因 (a,b) と伝達関数の係数 (c_1,c_2) およびパラメータ α_i の関係は線形である必要はない．

G. 既約分解の状態空間表現

ある伝達関数行列 G_i の既約分解の状態空間表現としては，文献 [37] によるものが通常用いられる．しかし，これは，伝達関数が与えられたとき，その既約分解のクラスの中のある一部を状態空間で表現する方法を与えているにすぎない．たとえば，$D_i(\infty)$ が単位行列であるものに限られる．ここでは，ある伝達関数行列の任意の既約分解

$$G_i = N_i D_i^{-1}\ ,\quad i = 1, 2$$

が与えられているとし，この N_i, D_i $(i = 1, 2)$ の状態空間表現を求める命題を示す．

【命題 E.1】 任意の既約分解 (N_i, D_i) と，それに対して (2.10) 式を満たす $\tilde{N}_i$, $\tilde{D}_i$, X_i, Y_i, $\tilde{X}_i$, $\tilde{Y}_i \in RH_\infty$ の状態空間表現は，適当な行列 $\bar{A}_{Fi}$, $\bar{A}_{Li}$, $\bar{B}_i$, $\bar{C}_i$, $\bar{F}_i$, $\bar{L}_i$, $\bar{J}_i$ を用いてつぎのように表わすことができる．

$$\begin{aligned}
N_i &= \left[\begin{array}{c|c} \bar{A}_{Fi} & \bar{B}_i \\ \hline \bar{C}_i & 0 \end{array}\right],\ D_i = \left[\begin{array}{c|c} \bar{A}_{Fi} & \bar{B}_i \\ \hline -\bar{J}_i\bar{F}_i & \bar{J}_i \end{array}\right] \\
X_i &= \left[\begin{array}{c|c} \bar{A}_{Li} & \bar{L}_i \\ \hline \bar{F}_i & 0 \end{array}\right],\ Y_i = \left[\begin{array}{c|c} \bar{A}_{Li} & \bar{B}_i\bar{J}_i^{-1} \\ \hline \bar{F}_i & \bar{J}_i^{-1} \end{array}\right] \\
\tilde{N}_i &= \left[\begin{array}{c|c} \bar{A}_{Li} & \bar{B}_i\bar{J}_i \\ \hline \bar{C}_i & 0 \end{array}\right],\ \tilde{D}_i = \left[\begin{array}{c|c} \bar{A}_{Li} & \bar{L}_i \\ \hline -\bar{C}_i & I \end{array}\right] \\
\tilde{X}_i &= \left[\begin{array}{c|c} \bar{A}_{Fi} & \bar{L}_i \\ \hline \bar{J}_i\bar{F}_i & 0 \end{array}\right],\ \tilde{Y}_i = \left[\begin{array}{c|c} \bar{A}_{Fi} & \bar{L}_i \\ \hline \bar{C}_i & I \end{array}\right]
\end{aligned} \tag{G.1}$$

ただし，$\bar{A}_{Fi}$, $\bar{A}_{Li}$ は

$$\bar{A}_{Fi} + \bar{B}_i\bar{F}_i = \bar{A}_{Li} + \bar{L}_i\bar{C}_i \tag{G.2}$$

を満たす安定な行列である．

（証明）　伝達関数 G_i の可安定かつ可検出な状態空間表現を

$$G_i = \left[\begin{array}{c|c} A_i & B_i \\ \hline C_i & 0 \end{array}\right]$$

としたとき，

$$G_i = \tilde{D}_{Ni}^{-1}\tilde{N}_{Ni} = N_{Ni}D_{Ni}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} Y_{Ni} & X_{Ni} \\ -\tilde{N}_{Ni} & \tilde{D}_{Ni} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D_{Ni} & -\tilde{X}_{Ni} \\ N_{Ni} & \tilde{Y}_{Ni} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

を満たす RH_∞ 上の 1 つの既約分解の状態空間表現は，文献 [37] の方法によれば，

$$\tilde{N}_{Ni} = \left[\begin{array}{c|c} A_{Li} & B_i \\ \hline C_i & 0 \end{array}\right],\ \tilde{D}_{Ni} = \left[\begin{array}{c|c} A_{Li} & L_i \\ \hline -C_i & I \end{array}\right]$$

$$\tilde{X}_{Ni} = \left[\begin{array}{c|c} A_{Fi} & L_i \\ \hline F_i & 0 \end{array}\right],\ \tilde{Y}_{Ni} = \left[\begin{array}{c|c} A_{Fi} & L_i \\ \hline C_i & I \end{array}\right]$$

$$N_{Ni} = \left[\begin{array}{c|c} A_{Fi} & B_i \\ \hline C_i & 0 \end{array}\right],\ D_{Ni} = \left[\begin{array}{c|c} A_{Fi} & B_i \\ \hline -F_i & I \end{array}\right]$$

$$X_{Ni} = \left[\begin{array}{c|c} A_{Li} & L_i \\ \hline F_i & 0 \end{array}\right],\ Y_{Ni} = \left[\begin{array}{c|c} A_{Li} & B_i \\ \hline F_i & I \end{array}\right] \tag{G.3}$$

によって得ることができる．ただし，

$$A_{Fi} = A_i - B_iF_i, \quad A_{Li} = A_i - L_iC_i$$

であり，F_i，L_i は，それぞれ A_{Fi}，A_{Li} を安定化する任意の行列である．ここでは，この特別な既約分解を用いて，G_i の任意の既約分解 N_i, D_i が与えられたとき，それらと (2.10) 式を満たす $\tilde{N}_i$, $\tilde{D}_i$, X_i, Y_i, $\tilde{X}_i$, $\tilde{Y}_i$ の状態空間表現が (G.1) 式のように得られることを示す．

まず，$G_i = N_iD_i^{-1}$ を満たす任意の N_i, D_i は，(G.3) 式の N_{Ni}, D_{Ni} と RH_∞ 上のユニモジュラ行列 V_i を用いて

$$N_i = N_{Ni}V_i\ ,\quad D_i = D_{Ni}V_i \tag{G.4}$$

と表わすことができる．このような N_i, D_i に対して，

$$X_iN_i + Y_iD_i = I$$

を満たす X_i, Y_i は，(G.3) 式の X_{Ni}, Y_{Ni} と V_i を用いて

$$X_i = V_i^{-1} X_{Ni}\ ,\quad Y_i = V_i^{-1} Y_{Ni} \tag{G.5}$$

と表わされる．いま，V_i の状態空間表現を

$$V_i = \left[\begin{array}{c|c} A_{vi} & B_{vi} \\ \hline C_{vi} & J_{vi} \end{array}\right]$$

とすれば，V_i^{-1} の状態空間表現は

$$V_i^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} A_{vi} - B_{vi} J_{vi}^{-1} C_{vi} & -B_{vi} J_{vi}^{-1} \\ \hline J_{vi}^{-1} C_{vi} & J_{vi}^{-1} \end{array}\right]$$

である．これらと (G.3) 式を，(G.4) 式，(G.5) 式のように組み合わせると，N_i, D_i, X_i, Y_i の状態空間表現がつぎのように得られる．

$$N_i = \left[\begin{array}{cc|c} A_{Fi} & B_i C_{vi} & B_i J_{vi} \\ 0 & A_{vi} & B_{vi} \\ \hline C_i & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$D_i = \left[\begin{array}{cc|c} A_{Fi} & B_i C_{vi} & B_i J_{vi} \\ 0 & A_{vi} & B_{vi} \\ \hline -F_i & C_{vi} & J_{vi} \end{array}\right]$$

$$X_i = \left[\begin{array}{cc|c} A_{Li} & 0 & L_i \\ B_{vi} J_{vi}^{-1} F_i & A_{vi} - B_{vi} J_{vi}^{-1} C_{vi} & 0 \\ \hline J_{vi}^{-1} F_i & -J_{vi}^{-1} C_{vi} & 0 \end{array}\right]$$

$$Y_i = \left[\begin{array}{cc|c} A_{Li} & 0 & B_i \\ B_{vi} J_{vi}^{-1} F_i & A_{vi} - B_{vi} J_{vi}^{-1} C_{vi} & B_{vi} J_{vi}^{-1} \\ \hline J_{vi}^{-1} F_i & -J_{vi}^{-1} C_{vi} & J_{vi}^{-1} \end{array}\right]$$

ここで，

$$\bar{A}_{Fi} = \begin{bmatrix} A_{Fi} & B_i C_{vi} \\ 0 & A_{vi} \end{bmatrix}$$

$$\bar{A}_{Li} = \begin{bmatrix} A_{Li} & 0 \\ B_{vi} J_{vi}^{-1} F_i & A_{vi} - B_{vi} J_{vi}^{-1} C_{vi} \end{bmatrix}$$

$$\bar{B}_i = \begin{bmatrix} B_i J_{vi} \\ B_{vi} \end{bmatrix}\ ,\ \bar{L}_i = \begin{bmatrix} L_i \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
\bar{C}_i &= \begin{bmatrix} C_i & 0 \end{bmatrix} \\
\bar{F}_i &= \begin{bmatrix} J_{vi}^{-1} F_i & -J_{vi}^{-1} C_{vi} \end{bmatrix} \\
\bar{J}_i &= J_{vi}
\end{aligned}
\tag{G.6}
$$

と定義したものが，(G.1) 式の N_i, D_i, X_i, Y_i の状態空間表現である．(G.6) 式の行列が (G.2) 式を満たすこと，そして，(G.1) 式で表現される $\tilde{N}_i$, $\tilde{D}_i$, $\tilde{X}_i$, $\tilde{Y}_i$ が (2.10) 式を満たすことは容易に確かめられる．以上で命題が成立することが証明された．

謝辞

本研究を行うにあたり，終始適切なご教示，ご指導を賜った大阪大学工学部，池田雅夫教授に心から感謝の意を表する．また，本論文をまとめるにあたり，数々のご助言をいただいた大阪大学工学部，前田肇教授，大阪大学基礎工学部，潮俊光教授に深く感謝する．

筆者に研究の機会を与えられ，さまざまなご援助，ご配慮をいただいた神戸商船大学商船学部，大辻友雄教授に感謝の意を表する．

筆者に制御理論の研究の楽しさをご教授くださった名古屋大学工学部，細江繁幸教授に感謝の意を表する．筆者が名古屋大学在学中，数々の貴重なご助言を賜った理化学研究所，伊藤正美先生に謝意を表する．

筆者が住友金属工業株式会社に在職中，お世話いただいた高橋亮一氏に感謝する．

本研究に関して，貴重なご教示をいただいた名古屋大学工学部，早川義一教授，東京工業大学，原辰次教授，神戸大学工学部，藤崎泰正助教授に感謝の意を表する．

本研究に関して，ご助言，ご協力をいただいた神戸大学，玉井孝之氏（現在，三井信託銀行），西野都氏（現在，株式会社神戸製鋼所），星井直樹氏（現在，三菱重工業株式会社），首藤博司氏（現在，兵庫県警察），松本邦宏氏（現在，川崎重工業株式会社）に感謝の意を表する．

また，度々御世話になった神戸大学工学部システム工学科，第二講座，第三講座の皆様，大阪大学工学部電子制御機械工学科，制御工学研究室の皆様に謝意を表する．

親切なご援助とご配慮をいただいた神戸商船大学，井川博雅助教授，大辻研究室の皆様，教職員各位に謝意を表する．