Kimura, I.
Osaka J. Math.
5 (1968), 243-271

SUR LE THÉORÈME DE LA CONTINUITÉ

IKUO KIMURA

(Received February 1, 1968)
(Revised September 5, 1968)

Introduction*. Comme on le sait bien, un domaine dans l'espace de plusieurs variables complexes satisfait au théorème de la continuité, c'est-à-dire qu'il est pseudoconvexe, s'il est un domaine d'holomorphie. Réciproquement, un domaine pseudoconvexe est un domaine d'holomorphie (K. Oka [1, 2]). Dans le présent mémoire, j'examine le théorème de la continuité en détail et introduis quatre nouvelles définitions de pseudoconvexité. Le but principal de ce mémoire est de prouver que nos nouvelles définitions sont équivalentes à la classique. En outre, j'étudie le rapport de la pseudoconvexité d'un domaine à celle de la section par un ensemble analytique régulier d'une certaine sorte. Enfin j'étudie des relations entre la pseudoconvexité et le rayon de Hartogs. Nous considérons toujours les ensembles ouverts et univalents que nous appelons ≪régions≫ ; mais tous les énoncés subsistent pour les régions multivalentes.

En terminant cette introduction, l'auteur se fait un honneur d'exprimer ses remercîments les plus vifs à MM. K. Kunugi, Y. Tôki et E. Sakai, pour l'intérêt qu'ils lui ont témoigné et pour les conseils qu'ils lui ont donnés au cours de la préparation de ce mémoire.

1. Préliminaire. Soit D une région, c'est-à-dire, un ensemble ouvert dans l'espace de m variables complexes $z_1, z_2, \cdots, z_m$ $(m>1)$. Soit F_t, $0\leqq t\leqq 1$ une famille de surfaces analytiques définies par

$$F_t\colon z_i=f_i(\zeta, t),\ |\zeta|\leqq 1,\ i=1, 2, \cdots, m\,,$$

où les $f_i(\zeta, t)$ sont des fonctions continues sur $|\zeta|\leqq 1$, $0\leqq t\leqq 1$ et holomorphes en ζ dans $|\zeta|<1$ pour t fixe. On dit que D est *pseudoconvexe* ou *D satisfait au théorème de la continuité*, si nous avons toujours $F_0\subset D$ pour toute famille de surfaces analytiques de la forme expliquée ci-dessus et satisfaisant aux conditions Fr. $F_0\subset D$[1] et $F_t\subset D$ pour $0<t\leqq 1$.

* Ce mémoire est une exposition systématique des résultats publiés dans [5, 6].

1) Fr. F_0 désigne la frontière de F_0.

Concernant la pseudoconvexité, on sait:

Théorème (K. Oka [1, 2]). *Si une région est pseudoconvexe, toutes ses composantes connexes sont des domaines d'holomorphie.*

En outre on sait:

Proposition. *Soit D_n, $n=1, 2, \cdots$ une suite croissante de régions pseudoconvexes; alors sa limite $D=\lim D_n$ est pseudoconvexe.*

Soit $V=V(z_1, z_2, \cdots, z_m)$ une fonction réelle définie dans une région D. On dit que V est *plurisousharmonique* dans D, si V satisfait aux conditions suivantes.

1°. On a $-\infty \leqq V < +\infty$ dans D.

2°. V est semi-continu supérieurement dans D.

3°. Si L est une droite complexe définie par

$$z_i = a_i u + b_i,\ i = 1, 2, \cdots, m,$$

où a_i et b_i sont des constantes arbitraires et u est un paramètre complexe, alors la trace de V sur une composante connexe quelconque de la région

$$\{u \mid (a_1 u + b_1, \cdots, a_m u + b_m) \in D\}$$

est sousharmonique ou égale à la constante $-\infty$.

Enfin on sait le lemme suivant:

Lemme (P. Lelong [3], H.J. Bremermann [4]). *Une région D est pseudoconvexe, s'il existe une fonction plurisousharmonique dans D et tendant vers l'infini positif lorsque le point de D s'approche de la frontière de D.*

Soit D une région et soit $(z_1^0, z_2^0, \cdots, z_m^0)$ un point quelconque de D. Désignons par $D(z_1^0, z_2^0, \cdots, z_{m-1}^0)$ la section

$$\{z_m \mid (z_1^0, z_2^0, \cdots, z_{m-1}^0, z_m) \in D\}$$

de D par le plan $z_1=z_1^0$, $z_2=z_2^0, \cdots, z_{m-1}=z_{m-1}^0$. Soit

$$R_{z_m^0}(z_1^0, z_2^0, \cdots, z_{m-1}^0)$$

la distance entre le point z_m^0 et la frontière de la région $D(z_1^0, z_2^0, \cdots, z_{m-1}^0)$; alors la fonction $R_{z_m}(z_1, z_2, \cdots, z_{m-1})$ est définie et semi-continue inférieurement dans D; cette fonction est, par définition, *le rayon de Hartogs de D par rapport à* z_m[2].

2. Définitions. Soit D une région dans l'espace de m variables $z_1, z_2, \cdots, z_m$; en désignant par x une des variables z_i de l'espace et par $y_1, y_2, \cdots, y_{m-1}$ les

2) Cf. K. Oka [1, 2].

autres, définissons quatre sortes de pseudoconvexité.

DÉFINITION 1. Soit F_t, $0 \leqq t \leqq 1$ une famille de surfaces analytiques définies par

$$F_t\colon y_i = f_i(x, t),\ |x-x_0| \leqq r\,, \qquad i = 1, 2, \cdots, m-1\,,$$

où x_0 et r sont des constantes et où les $f_i(x, t)$ sont des fonctions continues sur $|x-x_0| \leqq r$, $0 \leqq t \leqq 1$, holomorphes en x sur $|x-x_0| \leqq r$ pour t fixe, mais x_0, r, $f_i(x, t)$ sont d'ailleurs arbitraires. Nous disons que la région D est *pseudoconvexe* (0) *par rapport à* x, si nous avons toujours $F_0 \subset D$ pour toute telle famille F_t, $0 \leqq t \leqq 1$, pourvu que Fr. $F_0 \subset D$ et $F_t \subset D$ pour $0 < t \leqq 1$.

DÉFINITION 2. Soient $y_i = f_i(x, t)$, $i = 1, 2, \cdots, m-1$ des fonctions continues sur $|x-x_0| \leqq r$, $0 \leqq t \leqq 1$ et holomorphes en x sur $|x-x_0| \leqq r$ pour t fixe, où x_0 et r sont des constantes mais arbitraires. Supposons qu'on ait

$$(x_0, f_1(x_0, 0), \cdots, f_{m-1}(x_0, 0)) \notin D$$

et $(x, f_1(x, 0), \cdots, f_{m-1}(x, 0)) \in D$ pour $0 < |x-x_0| \leqq r$. Nous disons que la région D est *pseudoconvexe* (I) *par rapport à* x, si, pour tout système de $m-1$ fonctions $y_i = f_i(x, t)$ satisfaisant à ces conditions-ci et pour tout ε positif, il existe un δ positif tel que la condition $0 \leqq t < \delta$ entraîne l'existence d'un point x dans $|x-x_0| < \varepsilon$ satisfaisant à

$$(x, f_1(x, t), \cdots, f_{m-1}(x, t)) \notin D\,.$$

DÉFINITION 3. Soient $f_i(x)$, $i = 1, 2, \cdots, m-1$ des fonctions holomorphes sur $|x-x_0| \leqq \rho$, où x_0 et ρ sont des constantes. Considérons trois domaines

$$\begin{aligned} &C\colon\ |x-x_0| < \rho,\ |y_i - f_i(x)| < r_i\,, && i = 1, 2, \cdots, m-1\,,\\ &C_1\colon\ \rho' < |x-x_0| < \rho,\ |y_i - f_i(x)| < r_i\,, && i = 1, 2, \cdots, m-1\,,\\ &C_2\colon\ |x-x_0| < \rho,\ |y_i - f_i(x)| < r_i'\,, && i = 1, 2, \cdots, m-1\,,\end{aligned}$$

où ρ', r_i, r_i' $(< r_i)$ sont des constantes. Nous disons que la région D est *pseudoconvexe* (II) *par rapport à* x, si, pour tous tels domaines C, C_1, C_2, la relation $C_1 \cup C_2 \subset D$ entraîne toujours $C \subset D$.

Concernant la pseudoconvexité (II), nous avons la

Proposition 1. *Dans la Définition* 3, *on peut supposer que les* $f_i(x)$ *sont des polynômes et de plus que* $f_i(x)$ *sont non-constants.*

En effet c'est une conséquence immédiate du

Lemme 1. *Dans la Définition* 3, *soient* E, E_1, E_2 *trois ensembles fermés tels que* $E \subset C$, $E_1 \subset C_1$, $E_2 \subset C_2$; *on peut trouver trois domaines*

$$\begin{aligned}
&\Delta\ : |x-x_0|<\sigma,\ |y_i-p_i(x)|<s_i, && i=1,2,\cdots,m-1\,,\\
&\Delta_1: \sigma'<|x-x_0|<\sigma,\ |y_i-p_i(x)|<s_i, && i=1,2,\cdots,m-1\,,\\
&\Delta_2: |x-x_0|<\sigma,\ |y_i-p_i(x)|<s_i', && i=1,2,\cdots,m-1\,,
\end{aligned}$$

satisfaisant à $E\subset\Delta\subset\bar{\Delta}\subset C$, $E_1\subset\Delta_1\subset\bar{\Delta}_1\subset C_1$ *et* $E_2\subset\Delta_2\subset\bar{\Delta}_2\subset C_2$, *où* σ, σ', s_i, s_i' ($<s_i$) *sont des constantes et où les* $p_i(x)$ *sont des polynômes non-constants.*

Preuve. On voit d'abord qu'il existe de nombres positifs σ, σ', s_i, s_i' tels que $\rho'<\sigma'<\sigma<\rho$, $s_i'<r_i'<s_i<r_i$ et que les domaines

$$\begin{aligned}
&C'\ : |x-x_0|<\sigma,\ |y_i-f_i(x)|<s_i\,, && i=1,2,\cdots,m-1\,,\\
&C_1': \sigma'<|x-x_0|<\sigma,\ |y_i-f_i(x)|<s_i, && i=1,2,\cdots,m-1\,,\\
&C_2': |x-x_0|<\sigma,\ |y_i-f_i(x)|<s_i'\,, && i=1,2,\cdots,m-1\,,
\end{aligned}$$

satisfassent aux conditions $E\subset C'$, $E_1\subset C_1'$, $E_2\subset C_2'$. Ensuite, on voit qu'il existe un ε positif tel que, pour chaque i, on ait

$$|y_i-f_i(x)|+\varepsilon<s_i \quad \text{sur} \quad E\cup E_1,\ |y_i-f_i(x)|+\varepsilon<s_i' \quad \text{sur} \quad E_2$$

et $s_i+\varepsilon<r_i$, $s_i'+\varepsilon<r_i'$. Enfin on voit qu'il existe de polynômes non-constants $p_i(x)$ tels que l'on ait

$$|f_i(x)-p_i(x)|<\varepsilon \quad \text{sur} \quad |x-x_0|\leqq\rho\,.$$

Considérons trois domaines

$$\begin{aligned}
&\Delta\ : |x-x_0|<\sigma,\ |y_i-p_i(x)|<s_i\,, && i=1,2,\cdots,m-1\,,\\
&\Delta_1: \sigma'<|x-x_i|<\sigma,\ |y_i-p_i(x)|<s_i\,, && i=1,2,\cdots,m-1\,,\\
&\Delta_2: |x-x_0|<\sigma,\ |y_i-p_i(x)|<s_i'\,, && i=1,2,\cdots,m-1\,,
\end{aligned}$$

Soit $(x, y_1,\cdots,y_{m-1})$ un point de Δ; on a $|y_i-f_i(x)|<s_i+\varepsilon<r_i$ pour chaque i et donc on a $\bar{\Delta}\subset C$. Tout pareillement on a $\bar{\Delta}_1\subset C_1$ et $\bar{\Delta}_2\subset C_2$.

Soit $(x, y_1,\cdots,y_{m-1})$ un point de E; on a $|y_i-p_i(x)|<s_i$ pour chaque i; donc on a $E\subset\Delta$. De même on a $E_1\subset\Delta_1$ et $E_2\subset\Delta_2$.

DÉFINITION 4. Nous disons que la région D est *pseudoconvexe* (III, y_1) *par rapport à* x, lorsque, sous les hypothèses de la Définition 2, si nous supposons de plus que $f_1'(x_0, 0)\neq 0$[3], nous avons la même conclusion que dans la Définition 2.

3. Coïncidence de définitions. Dans ce numéro, établissons l'équivalence entre les pseudoconvexités (0), (I) (II). En effet, en désignant les variables par $x, y_1,\cdots,y_{m-1}$, on a la proposition suivante:

Proposition 2. *Les pseudoconvexités* (0), (I), (II) *par rapport à x coïncident.*

Preuve. Démontrons la proposition en suivant le programme: (0)$\Rightarrow$(I) $\Rightarrow$(II)$\Rightarrow$(0).

3) $f_1'(x, t)$ désigne la dérivée partielle $\partial f_1(x, t)/\partial x$.

(0) *entraîne* (I): Soit D une région pseudoconvexe (0) par rapport à x et soient $y_i=f_i(x, t)$, $i=1, 2,\cdots, m-1$ des fonctions continues sur $|x-x_0|\leqq r$, $0\leqq t\leqq 1$ et holomorphes sur $|x-x_0|\leqq r$ pour t fixe. Supposons qu'on ait

$$(x_0, f_1(x_0, 0),\cdots, f_{m-1}(x_0, 0))\notin D$$

et $(x, f_1(x, 0),\cdots f_{m-1}(x, 0))\in D$ pour $0<|x-x_0|\leqq r$. Pour raisonner par l'absurde, supposons qu'il y ait de nombres t non-négatifs et arbitrairement petits tels que l'on ait

$$(x, f_1(x, t),\cdots, f_{m-1}(x, t))\in D \qquad \text{pour} \quad |x-x_0|\leqq \varepsilon\,,$$

où ε est un nombre positif. Alors il existerait un nombre t_0, $0<t_0<1$ tel que l'on ait

$$(x, f_1(x, t_0),\cdots, f_{m-1}(x, t))\in D \qquad \text{pour} \quad |x-x_0|\leqq \varepsilon$$

et on ait $(x, f_1(x, t),\cdots, f_{m-1}(x, t))\in D$ pour $|x-x_0|=\varepsilon$, $0\leqq t\leqq t_0$. Soit F_t, $0\leqq t \leqq t_0$ la famille des surfaces définies par

$$y_i=f_i(x, t), \quad |x-x_0|\leqq \varepsilon\,, \qquad i=1, 2,\cdots, m-1\,.$$

Soit τ la borne supérieure de l'ensemble $\{t\,|\,0\leqq t<t_0,\ F_t\notin D\}$; on a Fr. $F_\tau\subset D$ et $F_t\subset D$ pour $\tau<t\leqq t_0$. D'après la pseudoconvexité (0), on a $F_\tau\subset D$; c'est absurde. Donc D est pseudoconvexe (I) par rapport à x.

(I) *entraîne* (II): Soit D une région pseudoconvexe (I) par rapport à x. Considérons trois domaines

$$\begin{aligned} &C\ : |x-x_0|<\rho,\ |y_i-f_i(x)|<r_i\,, && i=1, 2,\cdots, m-1\,,\\ &C_1: \rho'<|x-x_0|<\rho,\ |y_i-f_i(x)|<r_i\,, && i=1, 2,\cdots, m-1\,,\\ &C_2: |x-x_0|<\rho,\ |y_i-f_i(x)|<r_i'(<r_i)\,, && i=1, 2,\cdots, m-1\,,\end{aligned}$$

tels que l'on ait $C_1\cup C_2\subset D$, où les $f_i(x)$ sont des polynômes. D'après la Proposition 1, il suffit de prouver que $C\subset D$.

Transformons l'espace $x, y_1,\cdots, y_{m-1}$ à l'espace X, $Y_1,\cdots, Y_{m-1}$ par

$$X=x-x_0,\ Y_i=y_i-f_i(x), \qquad i=1, 2,\cdots, m-1\,.$$

Alors l'image D' de D par cette transformation est pseudoconvexe (I) par rapport à X et les images de C, C_1, C_2 sont les domaines

$$\begin{aligned} &C'\ : |X|<\rho,\ |Y_i|<r_i\,, && i=1, 2,\cdots, m-1\,,\\ &C_1': \rho'<|X|<\rho,\ |Y_i|<r_i\,, && i=1, 2,\cdots, m-1\,,\\ &C_2': |X|<\rho,\ |Y_i|<r_i'\,, && i=1, 2,\cdots, m-1\,.\end{aligned}$$

Donc on peut supposer, sans perdre la généralité, que C, C_1, C_2 ont les expressions suivantes,

$$C : |x|<\rho, \ |y_i|<r_i, \qquad i=1, 2, \cdots, m-1,$$
$$C_1 : \rho'<|x|<\rho, \ |y_i|<r_i, \quad i=1, 2, \cdots, m-1,$$
$$C_2 : |x|<\rho, \ |y_i|<r_i', \qquad i=1, 2, \cdots, m-1.$$

Pour raisonner par l'absurde, supposons qu'on ait $C\not\subset D$ et posons

$$\Sigma_l = C\cap\{|y_i|<r_i', \quad i=l+1, \cdots, m-1\}$$

pour $l=0, 1, \cdots, m-1$. On a $C=\Sigma_{m-1}$ et donc il existe un entier k ($1\leqq k<m$) tel que $\Sigma_k\not\subset D$ et $\Sigma_{k-1}\subset D$.

Soit $(a, b_1, \cdots, b_{m-1})$ un point de Σ_k-D; on a $|a|\leqq\rho'$, $r_k'\leqq|b_k|<r_k$. Suivant la méthode employée par M. K. Oka dans [2], introduisons l'expression

$$d(x, y_k) = (|1/y_k|^2+\lambda|x|^2)^{1/2},$$

où λ est un nombre positif. Et posons

$$d_0 = \sup\{d(x, y_k)\,|\,(x, y_1, \cdots, y_{m-1})\in\Sigma_k-D, y_i = b_i, i\neq k\}.$$

Prenons un nombre r_k'' entre r_k et $|b_k|$ et choisissons λ suffisamment petit pour qu'on ait

$$d(a, b_k)>[(1/r_k'')^2+\lambda(\rho')^2]^{1/2}\equiv d_1.$$

Comme on a $d(x, y_k)<d_1$ pour $(x, y_1, \cdots, y_{m-1})\in\Sigma_k-D$, $|y_k|>r_k''$ et $y_i=b_i$, $i\neq k$, il existe un point $(\xi, \eta_1, \cdots, \eta_{m-1})$ de Σ_k-D tel que l'on ait $d(\xi, \eta_k)=d_0$, $\eta_i=b_i$, $i\neq k$. En particulier, on a $|\xi|\leqq\rho'$, $|\eta_k|\leqq r_k''$.

Soient $y_i=f_i(x, t)$, $i=1, 2, \cdots, m-1$ les foncitons définies par les équations

$$1/(\bar{\eta}_k y_k)+\lambda\bar{\xi}x = d_0^2 t \quad \text{et} \quad y_i = b_i, \qquad i\neq k.$$

Elles sont définies, holomorphes et satisfont à $(x, f_1(x, t), \cdots, f_{m-1}(x, t))\in\Sigma_k$ pour $|x-\xi|\leqq r_0$, $1\leqq t\leqq t_0$, où r_0 est un nombre positif suffisamment petit et t_0 un nombre supérieur à et suffisamment voisin de 1. En outre on a

$$d(x, y_k)^2 = d_0^2(t^2+\lambda|\eta_k|^2|x-t\xi|^2) \quad \text{pour} \quad y_k=f_k(x, t).$$

Par conséquent, si $0<|x-\xi|\leqq r_0$, on a $d(x, f_k(x, 1))>d_0$, c'est-à-dire qu'on a $(x, f_1(x, 1), \cdots, f_{m-1}(x, 1))\in D$, et, si $|x-\xi|\leqq r_0$, $1<t\leqq t_0$, on a $d(x, f_k(x, t))>d_0$, c'est-à-dire qu'on a $(x, f_1(x, t), \cdots, f_{m-1}(x, t))\in D$. C'est en contradiction avec la pseudoconvexité (I) par rapport à x.

(II) *entraîne* (0): Soit F_t, $0\leqq t\leqq 1$ une famille de surfaces définies par

$$y_i = f_i(x, t), \ |x-x_0|\leqq r_0, \qquad i=1, 2, \cdots, m-1,$$

où les $f_i(x, t)$ sont des fonctions continues sur $|x-x_0|\leqq r_0$, $0\leqq t\leqq 1$ et holomorphes sur $|x-x_0|\leqq r_0$ pour t fixe. Supposons qu'on ait Fr. $F_0\subset D$ et $F_t\subset D$ pour $0<t\leqq 1$.

Soit r un nombre positif suffisamment petit et soit ρ' un nombre inférieur à et suffisamment voisin de r_0. Alors l'ensemble

$$\{\rho' < |x-x_0| < r_0, \ |y_i - f_i(x, 0)| < 2r, \quad i = 1, 2, \cdots, m-1\}$$

est contenu dans D. D'ailleurs il existe un t_0 positif assez petit pour qu'on ait, pour chaque i,

$$|f_i(x, 0) - f_i(x, t_0)| < r \quad \text{sur} \quad |x-x_0| \leqq r_0 .$$

On voit que l'ensemble suivant est contenu dans D:

$$C_1 \colon \rho' < |x-x_0| < r_0, \ |y_i - f_i(x, t_0)| < r, \quad i = 1, 2, \cdots, m-1 .$$

Soit r' un nombre positif inférieur à r et suffisamment petit; alors l'ensemble

$$C_2 \colon |x-x_0| < r_0, \ |y_i - f_i(x, t_0)| < r', \quad i = 1, 2, \cdots, m-1 .$$

est contenu dans D. Donc, si D est pseudoconvexe (II) par rapport à x, l'ensemble suivant est contenu dans D:

$$C \colon |x-x_0| < r_0, \ |y_i - f_i(x, t_0)| < r, \quad i = 1, 2, \ldots, m-1 .$$

Soit $(x, y_1, \cdots, y_{m-1})$ un point quelconque de l'intérieur de F_0; on a, pour chaque i,

$$|y_i - f_i(x, t_0)| = |f_i(x, 0) - f_i(x, t_0)| < r ,$$

c'est-à-dire que $(x, y_1, \cdots, y_{m-1}) \in C \subset D$. Par conséquent on a $F_0 \subset D$.

D'après la proposition, on peut dire simplement qu'une région D est pseudoconvexe par rapport à x, si D est pseudoconvexe (0) ou (I) ou (II) par rapport à x.

4. Cas de deux variables. Considérons le cas $m=2$ et désignons les variables par x et y. Pour démontrer l'équivalence entre la pseudoconvexité (III, y) par rapport à x et la pseudoconvexité par rapport à x, commençons par préparer une suite de lemmes.

Lemme 2. *Si la pseudoconvexité* (III, y) *par rapport à x n'entraînait pas nécessairement la pseudoconvexité par rapport à x, il existerait une région D, un polynôme non-constant $p(x)$ et trois domaines*

$$\begin{aligned} C &\colon |x| < \rho, \ |y| < r , \\ C_1 &\colon \rho' < |x| < \rho, \ |y| < r , \\ C_2 &\colon |x| < \rho, \ |y| < r' (< r) , \end{aligned}$$

satisfaisant aux conditions suivantes.

1°. $C_1 \cup C_2 \subset D$, $C \not\subset D$.

2°. *Soit* $y=f(x, t)$ *une fonction continue sur* $|x-x_1| \leqq r_1$, $0 \leqq t \leqq 1$ *et holomorphe sur* $|x-x_1| \leqq r_1$ *pour* t *fixe. Supposons que* $(x_1, f(x_1, 0)) \notin D$ *et qu'on ait* $(x, f(x, 0)) \in D$ *pour* $0<|x-x_1| \leqq r_1$ *et enfin que* $f'(x_1, 0)+p'(x_1) \neq 0$. *Alors il existe toujours un* δ *positif tel que* $0 \leqq t < \delta$ *entraîne l'existence d'un point* x *dans* $|x-x_1|<\varepsilon$ *satisfaisant à* $(x, f(x, t)) \notin D$, *où* ε *est un nombre positif arbitrairement donné auparavant.*

Preuve. Par l'hypothèse, il existe une région D pseudoconvexe (III, y) par rapport à x et non-pseudoconvexe par rapport à x. Donc, d'après la Définition 3 et les Propositions 1, 2, il existe trois domaines

$$\begin{aligned} C &: |x-x_0|<\rho, \ |y-f(x)|<r, \\ C_1 &: \rho'<|x-x_0|<\rho, \ |y-f(x)|<r, \\ C_2 &: |x-x_0|<\rho, \ |y-f(x)|<r' \ (<r), \end{aligned}$$

tels que l'on ait $C_1 \cup C_2 \subset D$ et $C \not\subset D$, où $f(x)$ est un polynôme non-constant.

Pour simplifier les expressions de C, C_1, C_2, transformons l'espace x, y à l'espace X, Y par $X=x-x_0$, $Y=y-f(x)$. Dans l'espace X, Y, les images de D, C, C_1, C_2 par cette transformation et le polynôme non-constant $p(X) =f(X+x_0)$ jouissent des propriétés 1°, 2°; ceci est aisément vérifié.

Lemme 3. *Supposons qu'une région* D, *un polynôme non-constant* $p(x)$ *et trois domaines*

$$\begin{aligned} C &: |x|<\rho, \ |y|<r, \\ C_1 &: \rho'<|x|<\rho, \ |y|<r, \\ C_2 &: |x|<\rho, \ |y|<r' \quad (<r), \end{aligned}$$

satisfassent aux conditions 1°, 2° *du Lemme* 2. *Alors, l'ensemble*

$$A = \{(|x|, |1/y|) \mid (x, y) \in C-D\}$$

jouit de la propriété suivante.

Soit (α, β) *un point de* A; *prenons un point* (ξ, η) *de* $C-D$ *tel que l'on ait* $\alpha=|\xi|$, $\beta=|1/\eta|$, *et posons* $\xi=|\xi|\omega$, $\eta=|\eta|\omega'$ *(on pose* $\omega=1$ *si* $\xi=0$*). Soit en outre* λ *un nombre positif tel que les points* (u, v) *de* A, *excepté* (α, β), *se placent au déssous de la ligne droite*

$$T_\lambda: v+\lambda u = \Phi_0 \quad (=\beta+\lambda\alpha),$$

où u, v *designent les coordonnées réelles sur le plan. Alors, il faut qu'on ait*

$$\lambda\eta^2/(\omega\omega')+p'(\xi) = 0 .$$

Preuve. Pour le démontrer, prenons la famille des surfaces

$$E_t\colon \omega'/y+\lambda x/\omega = \Phi_0 t,\ t\geqq 1 .$$

Considérons l'expression $\Phi(x, y)=|1/y|+\lambda|x|$; alors on a $\Phi(x, y)\leqq\Phi_0$ pour $(x, y)\in C-D$, et on a $\Phi(x, y)\geqq\Phi_0 t$ pour $(x, y)\in E_t$. Donc on a $E_t\cap(C-D)=\phi$ si $t>1$. Ensuite, soit (x, y) un point de $E_1\cap(C-D)$; on voit que

$$\Phi(x, y) = |\Phi_0-\lambda x/\omega|+\lambda|x| = \Phi_0$$

et donc que x/ω est réel non-négatif. D'autre part, les relations $\Phi(x, y)=\Phi_0$ et $(x, y)\in C-D$ entraînent que $|x|=|\xi|$ et $|y|=|\eta|$. Par conséquent, si $(x, y)\in E_1\cap(C-D)$, on a $x=\xi$ et donc $y=\eta$: ceci montre que $E_1\cap(C-D)=\{(\xi, \eta)\}$. Soit enfin $y=f(x, t)$ l'équation de E_t; on a $f'(\xi, 1)=\lambda\eta^2/(\omega\omega')$. D'après la condition 2°, il faut qu'on ait $f'(\xi, 1)+p'(\xi)=0$.

Nous utiliserons un lemme analogue au Lemme 3;

Lemme 4. *Dans les conditions du Lemme* 3, *l'ensemble*

$$B = \{(|e^x|^2,\ |1/y|^2)\,|\,(x, y)\in C-D\}$$

jouit de la propriété suivante. Soit (α, β) *un point de* B*; prenons un point* (ξ, η) *de* $C-D$ *tel que l'on ait* $\alpha=|e^\xi|^2$, $\beta=|1/\eta|^2$. *Soit* λ *un nombre positif tel que les points* (u, v) *de* B *se placent ou bien au dessous de ou bien sur la ligne droite*

$$T_\lambda\colon v+\lambda u = \Psi_0 \quad (=\beta+\lambda\alpha);$$

alors on a $\lambda\bar{\eta}\eta^2 \exp(\xi+\bar{\xi})+p'(\xi)=0$.

Preuve. Soit en effet F_t, $t\geqq 1$ la famille des surfaces définies par

$$1/(\bar{\eta}y)+\lambda \exp(x+\bar{\xi}) = \Psi_0 t .$$

Considérons la quantité $\Psi(x, y)=|1/y|^2+\lambda|e^x|^2$; alors on a $\Psi(x, y)\leqq\Psi_0$ pour $(x, y)\in C-D$. D'autre part, si $(x, y)\in F_t$, on a

$$\Psi(x, y) = \Psi_0(t^2+\lambda|\eta|^2|e^x-\mathrm{t}e^\xi|^2) .$$

Par conséquent, si $(x, y)\in F_1\cap(C-D)$, on a $\Psi(x, y)=\Psi_0$, et donc d'après l'expression de $\Psi(x, y)$ dans F_t, on a $e^x=e^\xi$ et $y=\eta$: ceci montre que $F_1\cap(C-D)$ se réduit à (ξ, η) dans un voisinage de (ξ, η). En outre, d'après l'expression de $\Psi(x, y)$ dans F_t, on a $\Psi(x, y)>\Psi_0$ lorsque $(x, y)\in F_t$ et $t>1$; donc on a $F_t\cap(C-D)=\phi$ pour $t>1$. Enfin, soit $y=g(x, t)$ l'équation de F_t; on a $g'(\xi, 1)=\lambda\bar{\eta}\eta^2\exp(\xi+\bar{\xi})$. En vertu de la condition 2°, on voit que $g'(\xi, 1)+p'(\xi)=0$.

Lemme 5. *Sous les mêmes hypothèses que dans le Lemme* 3, *prenons un point* (a, b) *de* $C-D$ *tel que l'on ait*

$$|b| = \min. \{|y| \mid (x, y) \in C-D\}$$

et $|a| = \max. \{|x| \mid (x, y) \in C-D,\ |y| = |b|\}$. *Alors, sur le cercle* $|x| = |a|$, *il n'y a qu'un nombre fini de points* x *tels qu'il existe de points* (x, y) *de* $C-D$ *satisfaisant à* $|y| = |b|$. *En particulier, les relations* $|x| = |a|$, $|y| = |b|$ *et* $(x, y) \in C-D$ *entraînent* $p'(x) = 0$.

Preuve. Il suffit de montrer que, si (ξ, η) est un point de $C-D$ tel que $|\xi| = |a|$ et $|\eta| = |b|$, on a $p'(\xi) = 0$. Considérons l'expression

$$\Phi(x, y; \lambda) = |1/y|^2 + \lambda |x|^2,$$

où λ est un nombre positif. Pour λ suffisamment petit, il existe un point (x_λ, y_λ) de $C-D$ tel que l'on ait

$$\Phi(x_\lambda, y_\lambda; \lambda) = \Phi_\lambda \equiv \sup \{\Phi(x, y; \lambda) \mid (x, y) \in C-D\}.$$

On a $\lim |x_\lambda| = |a|$ et $\lim |y_\lambda| = |b|$ pour $\lambda \to 0$. En effet, si $\lambda \geqq \lambda'$, on a $\Phi_\lambda \geqq \Phi_{\lambda'}$; donc Φ_λ converge vers une valeur Φ_0 pour $\lambda \to 0$. On a en particulier $\Phi_0 \geqq |1/b|^2$, puisque $\Phi_\lambda \geqq |1/b|^2 + \lambda |a|^2$. Soit maintenant (ξ', η') un point limite de (x_λ, y_λ) pour $\lambda \to 0$; on a $|\eta'| = \Phi_0^{-1/2} \leqq |b|$ et $(\xi', \eta') \in C-D$. Il faut que $|\eta'| = |b|$, d'après la définition de $|b|$. D'autre part, on a $|x_\lambda| \geqq |a|$ et donc $|\xi'| \geqq |a|$. Il faut que $|\xi'| = |a|$, d'après la définition de $|a|$. Par conséquent on a $\lim |x_\lambda| = |a|$ et $\lim |y_\lambda| = |b|$.

Considérons la famille des surfaces $E(t, \lambda)$, $t \geqq 1$, $\lambda > 0$ définies par

$$1/(\bar{y}_\lambda y) + \lambda \bar{x}_\lambda x = \Phi_\lambda t.$$

Tout pareillement à la démonstration du Lemme 3 ou celle du Lemme 4, on a

$$E(1, \lambda) \cap (C-D) = \{(x_\lambda, y_\lambda)\} \quad \text{et} \quad E(t, \lambda) \cap (C-D) = \phi \quad \text{pour} \quad t > 1.$$

Soit $y = f(x, t; \lambda)$ l'équation de $E(t, \lambda)$; on a $f'(x_\lambda, 1; \lambda) = \lambda \bar{y}_\lambda y_\lambda^2 x_\lambda$. Donc, si $p'(x) \neq 0$ lorsque $(x, y) \in C-D$ et $|x| = |a|$, $|y| = |b|$, il existerait un λ suffisamment petit tel que l'on ait $f'(x_\lambda, 1; \lambda) + p'(x_\lambda) \neq 0$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse 2°. Par conséquent, il faut qu'il existe au moins un point (ξ'', η'') de $C-D$ tel que l'on ait $|\xi''| = |a|$, $|\eta''| = |b|$ et $p'(\xi'') = 0$.

Transformons l'espace x, y à l'espace X, Y par $X = x + \mu\xi$, $Y = y$, où μ est un nombre positif suffisamment petit. Alors l'image D' de D par cette transformation, le polynôme non-constant $p(X - \mu\xi)$ et les domaines suivants jouissent des propriétés 1°, 2° du Lemme 2;

$$C' : |X| < \rho - \kappa, \quad |Y| < r,$$
$$C_1' : \rho' + \kappa < |X| < \rho - \kappa, \quad |Y| < r,$$
$$C_2' : |X| < \rho - \kappa, \quad |Y| < r',$$

où $\kappa = (\rho - \rho')/3$. On voit en effet que $C_1' \cup C_2' \subset D'$ et $(a + \mu\xi, b) \in C'$, c'est-à-dire que la condition 1° pour D', C', C_1', C_2' est vraie, si μ est inférieur à κ/ρ'. La condition 2° pour D' et $p(X - \mu\xi)$ est immédiatement vérifiée.

Le μ étant petit, on voit que C' est contenu dans l'image de C. Donc on a $|Y| \geqq |b|$ pour $(X, Y) \in C' - D'$ et on a $|X| \leqq |a|(1+\mu)$ pour tout point (X, Y) de $C' - D'$ satisfaisant à $|Y| = |b|$, dont l'égalité a lieu seulement si $X = \xi(1+\mu)$.

Par conséquent, il existe au moins un point (ξ'', η'') de $C' - D'$ tel que $|\xi''| = |a|(1+\mu)$, $|\eta''| = |b|$ et $p'(\xi'' - \mu\xi) = 0$. On a $\xi'' = \xi(1+\mu)$; donc on a $p'(\xi) = 0$.

Dans les conditions du Lemme 3, prenons des points (a, b) et (a', b') de $C - D$ tels que l'on ait

$$|b| = |b'| = \min. \{|y| \mid (x, y) \in C - D\},$$
$$|a| = \max. \{|x| \mid (x, y) \in C - D, \ |y| = |b|\},$$
$$|\exp a'| = \max. \{|e^x| \mid (x, y) \in C - D, \ |y| = |b'|\};$$

alors on a le

Lemme 6. *Soit* $v = H(u)$ (ou $v = K(u)$) *la fonction représentant la frontière supérieure de l'enveloppe convexe de* A (ou B). *Alors* $v = H(u)$ (ou $v = K(u)$) *est concave, décroissante et continûment dérivable dans un intervalle fermé* $[|a|, u_0]$ $(|a| < u_0)$ (ou $[|\exp a'|^2, u_0']$ $(|\exp a'|^2 < u_0')$). *En particulier on a* $H'(|a|) = 0$ (ou $K'(|\exp a'|^2) = 0$).

Preuve. Nous nous contentons d'exposer la preuve pour la fonction $v = H(u)$: pour $v = K(u)$, on peut démontrer le lemme en utilisant le Lemme 4.

Prouvons d'abord qu'il existe au moins un point $(x, y) \in C - D$ tel que $|x| > |a|$. En effet, sinon, on aurait $|x| \leqq |a|$ pour $(x, y) \in C - D$. Donc il existerait deux nombres positifs distincts λ, λ' tels que, au point $(|a|, |1/b|)$, les lignes droites

$$T_\lambda : v + \lambda u = \Phi_0 \quad \text{et} \quad T_{\lambda'} : v + \lambda' u = \Phi_0'$$
$$(\Phi_0 = |1/b| + \lambda |a| \quad \text{et} \quad \Phi_0' = |1/b| + \lambda' |a|)$$

satisfassent aux conditions exposées dans le Lemme 3. Posons $a = |a|\omega$ et $b = |b|\omega'$; alors on a, par ce lemme,

$$\lambda b^2/(\omega\omega') = \lambda' b^2/(\omega\omega');$$

ce qui est impossible.

La fonction $v=H(u)$ est donc définie, concave et décroissante dans un intervalle $[|a|, u_0]$ $(|a|<u_0)$. On voit que $H'(|a|)$ et $H'(u_0)$ sont déterminés: $H'(u_0)$ peut etre $-\infty$. Ensuite, examinons sa dérivée à un point quelconque $u=\alpha$ $(|a|<\alpha<u_0)$. Comme $H(u)$ est concave, on a $H_+'(\alpha)\leqq H_-'(\alpha)$, où les signes désignent la dérivée à droite et la dérivée à gauche de $H(u)$ au point $u=\alpha$ respectivement. Or si $H_+'(\alpha)<H_-'(\alpha)$, on peut trouver deux lignes droites, passant par le point (α, β) $(\beta=H(\alpha))$, à gradient négatif et telles qu' elles satisfassent aux conditions dans le Lemme 3. D'après le même raisonnement que dans la première partie de la démonstration actuelle, on a une contradiction. Par suite, la fonction $v=H(u)$ est dérivable dans $[|a|, u_0]$. Or cette fonction est concave; donc $H'(u)$ est décroissant. En conséquence, la fonction $H'(u)$ est continue dans $[|a|, u_0]$, car, pour tout α $(|a|\leqq\alpha\leqq a_0)$, il existe sa limite pour $u\to\alpha$.

En général on a $H'(|a|)\leqq 0$. Supposons qu'on ait $H'(|a|)<0$. Alors le raisonnement qui fait usage du Lemme 3 nous introduit dans une contradiction. Par conséquent on a $H'(|a|)=0$.

Lemme 7. *Si D est une région pseudoconvexe* (III, y) *par rapport à x, alors D est pseudoconvexe par rapport à x.*

Preuve. Pour raisonner par l'absurde, supposons que la pseudoconvexité (III, y) par rapport à x n'entraîne pas la pseudoconvexité par rapport à x; alors, d'après le Lemme 2, il existe une région D, un polynôme non-constant $p(x)$ et trois domaines cylindriques C, C_1, C_2 satisfaisant aux conditions 1°, 2° du même lemme.

(1) Il est évident qu'il existe un point (a, b) de $C-D$ tel que

$$|b| = \min. \{|y| \mid (x, y)\in C-D\}$$

et $|a|=\max. \{|x| \mid (x, y)\in C-D,\ |y|=|b|\}$. Supposons que $a\neq 0$ et désignons par A_1 l'ensemble

$$\{(|x|, |y|) \mid (x, y)\in C-D\} .$$

Soit $v=k(u)$ l'équation représentant la frontière inférieure de l'enveloppe convexe de A_1: alors, d'après le Lemme 6, on voit qu'il existe de points (x, y) de $C-D$ satisfaisant à $|x|>|a|$ et donc que $k(u)$ est défini, convexe et strictement croissant dans un intervalle $[|a|, u_0]$ $(|a|<u_0)$.

On peut trouver un μ positif arbitrairement petit tel que la fonction $k(u)-\mu u$ atteigne son minimum à un seul point $u=\alpha$ $(|a|\leqq\alpha\leqq u_0)$. En effet, sinon, il existerait, pour μ suffisamment petit, un segment ayant le gradient μ et situé complètement sur la courbe $v=k(u)$: mais il n'y a qu'un nombre dénombrable de segments sur cette courbe.

Soit μ un nombre positif et petit jouissant de la propriété expliquée ci-dessus; alors le point (α, β) $(\beta=k(\alpha))$ est situé sur A_1. Par suite, il existe un point $(\xi, \eta)\in C-D$ tel que $|\xi|=\alpha$, $|\eta|=\beta$. Transformons l'espace x, y à l'espace X, Y par $X=x$, $Y=y-\mu\omega x$, où ω est tel que $|\omega|=1$ et $\omega\xi/\eta$ soit réel et positif. Je dis que le polynôme $p(X)+\mu\omega X$ n'est pas constant: en effet, sinon, on aurait $p'(X)\equiv-\mu\omega$, contrairement au Lemme 5. L'image D' de D par cette transformation, le polynôme $p(X)+\mu\omega X$ et les domaines suivants satisfont aux conditions 1°, 2° du Lemme 2:

$$\begin{aligned} C' &: |X|<\rho,\ |Y|<r_0\,, \\ C_1' &: \rho'<|X|<\rho,\ |Y|<r_0\,, \\ C_2' &: |X|<\rho,\ |Y|<r_0'\,, \end{aligned}$$

où $r_0=(r+|b|)/2$ et $r_0'=r'/2$. En effet la condition 2° est aisément vérifiée. La condition 1° est aussi vérifiée, car on a $C_1'\cup C_2'\subset D'$ et $(a,\ b-\mu\omega a)\in C'$ lorsque $\mu<(1/2\rho)$ min. $(r-|b|,\ r')$.

Puisque μ est supposé petit, C' est contenu dans l'image de C. Donc on a $|Y|\geqq k(\alpha)-\mu\alpha$ pour $(X,\ Y)\in C'-D'$, dont l'égalité a lieu seulement si $|X|=\alpha$. En outre, μ étant petit, la valeur $|\eta|$ est voisin de $|b|$: donc on a $(\xi,\ \eta-\mu\omega\xi)\in C'-D'$ et $|\eta-\mu\omega\xi|=k(\alpha)-\mu\alpha$. Par conséquent, on peut supposer, sans restreindre la généralité, qu'on a

$$|y|\geqq|b| \quad \text{pour} \quad (x,\ y)\in C-D$$

et qu'on a $|y|=|b|$ pour un point $(x,\ y)\in C-D$ seulement si $|x|=|a|$.

(2) L'ensemble $\{x\,|\,(x,\ y)\in C-D,\ |y|=|b|\}$ se place sur le cercle $|x|=|a|$ et est constitué par un nombre fini de points, d'après le Lemme 5. Désignons par ξ_1 $(=a)$, $\xi_2,\cdots,\xi_k$ tous les points de l'ensemble. Transformons l'espace x, y à l'espace X, Y par $X=x-a$, $Y=y$. Soit D' l'image de D par cette transformation. Soit ρ_0 un nombre positif petit et soient r_0, ρ_0' $(|b|<r_0<r,\ 0<\rho_0'<\rho_0)$ des nombres voisins de $|b|$, ρ_0, respectivement; alors la région D', les domaines

$$\begin{aligned} C' &: |X|<\rho_0,\ |Y|<r_0\,, \\ C_1' &: \rho_0'<|X|<\rho_0,\ |Y|<r_0\,, \\ C_2' &: |X|<\rho_0,\ |Y|<r'\,, \end{aligned}$$

et le polynôme $p(X+a)$ satisfont aux conditions 1°, 2° du Lemme 2. On a en effet $|y|>|b|$ quand $(x,\ y)\in C-D$ et $x\neq\xi_i$, $i=1,\ 2,\cdots,k$. Donc on a, pour ρ_0 suffisamment petit,

$$|y|>|b| \quad \text{pour} \quad (x,\ y)\in C-D \quad \text{et} \quad 0<|x-a|\leqq\rho_0\,,$$

ce qui entraîne que $\{|x-a|=\rho_0,\ |y|\leqq|b|\}\subset D$: nous fixons un tel ρ_0. Ensuite, supposons que r_0 et ρ_0' soient voisins de $|b|$ et ρ_0 respectivement; alors on a $C_1' \cup C_2' \subset D'$. La relation $C' \not\subset D'$ est évidente pusique $(0, b) \in C'$. Par conséquent, la condition 1° est remplie par D', C', C_1', C_2'. La condition 2° est aussi remplie par D' et $p(X+a)$.

Pour les régions D', C' ainsi acquises, on a $|Y| > |b|$ si $(X, Y) \in C' - D'$ et $X \neq 0$, puisque l'image de C contient C'. En conséquence, on peut supposer, sans restreindre la généralité, qu'on a $a=0$:

3°. $(0, b) \in C-D$ *et* $|y| \geqq |b|$ *pour* $(x, y) \in C-D$, *dont l'égalité a lieu seulement si* $x=0$.

Simplifions le polynôme non-constant $p(x)$; on suppose que $p(0)=0$, ce qui ne perd pas la généralité. D'après le Lemme 5, on a $p'(0)=0$: il existe donc un entier q (>1) et une fonction $g(x)$ holomorphe dans un vosinage de $x=0$ tels que l'on ait $p(x) = -(xg(x))^q$ et $g(0) \neq 0$. On peut supposer que $g(x)$ est holomorphe et non-nul sur $|x| \leqq \rho$; pour obtenir cette conclusion il suffit de prendre ρ suffisamment petit. Sous cette circonstance, transformons l'espace x, y à l'espace X, Y par $X = xg(x)$, $Y = y$.

Soit ρ_0 un nombre positif suffisamment petit; l'image du cercle ouvert $|x| < \rho$ contient alors le cercle fermé $|X| \leqq \rho_0$. Prenons deux nombres r_0 et ρ_0' $(|b| < r_0 < r,\ 0 < \rho_0' < \rho_0)$ voisins de $|b|$ et ρ_0 respectivement. Alors, l'image D' de la partie commune de D et $|x| < \rho$, les domaines

$$\begin{aligned} C' &: |X| < \rho_0,\ |Y| < r_0\,, \\ C_1' &: \rho_0' < |X| < \rho_0,\ |Y| < r_0\,, \\ C_2' &: |X| < \rho_0,\ |Y| < r' \end{aligned}$$

et le polynôme $-X^q$ satisfont aux conditions 1°, 2° du Lemme 2. En effet, la condition 2° est immédiatement vérifiée. Examinons donc la condition 1°. Puisqu'on a $\{|X| = \rho_0,\ |Y| = |b|\} \subset D'$, on a $C_1' \cup C_2' \subset D'$ pour r_0 et ρ_0' voisins de $|b|$ et ρ_0 respectivement: par suite, la condition est vraie. En conséquence, on peut raisonner désormais en supposant que $p(x) \equiv -x^q$.

(3) Soit $v = H(u)$ la fonction dans le Lemme 6: prouvons qu'on a $[H(u)^{-1}]' = (u^q)'$ ou $H(u)^{-1} = u^q + |b|$ pour u suffisamment petit.

Pour raisonner par l'absurde, supposons que cela ne soit pas vrai; alors il existerait un α_0 positif arbitrairement petit tel que l'on ait $G'(\alpha_0) \neq q\alpha_0^{q-1}$, où l'on désigne par $G(u)$ la fonction $H(u)^{-1}$. Considérons le cas où le point (α_0, β_0) $(\beta_0 = H(\alpha_0))$ n'est pas dans l'ensemble A^* qui sera défini comme suit: un point (α, β) est contenu dans A^* si (α, β) est situé sur la courbe $v = H(u)$ et tout (u, v) $(\neq (\alpha, \beta))$ de l'ensemble

$$A = \{(|x|,\ |1/y|) \mid (x, y) \in C-D\}$$

se place au dessous de la tangente de la courbe à (α, β). Alors (α_0, β_0) est situé sur un segment S appartenant complètement à la courbe. Soient (α', β'), (α'', β'') et $-\lambda$ l'extrémité gauche, l'extrémité droite et le gradient de S, respectivement. On peut supposer que la fonction $v=H(u)$ est définie dans un voisinage ouvert de l'intervalle fermé $[\alpha', \alpha'']$. En effet, on peut trouver un point (α^*, β^*) $(\alpha^*>0)$ de A^*, car on voit, d'après le résultat $H'(0)=0$ du Lemme 6, qu'aucun segment sur la courbe ne peut s'étendre à $(0, |1/b|)$ et qu'il n'y a qu'un nombre dénombrable de segments sur cette courbe: par suite, pour obtenir cette situation, il suffit de prendre un α_0 tel que $\alpha_0<\alpha^*$.

Maintenant supposons qu'on ait $G'(\alpha_0)>q\alpha_0^{q-1}$; alors on a $\lambda>q\alpha_0^{q-1}H(\alpha_0)^2$. Par suite on a $\lambda=-H'(\alpha')>q(\alpha')^{q-1}H(\alpha')^2$ ou $G'(\alpha')>q(\alpha')^{q-1}$, puisque la fonction $u^{q-1}H(u)^2$ est croissante quand u est petit. Ensuite, si $G'(\alpha_0)<q\alpha_0^{q-1}$, on a $G'(\alpha'')<q(\alpha'')^{q-1}$. Remarquons ici que (α', β') et (α'', β'') sont tous les deux sur $\bar{A}^*$, ce qui entraîne qu'il y a de points $(\alpha, \beta)\in A^*$, voisins de (α', β') ou (α'', β'') et satisfaisant à $G'(\alpha)\neq q\alpha^{q-1}$. En conséquence, on peut supposer, sans perdre la généralité, que $(\alpha_0, \beta_0)\in A^*$.

Soit (ξ, η) un point de $C-D$ tel que $\alpha_0=|\xi|$ et $\beta_0=|1/\eta|$. Alors (α_0, β_0), (ξ, η) et λ $(=-H'(\alpha_0))$ satisfont aux conditions dans le Lemme 3. Donc, d'après le lemme, il faut qu'on ait $\lambda\eta^2/(\omega\omega')=q\xi^{q-1}$, où $\omega=\xi/|\xi|$ et $\omega'=\eta/|\eta|$. Par suite on a $\lambda H(\alpha_0)^{-2}=q\alpha_0^{q-1}$, ce qui entraîne $G'(\alpha_0)=q\alpha_0^{q-1}$: c'est absurde. D'où l'équation $G'(u)=(u^q)'$ est démontrée.

En conséquence, on a la proposition suivante:

4°. *On a* $|y|\geqq|x|^q+|b|$ *pour* $(x, y)\in C-D$, *si* x *est petit. Reciproquement, pour tout* u *non-négatif et petit, il existe au moins un point* $(x, y)\in C-D$ *tel que* $|x|=u$ *et* $|y|=u^q+|b|$.

Dans la suivante, nous désignerons par u_0 un nombre positif petit. Alors on a la proposition:

5°. *Si* (x, y) *est un point de* $C-D$ *tel que* $0<|x|<u_0$ *et* $|y|=|x|^q+|b|$, *on a* $y/|y|=(x/|x|)^q$.

Soit en effet (ξ, η) un point de $C-D$ tel que $0<|\xi|<u_0$ et $|\eta|=|\xi|^q+|b|$. Posons $\alpha=|\xi|$, $\beta=|1/\eta|$ et $\lambda=-H'(\alpha)$; alors les (α, β), (ξ, η) et λ satisfont aux conditions dans le Lemme 3. Donc il faut faut qu'on ait

$$\lambda\eta^2/(\omega\omega') = q\xi^{q-1} \quad \text{où} \quad \omega = \xi/|\xi| \quad \text{et} \quad \omega' = \eta/|\eta|:$$

cela entraîne que $\omega'=\omega^q$.

On peut montrer plus précisément que:

6°. *Pour* $0<u<u_0$, *il existe au moins un point* $(x, y)\in C-D$ *tel que l'on ait* $|x|=u$ *et* $y=(b/|b|)(u^q+|b|)$.

Pour le démontrer, transformons l'espace x, y à l'espace X, Y par $X=x$, $Y=y-\mu$, où μ est un nombre petit et tel que μ/b soit réel et positif. Alors l'image D' de D, le polynôme $-X^q$ et les domaines

$$C' : |X|<\rho,\ |Y|<r_0\,,$$
$$C_1' : \rho'<|X|<\rho,\ |Y|<r_0\,,$$
$$C_2' : |X|<\rho,\ |Y|<r_0'$$

jouissent des propriétés 1°, 2° et 3° et donc nécessairement 4° et 5°, où $r_0=(r+|b|)/2$ et $r_0'=r'/2$. Nous nous contentons d'exposer la preuve de 3°: on a

$$|b|-|\mu| = \min.\{|Y|\,|(X, Y)\in C'-D'\}\,.$$

Et on a $X=0$ si $(X, Y)\in C'-D'$ et $|Y|=|b|-|\mu|$.

D'après 4°, pour tout u $(0<u<u_0)$, il existe un point (ξ, η') de $C'-D'$ tel que $|\xi|=u$, $|\eta'|=u^q+|b|-|\mu|$. D'après 5°, il faut qu'on ait

$$\eta' = (u^q+|b|-|\mu|)(\xi/|\xi|)^q\,.$$

Posons $\eta=\eta'+\mu$; on a $(\xi, \eta)\in C-D$ et $|\eta|\leqq u^q+|b|$. Or on a, d'après 4°, $|\eta|=u^q+|b|$. En outre, d'après 5°, on a $\eta/|\eta|=(\xi/|\xi|)^q$. En conséquence, on a

$$|\eta|(\xi/|\xi|)^q = (u^q+|b|-|\mu|)(\xi/|\xi|)^q+\mu\,,$$

ce qui entraîne $(\xi/|\xi|)^q=\mu/|\mu|=b/|b|$.

(4) Prouvons ensuite par le raisonnement par l'absurde que:

7°. *Tous les points* $(0, y)$ *sur* $|y|=|b|$ *appartiennent à* $C-D$.

Supposons en effet qu'il existe un point $(0, b_0)\in D$ tel que $|b_0|=|b|$. Transformons l'espace x, y à l'espace X, Y par $X=\omega x$, $Y=\omega' y$, où ω, ω' sont des nombres tels que $\omega^q=\omega'$, $|\omega'|=1$. Alors l'image $D(\omega)$ de D, le polynôme $-X^q$ et les images $C(\omega)$, $C_1(\omega)$, $C_2(\omega)$ de C, C_1, C_2 ($C(\omega)$, $C_1(\omega)$, $C_2(\omega)$ ont les mêmes expressions que C, C_1, C_2), satisfont aux conditions $1°\sim 6°$. On a en particulier $(0, |b|)\in D(\sqrt[q]{|b|/b_0})$: donc on peut considérer b_0 comme réel et positif.

En considérant les régions $D(\exp(\sqrt{-1}\,2k\pi/q))$, $k=0, 1, \cdots, q-1$, dans l'unique espace x, y, formons leur partie commune D_0; alors D_0 satisfait de même aux condition $1°\sim 6°$, par rapport au polynôme $-x^q$ et aux domaines C, C_1, C_2.

Soit $\widehat{b_1, b_2}$ l'arc sur le cercle $|y|=b_0$ tel que l'on ait

$$(C-D_0)\cap\{(x, y)\,|\,x=0,\ y\in\widehat{b_1, b_2}\} = \{(0, b_1), (0, b_2)\}$$

et $b_0\in\widehat{b_1, b_2}$, $\mathrm{Re}\, b_1\geqq \mathrm{Re}\, b_2$[4]. Posons $b_1=b_0\exp(\sqrt{-1}\,\nu_0)$, $0<|\nu_0|\leqq\pi$. Corres-

4) Re x désigne la partie réelle de x.

pondant à la région D_0, construisons la fonction $v=K(u)$ que nous avons introduite dans le Lemme 6: on voit qu'elle est définie, concave, décroissante et continûment dérivable dans un intervalle $[1, u_0']$ $(1<u_0')$.

Soit ε un nombre tel que $1<\varepsilon\leqq u_0'$ et soit $B(\varepsilon)$ l'ensemble

$$\{(x, y)\in C-D_0 \mid |1/y|^2 = K(|e^x|^2),\ 1<|e^x|^2<\varepsilon\};$$

alors $B(\varepsilon)$ n'est pas vide pour tout ε $(1<\varepsilon\leqq u_0')$. En effet, si l'on avait $B(\varepsilon)=\phi$ pour un ε, la courbe $v=K(u)$ se réduirait à un segment au voisinage de $u=1$ et donc on aurait $K'(1)<0$, ce qui contredit au résultat $K'(1)=0$ dans le Lemme 6.

Soit (ξ, η) un point quelconque de $B(u_0')$; posons

$$\mu = \mu(\xi) = \arg \xi,\ \nu = \nu(\eta) = \arg \eta,\ (|\mu(\xi)|<\pi/2)\,.$$

En vertu du Lemme 4, nous avons $\lambda\bar{\eta}\eta^2 \exp(\xi+\bar{\xi})=q\xi^{q-1}$, où $\lambda=-K'(|e^\xi|^2)$. Donc il faut que

$$\nu \equiv (q-1)\mu \qquad (\mathrm{mod.}\ 2\pi)\,.$$

Remarquons maintenant qu'on a la proposition suivante, qui est évidente par la construction de D_0 et b_1:

Pour $0<u<u_0$, *tous les* q *points* (x_k, y), $k=0, 1,\cdots, q-1$, *appartiennent à* $C-D_0$, *où l'on pose*

$$x_k = u\sqrt[q]{b_1/b_0}\exp(\sqrt{-1}\,2k\pi/q) \quad et \quad y = (u^q+b_0)b_1/b_0\,.$$

A l'aide de la propriété de D_0, on a $|\mu|\leqq|\nu_0|/q$ pour $(\xi, \eta)\in B(u_0')$. En effet, si $|\nu_0|/q=\pi/2$, c'est évident. Si $|\nu_0|/q<\pi/2$, d'après 4° et la proposition pour D_0 qu'on vient d'obtenir on voit que le point $(|e^\xi|^2, K(|e^\xi|^2))$ sur le plan u, v est situé au dessous de la courbe $v=L(\log u;\ \mu)^{-2}$ et au dessus de la courbe $v=L(\log u;\ \nu_0/q)^{-2}$, où $L(\sigma;\tau)$ désigne la fonction $[\sigma/(2\cos\tau)]^q+b_0$. Cela entraîne que $|\mu|\leqq|\nu_0|/q$.

Puisqu'on a $B(\varepsilon)\neq\phi$ pour $1<\varepsilon\leqq u_0'$, on peut trouver une suite convergente $\{(\xi_n, \eta_n)\}$ de points appartenant à $B(u_0')$, telle que $\mathrm{Re}\,\xi_n\to 0$ pour $n\to\infty$. Soit $\lim(\xi_n, \eta_n)=(\xi_0, \eta_0)$; alors on a

$$\mathrm{Re}\,\xi_0 = 0 \quad \text{et} \quad \lim \mu(\xi_n) = \mu(\xi_0) \equiv \arg \xi_0\,.$$

D'autre part, on a $|\mu(\xi_0)|\leqq|\nu_0|/q$ puisqu'on a $|\mu(\xi_n)|\leqq|\nu_0|/q$ pour tout n. En vertu de l'équation

$$|\eta_0|^{-2} = \lim K(|\exp \xi_n|^2) = K(1) = b_0^{-2}$$

et des relations $(\xi_0, \eta_0)\notin D_0$, $|\xi_0|\leqq\rho'$, on a $(\xi_0, \eta_0)\in C-D_0$ et $|\eta_0|=b_0$. Donc on a $\xi_0=0$, d'après 3°. Enfin, en remarquant qu'on a

$$\nu(\eta_n) \equiv (q-1)\mu(\xi_n) \qquad (\text{mod. } 2\pi) \quad \text{pour chaque} \quad n\,,$$

on a $\eta_0 = b_0 \lim \exp(\sqrt{-1}\,\nu(\eta_n)) = b_0 \exp(\sqrt{-1}\,(q-1)\mu(\xi_0))$. Par conséquent, η_0 est contenu dans l'intérieur de $\widehat{b_1, b_2}$, puisqu'on a

$$(q-1)|\mu(\xi_0)| \leqq (q-1)|\nu_0|/q < |\nu_0|\,.$$

Mais cela est en contradiction avec $(0, \eta_0) \in C - D_0$: d'où la proposition 7° est démontrée.

(5) Transformons l'espace x, y à l'espace X, Y par $X = x$, $Y = y - \varepsilon$, où ε est un nombre positif petit. L'image D' de D, le polynôme $-X^q$ et trois domaines cylindriques convenables C', C_1', C_2' satisfont aux conditions 1°$\sim$3° et donc nécessairement aux 4°$\sim$7°. On a

$$|b| - \varepsilon = \min.\{|Y| \mid (X, Y) \in C' - D'\}\,.$$

Mais sur le cercle $X = 0$, $|Y| = |b| - \varepsilon$, il n'y a pas de points de $C' - D'$ autre que $(0, |b| - \varepsilon)$. C'est en contradiction avec la proposition 7°: d'où la démonstration.

Le lemme étant établi, en vertu de la Proposition 2, nous avons la

Proposition 3. *Dans l'espace de deux variables x, y, les pseudoconvexités* (0), (I), (II), (III, y) *par rapport à x sont mutuellement équivalentes.*

5. Résultat principal. Dans ce numéro, considérons le cas de m (>1) variables. Soit D une région dans l'espace de m variables $x, y_1, \cdots, y_{m-1}$; nous avons d'abord le

Lemme 8. *Soit A une variété analytique de la forme*

$$y_i = a_i u + b_i(x)\,, \qquad i = 1, 2, \cdots, m-1\,.$$

où les a_i sont des constantes et les $b_i(x)$ des polynômes, mais ils sont d'ailleurs quelconques. Désignons par D_A la région

$$\{(x, u) \mid (x, a_1 u + b_1(x), \cdots, a_{m-1} u + b_{m-1}(x)) \in D\}$$

dans l'espace x, u. Alors la région D est pseudoconvexe par rapport à x, si et seulement si la région D_A est pseudoconvexe par rapport à x pour tout A admissible.

Preuve. Soit D pseudoconvexe par rapport à x. Soit A une variété de la forme donnée dans le lemme et soit $u = f(x, t)$ une fonction continue sur $|x - x_0| \leqq r$, $0 \leqq t \leqq 1$ et holomorphe sur $|x - x_0| \leqq r$ pour t fixe. Supposons que $(x_0, f(x_0, 0)) \notin D_A$ et $(x, f(x, 0)) \in D_A$ pour $0 < |x - x_0| \leqq r$. Posons

$$y_i = f_i(x, t) = a_i f(x, t) + b_i(x) \qquad \text{pour chaque} \quad i\,.$$

Alors on a $(x_0, f_1(x_0, 0), \cdots, f_{m-1}(x_0, 0)) \notin D$ et $(x, f_1(x, 0), \cdots, f_{m-1}(x, 0)) \in D$ pour $0 < |x-x_0| \leqq r$. Puisque D est pseudoconvexe par rapport à x, il existe un δ positif tel que $0 \leqq t < \delta$ entraîne l'existence d'un point x dans $|x-x_0| < \varepsilon$, satisfaisant à

$$(x, f_1(x, t), \cdots, f_{m-1}(x, t)) \in D \quad \text{ou} \quad (x, f(x, t)) \in D_A ,$$

où ε est un nombre positif arbitrairement donné auparavant.

Réciproquement, supposons que D satisfasse à la condition pour toute variété A admissible. Prenons trois domaines suivants.

$$\begin{aligned} &C : |x-x_0| < \rho, \ |y_i - f_i(x)| < r_i , && i = 1, 2, \cdots, m-1 , \\ &C_1 : \rho' < |x-x_0| < \rho, \ |y_i - f_i(x)| < r_i , && i = 1, 2, \cdots, m-1 , \\ &C_2 : |x-x_0| < \rho, \ |y_i - f_i(x)| < r_i' \ (< r_i) , && i = 1, 2, \cdots, m-1 , \end{aligned}$$

où les $f_i(x)$ sont des polynômes. Supposons que $C_1 \cup C_2 \subset D$ et prouvons que $C \subset D$. Transformons l'espace $x, y_1, \cdots, y_{m-1}$ à l'espace $X, Y_1, \cdots, Y_{m-1}$ par

$$X = x - x_0, \ Y_i = y_i - f_i(x) , \quad i = 1, 2, \cdots, m-1 .$$

Alors C, C_1, C_2 sont transformés respectivement aux domaines

$$\begin{aligned} &C' : |X| < \rho, \ |Y_i| < r_i , && i = 1, 2, \cdots, m-1 , \\ &C_1' : \rho < |X| < \rho, \ |Y_i| < r_i , && i = 1, 2, \cdots, m-1 , \\ &C_2' : |X| < \rho, \ |Y_i| < r_i' , && i = 1, 2, \cdots, m-1 . \end{aligned}$$

En désignant par D' l'image de D, prouvons que $C' \subset D'$.

D' jouit, dans l'espace $X, Y_1, \cdots, Y_{m-1}$, de la même propriété que D, c'est-à-dire que, pour toute variété A' de la forme

$$Y_i = a_i u + b_i(X) , \quad i = 1, 2, \cdots, m-1$$

(les a_i sont des constantes et les $b_i(X)$ des polynômes), la région

$$D'_{A'} = \{(X, u) \,|\, (X, a_1 u + b_1(X), \cdots, a_{m-1} u + b_{m-1}(X)) \in D'\}$$

est pseudoconvexe par rapport à X. Soit en effet $u = F(X, t)$ une fonction continue sur $|X - X_1| \leqq r$, $0 \leqq t \leqq 1$ et holomorphe sur $|X - X_1| \leqq r$ pour t fixe. Supposons qu'on ait $(X_1, F(X_1, 0)) \notin D'_{A'}$ et $(X, F(X, 0)) \in D'_{A'}$ pour $0 < |X - X_1| \leqq r$. Soit A la variété

$$y_i = a_i u + b_i(x - x_0) + f_i(x) , \quad i = 1, 2, \cdots, m-1 ;$$

on a $(x_1, f(x_1, 0)) \notin D_A$ et $(x, f(x, 0)) \in D_A$ pour $0 < |x - x_1| \leqq r$, où $x_1 = X_1 + x_0$ et que $f(x, t)$ désigne la fonction $F(x - x_0, t)$ continue sur $|x - x_1| \leqq r$, $0 \leqq t \leqq 1$ et holomorphe sur $|x - x_1| \leqq r$ pour t fixe. Par conséquent, il existe un δ positif tel que $0 \leqq t < \delta$ entraîne l'existence d'un point x satisfaisant à $|x - x_1| < \varepsilon$ et $(x, f(x, t)) \notin D_A$, ou celle d'un point X satisfaisant à $|X - X_1| < \varepsilon$ et $(X, F(X, t)) \notin D'_{A'}$ (pour le voir il suffit de poser $X = x - x_0$), où ε est un nombre positif arbitraire. Cela montre que la propriété demandée pour $D'_{A'}$ est vraie.

Pour raisonner par l'absurde, supposons que $C' \not\subset D'$. Pour $l = 0, 1, \cdots, m-1$, posons

$$\Sigma_l = \{|X| < \rho,\ |Y_i| < r_i,\ |Y_j| < r_j',\ 1 \leqq i \leqq l < j < m\}.$$

Puisqu'on a $C' = \Sigma_{m-1} \not\subset D'$, il existe un entier k $(1 \leqq k < m)$ tel que $\Sigma_k \not\subset D'$ et $\Sigma_{k-1} \subset D'$. Soit $(a, b_1, \cdots, b_{m-1})$ un point de $\Sigma_k - D'$; on a $|a| \leqq \rho'$, $|b_i| < r_i$, $r_k' \leqq |b_k| < r_k$, $|b_j| < r_j'$ $(1 \leqq i < k < j < m)$. Soit A' la variété: $Y_k = u$, $Y_i = b_i$, $i \neq k$. Alors on a

$$D'_{A'} = \{(X, u) \mid (X, Y_1, \cdots, Y_{m-1}) \in D',\ Y_k = u,\ Y_i = b_i,\ i \neq k\}.$$

Cette région est pseudoconvexe par rapport à X. D'autre part, on a $C_1'' \cup C_2'' \subset D'_{A'}$ et $C'' \not\subset D'_{A'}$, où C'', C_1'', C_2'' sont les domaines

$$\begin{aligned} C'' &: |X| < \rho,\ |u| < r_k, \\ C_1'' &: \rho' < |X| < \rho,\ |u| < r_k, \\ C_2'' &: |X| < \rho,\ |u| < r_k'. \end{aligned}$$

Cela est impossible.

On a ensuite la proposition suivante.

Proposition 4. *Dans l'espace $x, y_1, \cdots, y_{m-1}$, les quatre pseudoconvexités* (0), (I), (II), (III, y_1) *par rapport à x sont mutuellement équivalentes.*

Preuve. Supposons, pour raisonner par l'absurde, qu'une région D soit pseudoconvxe (III, y_1) par rapport à x et non-pseudoconvexe par rapport à x. Alors d'après le Lemme 8, il existerait une variété A: $y_i = a_i u + b_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, m-1$, telle que la région

$$D_A = \{(x, u) \mid (x, a_1 u + b_1(x), \cdots, a_{m-1} u + b_{m-1}(x)) \in D\}$$

ne soit pas pseudoconvexe par rapport à x, où les a_i sont des constantes et les $b_i(x)$ des polynômes. On voit qu'il existe trois domaines fermés

$$\begin{aligned} C &: |x - x_0| \leqq \rho,\ |u - f(x)| \leqq r, \\ C_1 &: \rho' \leqq |x - x_0| \leqq \rho,\ |u - f(x)| \leqq r, \\ C_2 &: |x - x_0| \leqq \rho,\ |u - f(x)| \leqq r'\ (< r), \end{aligned}$$

de façon qu'on ait $C_1 \cup C_2 \subset D_A$ et int. $C \not\subset D_A$[5], où $f(x)$ est un polynôme. Je dis

5) int. C désigne l'intérieur de C.

qu'on peut supposer $a_1 \neq 0$. En effet, dans le cas $a_1=0$, prenons un point $(\xi, p) \in \mathrm{int}.\, C-D_A$. On a

$$\Delta = \{(x, a_1u+b_1(x), \cdots, a_{m-1}u+b_{m-1}(x)) \mid (x, u) \in C_1 \cup C_2\} \subset D .$$

Donc il existe un δ_0 positif tel que

$$\text{dist.}\ [(x, y_1, \cdots, y_{m-1}), \Delta] < \delta_0 \quad \text{entraîne} \quad (x, y_1, \cdots, y_{m-1}) \in D .$$

Considérons la variété

$$A' : y_1 = a_1'(u-p)+b_1(x),\ y_i = a_iu+b_i(x) , \qquad i = 2, 3, \cdots, m-1 ,$$

où a_1' est non-nul et tel qu'on ait $|a_1'(u-u')| < \delta_0$ pour deux points quelconques (x, u) et (x', u') de C. Or, si $(x, u) \in C_1 \cup C_2$, on a

$$(x, a_1u+b_1(x), \cdots, a_{m-1}u+b_{m-1}(x)) \in \Delta ,$$

ce qui entraîne $(x, a_1'(u-p)+b_1(x), \cdots, a_{m-1}u+b_{m-1}(x)) \in D$ ou $(x, u) \in D_{A'}$ puisque $|a_1'(u-p)| < \delta_0$. Donc on a $C_1 \cup C_2 \subset D_{A'}$. En outre on a $(\xi, p) \notin D_{A'}$. Donc on peut supposer désormais que $a_1 \neq 0$.

D_A et $b_1(x)$ jouissent de la propriété suivante: soit $u=f(x, t)$ une fonction continue sur $|x-x_1| \leqq r_1$, $0 \leqq t \leqq 1$ et holomorphe sur $|x-x_1| \leqq r_1$ pour t fixe. Supposons d'ailleurs qu'on ait

$$a_1 f'(x_1, 0)+b_1'(x_1) \neq 0,\ (x_1, f(x_1, 0)) \notin D_A$$

et $(x, f(x, 0)) \in D_A$ pour $0 < |x-x_1| \leqq r_1$. Alors il existe un δ positif tel que $0 \leqq t < \delta$ entraîne l'existence d'un point x dans $|x-x_1| < \varepsilon$ satisfaisant à $(x, f(x, t)) \notin D_A$, où ε est un nombre positif arbitraire. La pseudoconvexité (III, y_1) de D par rapport à x possède cette propriété: pour le voir, il suffit de considérer les fonctions $y_i=f_i(x, t)=a_i f(x, t)+b_i(x)$, $i=1, 2, \cdots, m-1$.

Transformons l'espace x, u à l'espace X, U par $X=x$, $U=u+a_1^{-1}b_1(x)$. Alors l'image D' de D_A est pseudoconvexe (III, U) par rapport à X, de sorte que, d'après le Lemme 7, D' est pseudoconvexe par rapport à X: ceci est une conséquence immédiate de la propriété de D_A.

Considérons les domaines

$$\begin{aligned} C' &: \ |X-x_0| \leqq \rho,\ |U-F(X)| \leqq r ,\\ C_1' &: \ \rho' \leqq |X-x_0| \leqq \rho,\ |U-F(X)| \leqq r ,\\ C_2' &: \ |X-x_0| \leqq \rho,\ |U-F(X)| \leqq r' , \end{aligned}$$

où $F(X)=f(X)+a_1^{-1}b_1(X)$. On a $C_1' \cup C_2' \subset D'$ et $\mathrm{int}.\, C' \not\subset D'$; ce qui est en contradiction avec la pseudoconvexité de D' par rapport à X.

Employons les variables $z_1, z_2, \cdots, z_m$; alors on a le lemme suivant.

Lemme 9. *Supposons qu'une région D soit pseudoconvexe par rapport à*

$z_1, z_2, \cdots, z_{m-1}$; alors la fonction

$$G(z_1, z_2, \cdots, z_m) = -\log R_{z_m}(z_1, \cdots, z_{m-1})$$

est plurisousharmonique dans D.

Preuve. G est semi-continu supérieurement et ne prend pas la valeur ∞. Donc il suffit de vérifier sa sousharmonicité sur une droite complexe L quelconque. En employant la méthode donnée par M. K. Oka dans [1, 2], nous montrons que cela est vrai dans un voisinage de l'origine sur L lorsque D et L contiennent l'origine: cela achèvera la démonstration.

1°. Considérons le cas où L est représenté par $z_i = a_i z_k$, $i \neq k$, où k est un entier tel que $1 \leq k < m$. Pour la simplicité, posons $k=1$.

Considérons la transformation: $Z_1 = z_1$, $Z_i = z_i - a_i z_1$, $i = 2, 3, \cdots, m$. L'image L' de L par cette transformation est

$$Z_i = 0 , \quad i = 2, 3, \cdots, m .$$

La pseudoconvexité de D par rapport à z_1 entraîne celle de l'image D' de D, par rapport à Z_1. D'autre part on a

$$R'_{Z_m}(Z_1, \cdots, Z_{m-1}) = R_{z_m}(z_1, \cdots, z_{m-1}) ,$$

dont le premier membre est le rayon de Hartogs de D' par rapport à Z_m: c'est une conséquence du fait que la transformation se réduit à une translation du plan z_m pour $z_1, z_2, \cdots, z_{m-1}$ fixes. De plus, si la fonction $-\log R_0'(Z_1, 0, \cdots, 0)$ est sousharmonique, la restiction

$$G(z_1, a_2 z_1, \cdots, a_m z_1) = -\log R_0'(z_1, 0, \cdots, 0)$$

de G sur L l'est aussi. Donc on peut supposer que L est de la forme: $z_i = 0$, $i = 2, 3, \cdots, m$.

Soit $u(z_1)$ une fonction harmonique mais d'ailleurs arbitraire dans $|z_1| < \infty$; la fonction $G(z_1, 0, \cdots, 0) + u(z_1)$ n'atteint aucun maximum local dans le voisinage de $z_1 = 0$. Par conséquent, $G(z_1, 0, \cdots, 0)$ est sousharmonique dans le voisinage de $z_1 = 0$.

Soit en effet $f(z_1)$ une fonction holomorphe dont la partie réelle est $-u(z_1)$. Transformons l'espace par

$$Z_i = z_i,\ Z_m = z_m \exp(f(z_1)) , \quad i = 1, 2, \cdots, m-1 .$$

L'image L' de L par cette transformation est de la forme: $Z_i = 0$, $i = 2, 3, \cdots, m$. L'image D' de D est pseudoconvexe par rapport à Z_1. En outre on a

$$G'(Z_1) \equiv -\log R_0'(Z_1, 0, \cdots, 0) = G(z_1, 0, \cdots, 0) + u(z_1) ,$$

où $R'_{Z_m}(Z_1, \cdots, Z_{m-1})$ désigne le rayon de Hartogs de D' par rapport à Z_m. Par conséquent, il suffit de montrer que la fonction $G'(Z_1)$ n'atteint aucun maximum local dans le voisinage de $Z_1=0$.

Pour raisonner par l'absurde, supposons qu'il y ait un cercle $|Z_1-Z_1^0|\leqq\rho$ sur le plan Z_1, contenu dans le voisinage de l'origine et tel qu'on ait $G'(Z_1)<G'(Z_1^0)$ sur $|Z_1-Z_1^0|=\rho$. Puisque G' est semi-continu supérieurement, on peut trouver un r_0 tel que

$$R_0'(Z_1, 0,\cdots,0)>r_0>R_0'(Z_1^0, 0,\cdots,0) \quad \text{sur} \quad |Z_1-Z_1^0| = \rho\,.$$

Or l'ensemble $\{|Z_1-Z_1^0|\leqq\rho,\ Z_i=0,\ i=2, 3,\cdots,m\}$ est contenu dans le voisinage de l'origine et donc dans D'. De plus, l'ensemble

$$\{|Z_1-Z_1^0| = \rho,\ Z_i = 0,\ |Z_m|\leqq r_0\,,\quad i = 2, 3,\cdots, m-1\}$$

est de même contenu dans D'. D'après la pseudoconvexité de D' par rapport à Z_1, on a

$$\{|Z_1-Z_1^0|\leqq\rho,\ Z_i = 0,\ |Z_m|\leqq r_0\,,\quad i = 2, 3,\cdots, m-1\}\subset D'\,.$$

Par suite on a $R_0'(Z_1^0, 0,\cdots,0)>r_0$: c'est impossible.

2°. Soit L de la forme: $z_i=0$, $i=1, 2,\cdots, m-1$. La fonction $R_{z_m}(0,\cdots, 0)$ est égale à la distance du point z_m à la frontière de $D_1=\{z_m|(0,\cdots, 0, z_m)\in D\}$. Donc

$$G(0,\cdots, 0, z_m) = \max.\{-\log|z_m-\zeta|\,|\zeta\in \mathrm{Fr.}\, D_1\}$$

est sousharmonique dans D_1, puisque $-\log|z_m-\zeta|$ est harmonique et que $G(0,\cdots, 0, z_m)$ est continu.

Soient D et σ une région et un nombre positif petit; nous désignerons par $D^{(\sigma)}$ la région constituée par les points $P\in D$ tels que dist. $(P, \mathrm{Fr.}\, D)>\sigma$. D'abord, en désignant les variables par $x, y_1,\cdots, y_{m-1}$ on a le

Lemme 10. *Si D est pseudoconvexe par rapport à x, alors $D^{(\sigma)}$ l'est aussi.*

Preuve. Soient $y_i=f_i(x, t)$, $i=1, 2,\cdots, m-1$ des fonction continues sur $|x-x_0|\leqq r$, $0\leqq t\leqq 1$ et holomorphes sur $|x-x_0|\leqq r$ pour t fixe. Soit F_t, $0\leqq t\leqq 1$ la famille des surfaces définies par

$$y_i = f_i(x, t),\ |x-x_0|\leqq r\,,\quad i = 1, 2,\cdots, m-1.$$

Supposons que $\mathrm{Fr.}\, F_0\subset D^{(\sigma)}$ et $F_t\subset D^{(\sigma)}$ pour $0<t\leqq 1$. S'il y avait un point $P_1\in F_0-D^{(\sigma)}$, on aurait une contradiction.

En effet, puisque $P_1\in \mathrm{Fr.}\, D^{(\sigma)}$, il existe un point $P_2\in \mathrm{Fr.}\, D$ tel qu'on ait dist. $(P_1, P_2)=\sigma$. Soient

$$P_i = (x^{(i)}, y_1^{(i)},\cdots, y_{m-1}^{(i)})\,,\qquad i = 1, 2;$$

considérons la translation suivante;

$$x \to x - x^{(1)} + x^{(2)},\ y_i \to y_i - y_i^{(1)} + y_i^{(2)}\ , \quad i = 1, 2, \cdots, m-1\ .$$

alors, pour $0 \leqq t \leqq 1$, l'image G_t de F_t par cette translation est représentée par

$$y_i = f_i(x + x^{(1)} - x^{(2)},\ t) - y_i^{(1)} + y_i^{(2)},\ |x - x_0'| \leqq r\ ,$$
$$i = 1, 2, \cdots, m-1\ ,$$

où $x_0' = x_0 - x^{(1)} + x^{(2)}$. La famille G_t, $0 \leqq t \leqq 1$ satisfait aux conditions que Fr. $G_0 \subset D$ et $G_t \subset D$ pour $0 < t \leqq 1$. On a $G_0 \subset D$ pusique D est pseudoconvexe par rapport à x. D'autre part on a $P_2 \in G_0 - D$: c'est impossible.

Supposons que D soit borné; alors, en désignant les variables par z_1, $z_2, \cdots$, z_m, on a le

Lemme 11. *Soient $R_i(P)$ $(P \in D^{(\sigma)})$, $i = 1, 2, \cdots, m$, les rayons de Hartogs de $D^{(\sigma)}$ par rapport à z_1, $z_2, \cdots, z_m$, respectivement. La fonction*

$$F(P) = \min.\ \{R_i(P)\ , \quad i = 1, 2, \cdots, m\}$$

tend vers 0, *lorsque le point $P \in D^{(\sigma)}$ tend vers la frontière de $D^{(\sigma)}$.*

Preuve. Pour raisonner par l'absurde, supposons qu'il existe une suite convergente $\{P_\nu\}$ de points dans $D^{(\sigma)}$ telle que l'on ait lim $P_\nu = P_0 \in$ Fr. $D^{(\sigma)}$ et qu'on ait

$$R_i(P_\nu) \geqq 2k_0\ , \quad i = 1, 2, \cdots, m;\ \nu = 1, 2, \cdots,$$

où k_0 est un nombre positif. Alors il existerait un point $P_0' \in$ Fr. D tel que dist. $(P_0, P_0') = \sigma$; nous posons

$$P_0 = (z_1^0, z_2^0, \cdots, z_m^0) \quad \text{et} \quad P_0' = (z_1', z_2', \cdots, z_m')\ .$$

Soit $P = (z_1, z_2, \cdots, z_m)$ un point quelconque. Désignons par $B(P)$ l'ensemble

$$\{(z_1 + u,\ z_2, \cdots, z_m)\ |\ |u| < k_0\}$$

et par $C(P)$ l'ensemble ouvert $\{P'\ |\ \text{dist.}\ [P', B(P)] < \sigma\}$. En vertu de $R_1(P_\nu) > k_0$, on a d'abord $C(P_\nu) \subset D$ pour chaque ν et donc on a $C(P_0) \subset D$. Je dis qu'on a $P_0' \in$ Fr. $C(P_0)$. En effet, $P_0 \in B(P_0)$ entraîne $P_0' \in \overline{C(P_0)}$ et donc $P_0' \in C(P_0)$ entraîne $P_0' \in D$.

Considérons l'hypersphère $S = \{P\ |\ \text{dist.}\ (P, P_0) = \sigma\}$. On a $P_0' \in S \cap$ Fr. $C(P_0)$. En outre on a

$$S \cap \text{Fr.}\ C(P_0) \subset \{z_1 = z_1^0\}\ .$$

Soit en effet $P = (z_1, z_2, \cdots, z_m)$ un point de S tel que $z_1 \neq z_1^0$. Il existe un nombre complexe u petit tel que

$$|z_1-z_1^0-u|^2+\sum_{i>1}|z_i-z_i^0|^2<\sigma^2 \quad \text{et} \quad |u|\leqq k_0\,.$$

On a $(z_1^0+u,\ z_2^0,\cdots,\ z_m^0)\in B(P_0)$ et on a nécessairement $P\in C(P_0)$.

Par conséquent on voit $z_1'=z_1^0$. Pour chaque $i=2,3,\cdots,m$, on a pareillement $z_i'=z_i^0$; c'est impossible.

Corollaire. *Soit D une région pseudoconvexe par rapport à toutes les variables de l'espace; alors D est pseudoconvexe au sens usuel.*

Preuve. D'abord supposons que D soit borné. Soit σ un nombre positif petit. En vertu du Lemme 10, $D^{(\sigma)}$ est pseudoconvexe par rapport à toutes les variables qui seront désignées par $z_1, z_2, \cdots, z_m$. D'après le Lemme 9, la fonction $-\log R_i(P)$ $(P\in D^{(\sigma)})$ est plurisousharmonique pour chaque i, où R_i est le rayon de Hartogs de $D^{(\sigma)}$ par rapport à z_i. Le Lemme 11 assure que la fonction

$$G(P)=\max.\{-\log R_i(P)\,,\quad i=1,2,\cdots,m\}$$

tend vers ∞ lorsque le point $P\in D^{(\sigma)}$ tend vers la frontière de $D^{(\sigma)}$. Puisque G est plurisousharmonique, on voit, d'après le lemme dans le Préliminaire, que $D^{(\sigma)}$ est pseudoconvexe. D'après la proposition dans le Préliminaire, la limite D de $D^{(\sigma)}$ pour $\sigma\to 0$ est pseudoconvexe.

Supposons ensuite que D soit non-borné; alors la partie commune de D et une boule quelconque autour de l'origine satisfait aux mêmes conditions que D. Par suite, D est pseudoconvexe, car il est la limite d'une suite croissante de régions pseudoconvexes.

Lemme 12. *Soit D une région dans l'espace $x, y_1,\cdots,y_{m-1}$. Alors D est pseudoconvexe par rapport à $y_1, y_2,\cdots,y_{m-1}$, si D est pseudoconvexe par rapport à x.*

Preuve. Démontrons que D est pseudoconvexe (III, x) par rapport à y_1, sous l'hypothèse que D soit pseudoconvexe par rapport à x. D'après la Proposition 4, cela achèvera la preuve. Soient

$$x=f(y_1,t),\ y_i=f_i(y_1,\ t)\,,\quad i=2,3,\cdots,m-1$$

des fonctions continues sur $|y_1-y_1^0|\leqq r_0$, $0\leqq t\leqq 1$ et holomorphes sur $|y_1-y_1^0|\leqq r_0$ pour t fixe. Supposons d'ailleurs qu'on ait

$$f'(y_1^0,\ 0)\neq 0,\ (f(y_1^0,\ 0),\ y_1^0,\ f_2(y_1^0,\ 0),\cdots,f_{m-1}(y_1^0,\ 0))\notin D$$

et en outre que

$$(f(y_1,\ 0),\ y_1,\ f_2(y_1,\ 0),\cdots,f_{m-1}(y_1,\ 0))\in D \quad \text{pour} \quad 0<|y_1-y_1^0|\leqq r_0\,.$$

Envisageons maintenant l'équation $x=f(y_1,\ t)$. On voit qu'il existe une unique solution $y_1=g_1(x, t)$ définie, continue sur $|x-x_0|\leqq r$, $0\leqq t\leqq \tau$ et holomorphe sur $|x-x_0|\leqq r$ pour t fixe, où $x_0=f(y_1^0, 0)$ et que r, τ sont des nombres positifs petits. Pour chaque $i=2, 3, \cdots, m-1$, posons

$$y_i = g_i(x, t) = f_i(g_1(x, t), t);$$

ils satisfont aux mêmes conditions que celles de $g_1(x, t)$ sur $|x-x_0|\leqq r$, $0\leqq t\leqq \tau$. On a en particulier $(x_0, g_1(x_0, 0), \cdots, g_{m-1}(x_0, 0))\notin D$. En outre, pour $0<|x-x_0|\leqq r$, on a $0<|g_1(x, 0)-y_1^0|\leqq r_0$ et donc

$$(x, g_1(x, 0), \cdots, g_{m-1}(x, 0))\in D\,.$$

Soit ε un nombre positif; il existe deux nombres positifs ε_1, δ_1 tels que $|g_1(x, t)-y_1^0|<\varepsilon$ pour $|x-x_0|<\varepsilon_1$, $0<t<\delta_1$. Ensuite, il existe un δ $(<\delta_1)$ positif tel que $0\leqq t<\delta$ entraîne l'existence d'un point x dans $|x-x_0|<\varepsilon_1$ satisfaisant à $(x, g_1(x, t), \cdots, g_{m-1}(x, t))\notin D$. Or, si on pose $y_1=g_1(x, t)$, on a

$$(f(y_1, t), y_1, f_2(y_1, t), \cdots, f_{m-1}(y_1, t))\notin D \quad \text{et} \quad |y_1-y_1^0|<\varepsilon\,.$$

Cela montre la pseudoconvexité (III, x) de D par rapport à y_1.

D'après le Lemme 12 et le corollaire du Lemme 11, on a le

Théorème. *Si une région D est pseudoconvexe par rapport à une des variables de l'espace, D est pseudoconvexe au sens usuel.*

Par le théorème et la Proposition 4, on a le

Corollaire 1. *Dans l'espace $x, y_1, \cdots, y_{m-1}$, une région D est pseudoconvexe, si et seulement si D est pseudoconvexe* (III, y_1) *par rapport à x.*

Considérons dans l'espace $x, y_1, \cdots, y_{m-1}$, une variété

$$A: y_i = a_i u+b_i(x)\,, \qquad i=1, 2, \cdots, m-1\,,$$

où les a_i sont des constantes et les $b_i(x)$ des polynômes mais d'ailleurs arbitraires. Soit D une région; formons la région

$$D_A = \{(x, u)\,|\,(x, a_1u+b_1(x), \cdots, a_{m-1}u+b_{m-1}(x))\in D\}\,.$$

D'après le Lemme 8 et le théorème, on a le corollaire suivant.

Corollaire 2. *La région D est pseudoconvexe, si et seulement si la région D_A est pseudoconvexe pour toute telle variété A.*

En désignant les variables par $z_1, z_2, \cdots, z_m$, on a une application du Corollaire 2. Considérons une vairété

$$B: z_i = P_i(z_1, z_2), \qquad i = 3, 4, \cdots, m,$$

où les P_i sont des polynômes de z_1, z_2, mais ils sont d'ailleurs arbitraires. Soit une région; formons la région

$$D(B) = \{(z_1, z_2) \mid (z_1, z_2, P_3(z_1, z_2), \cdots, P_m(z_1, z_2)) \in D\}.$$

Alors on a le

Corollaire 3. *La région D est pseudoconvexe, si et seulement si la région D(B) est pseudoconvexe pour tout B admissible.*

Preuve. Si D satisfait à la condition, D satisfait à celle du Corollaire 2 et donc D est pseudoconvexe. En effet, en désignant les variables par x, $y_1, \cdots, y_{m-1}$, supposons qu'il existe une variété

$$A: y_i = a_i u + b_i(x), \qquad i = 1, 2, \cdots, m-1,$$

telle que D_A ne soit pas pseudoconvexe. Alors, comme on l'a vu dans la preuve de la Proposition 4, on peut supposer que $a_1 \neq 0$: A est égal à la variété définie par

$$y_i = a_1^{-1} a_i (y_1 - b_1(x)) + b_i(x), \qquad i = 2, 3, \cdots, m-1.$$

Par l'hypothèse, $D(A)$ est pseudoconvexe. Donc D_A l'est aussi, puisqu'il est transformé biunivoquement à $D(A)$ par $u = a_1^{-1}(y_1 - b_1(x))$: c'est absurde.

Supposons ensuite que D soit pseudoconvexe; alors il existe une fonction plurisousharmonique $G(z_1, z_2, \cdots, z_m)$ dans D, qui tend vers ∞ quand le point de D s'approche de la frontière de D. Soit B une variété admissible; considérons la fonction

$$G(z_1, z_2, P_3(z_1, z_2), \cdots, P_m(z_1, z_2))$$

qui est définie et plurisousharmonique dans $D(B)$. On voit qu'elle tend vers ∞ quand $(z_1, z_2) \in D(B)$ s'approche de la frontière de $D(B)$. Donc $D(B)$ est pseudoconvexe.

En employant les variables $z_1, z_2, \cdots, z_m$, on a enfin un corollaire qui concerne les rayons de Hartogs:

Corollaire 4. *Soient $R_k(z_1, z_2, \cdots, z_m)$, $k = 1, 2, \cdots, m$ les rayons de Hartogs d'une région D par rapport à $z_1, z_2, \cdots, z_m$, respectivement; posons*

$$G_k(z_1, z_2, \cdots, z_m) = -\log R_k(z_1, z_2, \cdots, z_m), \; k = 1, 2, \cdots, m.$$

Pour que D soit pseudoconvexe, il faut et il suffit que $m-1$ quelconques des fonctions G_k, $k = 1, 2, \cdots, m$ soient plurisousharmoniques dans D,

En particulier, considérons le cas $m = 2$. Alors on voit que, dans l'espace x, y, une région D est pseudoconvexe si et seulement si la fonction $-\log R_x(y)$

est plurisousharmonique dans D, où $R_x(y)$ désigne le rayon de Hartogs de D par rapport à x.

Preuve. D'après le Lemme 9, la condition est nécessaire. Prouvons donc la suffisance. En vertu du théorème, il suffit de montrer que, si G_k, $k=2, 3, \cdots, m$ sont plurisousharmoniques, D est pseudoconvexe par rapport à z_1. Considérons trois domaines

$$
\begin{aligned}
&C\ :\ |z_1-z_1^0|<\rho,\ |z_i-f_i(z_1)|<r_i\,, && i=2, 3, \cdots, m\,,\\
&C_1\!:\ \rho'<|z_1-z_1^0|<\rho,\ |z_i-f_i(z_1)|<r_i\,, && i=2, 3, \cdots, m\,,\\
&C_1\!:\ |z_1-z_1^0|<\rho,\ |z_i-f_i(z_1)|<r_i'(<r_i)\,, && i=2, 3, \cdots, m\,,
\end{aligned}
$$

satisfaisant à $C_1 \cup C_2 \subset D$, où les $f_i(z_1)$ sont des polynômes. Il suffit de montrer que $C \subset D$ pour tous tels domaines C, C_1, C_2.

Transformons l'espace par $Z_1=z_1-z_1^0$, $Z_i=z_i-f_i(z_1)$, $i=2, 3, \cdots, m$; alors les images de C, C_1, C_2 sont les domaines

$$
\begin{aligned}
&C'\ :|Z_1|<\rho,\ |Z_i|<r_i\,, && i=2, 3, \cdots, m\,,\\
&C_1'\!:\ \rho'<|Z_1|<\rho,\ |Z_i|<r_i\,, && i=2, 3, \cdots, m\,,\\
&C_2'\!:\ |Z_1|<\rho,\ |Z_i|<r_i'\,, && i=2, 3, \cdots, m\,.
\end{aligned}
$$

Désignons par D' l'image de D et par $R_k'(Z_1, Z_2, \cdots, Z_m)$, $k=1, 2, \cdots, m$, les rayons de Hartogs de D' par rapport à $Z_1, Z_2, \cdots, Z_m$, respectivement. Puisque la transformation n'est qu'une translation du plan z_k pour $k=2, 3, \cdots, m$ lorsque z_i $(i \neq k)$ sont fixes, on a $R_k'=R_k$, $k=2, 3, \cdots, m$. Par suite on voit que les fonctions

$$G_k'(Z_1, Z_2, \cdots, Z_m)=-\log R_k'(Z_1, Z_2, \cdots, Z_m),\ k=2, 3, \cdots, m$$

sont plurisousharmoniques dans D'.

Il ne reste qu'à montrer $C' \subset D'$; pour raisonner par l'absurde, supposons que $C' \not\subset D'$. Pour $l=1, 2, \cdots, m$, désignons par Σ_l l'ensemble

$$\{|Z_1|<\rho,\ |Z_i|<r_i,\ |Z_j|<r_j',\ 2 \leqq i \leqq l < j \leqq m\}\ ;$$

on a $\Sigma_m=C'$. Donc il existe un entier k $(2 \leqq k \leqq m)$ tel que $\Sigma_k \not\subset D'$ et $\Sigma_{k-1} \subset D'$. Soit $(a_1, a_2, \cdots, a_m)$ un point de $\Sigma_k - D'$: on a $|a_1| \leqq \rho'$, $|a_i|<r_i$, $r_k' \leqq |a_k|<r_k$, $|a_j|<r_j'$ $(2 \leqq i<k<j \leqq m)$. Posons

$$\mu=\inf\{|Z_k|\ |(Z_1, Z_2, \cdots, Z_m) \in \Sigma_k - D',\ Z_i=a_i,\ i \neq 1, k\}\ ;$$

alors il existe un point $(Z_1^0, Z_2^0, \cdots, Z_m^0) \in \Sigma_k - D'$ tel que $Z_i^0=a_i$ $(i \neq 1, k)$ et $\mu=|Z_k^0|$: on a en particulier $\mu>0$. Soit ε un nombre positif petit; posons $Z_k'=Z_k^0(1-\varepsilon)$ et

$$u(Z_1)=G_k'(Z_1, Z_2^0, \cdots, Z_{k-1}^0, Z_k', Z_{k+1}^0, \cdots, Z_m^0)\,.$$

Alors la fonction $u(Z_1)$ est sousharmonique dans $|Z_1|<\rho$; en outre on a

$$u(Z_1)>-\log \varepsilon\mu \quad \text{pour} \quad \rho'<|Z_1|<\rho$$

et $u(Z_1^0)=-\log \varepsilon\mu$. C'est absurde.

UNIVERSITÉ DE KÔBÉ

Bibliographie

[1] K. Oka: *Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables.* VI. *Domaines pseudoconvexes,* Tôhoku Math. J. **49** (1942), 15–52.

[2] ———: *Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables.* IX. *Domaines finis sans point critique intérieur,* Japan. J. Math. **27** (1953), 97–155.

[3] P. Lelong: *Fonctions plurisousharmoniques; mesures de Radon associées. Applications aux fonctions analytiques,* Colloque sur les fonctions de plusieurs variables, Burxelles, 1953, 21–40.

[4] H.J. Bremermann: *Complex Convexity,* Trans. Amer. Math. Soc. **82** (1956), 17–51.

[5] I. Kimura: *Sur le théorème de la continuité dans l'espace de deux variables complexes. I∼V,* Proc. Japan Acad. **41**(1965), 535–540; **41** (1965), 791–794; **42** (1966), 125–130; **42** (1966), 131–135; **42** (1966), 210–212.

[6] ———: *Sur la pseudoconvexité par rapport à une direction.* I, II, Proc. Japan Acad. **42** (1966), 560–565; **42** (1966), 566–570.