Osaka University Knowledge Archive

Title	Einstein metrics on Boggino-Damek-Ricci type solvable Lie groups
Author(s)	森, 邦彦
Citation	大阪大学, 2002, 博士論文
Version Type	
URL	https://hdl.handle.net/11094/44074
rights	
Note	著者からインターネット公開の許諾が得られていないため、論文の要旨のみを公開しています。全文のご利用をご希望の場合は、大阪大学の博士論文についてをご参照ください。

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

Osaka University

【2】

氏　　名	森（もり）　邦（くに）彦（ひこ）
博士の専攻分野の名称	博　士（理　学）
学　位　記　番　号	第　17237　号
学位授与年月日	平成14年6月28日
学位授与の要件	学位規則第4条第1項該当 理学研究科数学専攻
学　位　論　文　名	Einstein metrics on Boggino-Damek-Ricci type solvable Lie groups （ボギノ・デイメック・リッチ型可解リー群上のアインシュタイン計量）
論　文　審　査　委　員	（主査） 教　授　坂根　由昌 （副査） 教　授　小磯　憲史　　教　授　満渕　俊樹　　助教授　榎　　一郎

論　文　内　容　の　要　旨

非コンパクトな等質 Einstein 多様体のよく知られた例として、rank one の非コンパクト型対称空間がある。これらは可解 Lie 群が単純推移的に作用している空間である。Alekseevskii は次の予想を提出している。「$M=G/K$ が非コンパクト等質 Einstein 多様体ならば、K は G の極大コンパクト部分群である。」この予想が正しければ、非コンパクトな場合の等質 Einstein 多様体の分類問題は可解 Lie 群上の左不変な Einstein 計量の分類に帰着することになる。

1985 年に J. Boggino は、rank one の非コンパクト型対称空間をふくむ新しい Einstein 多様体のクラスを見出した。rank one の非コンパクト型対称空間は、その isometry 群の岩沢分解を経由して、左不変計量を持つ可解 Lie 群とみなすことができるが、このときその可解 Lie 群の Lie 環は、ある種の H-type Lie 環の 1-dimensional extension となっている。Boggino の見出した Einstein 多様体は、その巾零部分が一般の H-type Lie 環に対応する可解 Lie 群であり、現在 Damek-Ricci space と呼ばれている。Damek-Ricci Einstein space は、対称空間とは限らない非正の断面曲率を持つ Einstein 多様体の例を与えている。

本論文では、この Damek-Ricci space を拡張して、Boggino-Damek-Ricci type space を以下のように定義する。

$(\mathfrak{n}, \langle,\rangle_n)$ を正定値内積をもつ 2-step nilpotent Lie 環、a を 1 次元実ベクトル空間、A を a の零でないベクトルの一つとする。$\mathfrak{n}$ の中心を c、c の $\mathfrak{n}$ における $\langle,\rangle_n$-直交補空間を v とおき、a の $\mathfrak{n}$ 上の表現 f を

$$f(A)X=kX,\ f(A)Z=2kZ \quad \text{for} \quad X\in v,\ Z\in c$$

で定める。ここに k はある定数である。f により a は derivation として作用するので、可解 Lie 環 $\mathfrak{s}=\mathfrak{n}\times fa$（半直積）が定められる a 上の内積を $\langle A, A\rangle_a=1$ で定め、$\mathfrak{s}$ 上の内積 $\langle,\rangle$ を $\langle,\rangle_n$ と $\langle,\rangle_a$ の直和で定める。上の構成で得られる正定値内積をもつ可解 Lie 環 $\langle \mathfrak{s}, \langle,\rangle\ \rangle$ が定める単連結可解 Lie 群 S とその上の左不変計量 g の組 (S, g) を Boggino-Damek-Ricci type space ということにする。

本論文では、まず Boggino-Damek-Ricci type space でかつ Einstein space であるものを（可算個）構成する。それらの多く Damek-Ricci Einstein space と異なり、非正の断面曲率を持たない。ただし Damek-Ricci Einstein space において、これが負の断面曲率を持つならば、対称空間になることが知られているが、ここでは次の定理を示す。

定理　Boggino-Damek-Ricci type space で Einstein かつ nonsymmetric かつ負の断面曲率をもつものが存在する。

論文審査の結果の要旨

負の曲率をもつ非コンパクトな等質アインシュタイン多様体のよく知られた例としては、階数1の非コンパクト型の対称空間がある。これ以外に負の曲率をもつ非コンパクトな等質アインシュタイン多様体は存在するかという問題は永年の懸案であった。Boggio はこれらを含む非正断面曲率をもつ新しい等質アインシュタイン多様体のクラスを見つけた。この多様体は Damek-Ricci 空間と呼ばれている。しかし、これらの空間が、負の曲率をもつのは非コンパクト型の対称空間のときのみであった。本論文では、Boggino-Damek-Ricci 型の可解リー群と呼ぶ、Damek-Ricci 空間を含む非コンパクトな等質アインシュタイン多様体のクラスを導入した。これらの中に、対称空間とは異なる新しい負の曲率をもつ非コンパクトな等質アインシュタイン多様体が存在することを示した。以上により本論文は博士（理学）の学位論文として十分価値あるものと認める。