【11】

氏名	大久保(おおくぼ) 範(のり) 彦(ひこ)
博士の専攻分野の名称	博士（理学）
学位記番号	第 17499 号
学位授与年月日	平成15年3月25日
学位授与の要件	学位規則第4条第1項該当 理学研究科数学専攻
学位論文名	Differentiable family of contact structures on a non-compact (2n-1)-manifold （あるコンパクトでない（2n-1）次元多様体上の接触構造の1径数族について）
論文審査委員	（主査） 教授 坂根 由昌 （副査） 教授 大鹿 健一　助教授 作間 誠　助教授 大和 健二

論文内容の要旨

この論文の目的は接触微分同相でない開ソリッドトーラスの1径数族の存在性を示したEliashbergの結果を次元について一般化することである。

まず最初に接触構造の定義をする。U を $2n-1$ 次元の可微分多様体とする。U 上の接触構造 ξ とは完全積分不可能な余次元1の平面場のことである。すなわち少なくとも局所的に定義された $\lambda\wedge(d\lambda)^{n-1}\neq 0$ を満たす1次微分形式 λ によって $\xi=\ker\lambda:=\{v\in TU \mid \lambda(v)=0\}$ と表される平面場のことである。この λ を接触1-形式という。そして、U と ξ の組（U, ξ）のことを接触多様体という。

この論文では接触構造 ξ は常に大域的に定義された1次微分形式 λ によって $\xi=\ker\lambda$ となっているとする。

（U_i, ξ_i）、$\xi=\ker\lambda_i$ (i=1, 2) を2つの接触多様体とする。このとき、$\psi^*\lambda_2=f\lambda_1$ を満たす微分同相写像 ψ : $U_1\to U_2$ と決して零にならない U_1 上の可微分関数 f が存在するとき（U_1, ξ_1）と（U_2, ξ_2）は接触微分同相といい ϕ を接触微分同相写像という。

次の定理は良く知られている結果である。

定理（Gray, 1959）

M を $2n-1$ 次元の閉多様体とし、$\{\xi_t\}$ を M 上の接触1-形式の1径数族 $\{\lambda_t\}$ で定義される接触構造の1径数族とする。このとき、$\phi_t^*\lambda_t=f_t\lambda_0$ を満たす M 上のイソトピー $\{\phi_t\}$ と決して零にならない M 上の可微分関数の1径数族 $\{f_t\}$ が存在する。

特に、この定理から任意の t に対して（M, ξ_t）と（M, ξ_0）は接触微分同相であることが判る。

Eliashbergは1991年、コンパクトではなく、境界の付いていない可微分多様体でのGrayの定理の反例を与えた。それは次の様にする。

$S^3\subset \mathbf{C}^2$ を3次元単位球面とし、(z_1, z_2) を $\mathbf{C}^2$ の座標系とする。$z_j=\rho_j e^{i\psi_j}$ (j=1, 2) と極座標で表す。この

とき、$\xi_0=\ker\alpha_0$、$\alpha_0=\left(\sum_{i=1}^{2}\rho_i^2 d\varphi_i\right)$, $\left(\sum_{i=1}^{2}\rho_i^2=1\right)$は$S^3$上の接触構造となる。$0<\delta<1$なる実数$\delta$に対して、開ソリッドトーラス$U_\delta=\left\{(z_1,z_2)\in\mathbf{C}^2\,\middle|\,|z_1|<\delta\right\}\cap S^3$を定義し、接触多様体$\left(U_\delta,\xi_\delta\left(=\xi_0|_{U_\delta}\right)\right)$を考える。このとき、Eliashbergは次の定理を証明した。

定理 (Eliashberg, 1991)

$(U_\delta,\ \xi_\delta)$と$(U_{\delta'},\ \xi_{\delta'})$が接触微分同相であるための必要十分条件は$1/\delta^2-1/(\delta')^2$が整数になることである。

特に、この定理は開ソリッドトーラスでのGrayの定理の反例を与えている。

このEliashbergの定理を高次元に一般化することを考えた。それは次の様にする。

$S^{2n-1}\subset\mathbf{C}^n$を$2n-1$次元単位球面とし、$(z_1,\ \cdots,\ z_n)$を$\mathbf{C}^n$の座標系とする。$z_j=\rho_j e^{i\varphi_j}$ $(j=1,\ \cdots,\ n)$と極座標で表す。このとき、$\xi_0=\ker\alpha_0$、$\alpha_0=\left(\sum_{i=1}^{n}\rho_i^2 d\varphi_i\right)$, $\left(\sum_{i=1}^{n}\rho_i^2=1\right)$は$S^{2n-1}$上の接触構造となる。$0<\delta<1/\sqrt{n-1}$なる実数$\delta$に対して、$U_\delta=\left\{(z_1,\cdots,z_n)\in\mathbf{C}^n\,\middle|\,|z_i|\le\delta(i=1,\cdots,n-1)\right\}\cap S^{2n-1}-\left\{(z_1,\cdots,z_n)\in\mathbf{C}^n\,\middle|\,|z_i|=\delta(i=1,\cdots,n-1)\right\}\cap S^{2n-1}$と定義し、接触多様体$\left(U_\delta,\xi_\delta\left(=\xi_0|_{U_\delta}\right)\right)$を考える。このように$U_\delta$を定義すると$n=2$のとき先程定義した開ソリッドトーラス$U_\delta$と一致していることが判る。このとき、次の定理を証明した。

定理

$(U_\delta,\ \xi_\delta)$と$(U_{\delta'},\ \xi_{\delta'})$が接触微分同相ならば$1/\delta^2-1/(\delta')^2$が整数、または$1/\delta^2+1/(\delta')^2$が整数になる。

特に、この定理はコンパクトではない一般奇数次元多様体でのGrayの定理の反例を与えている。

論文審査の結果の要旨

多様体上に二つの接触構造が与えられた時、それらがいつ接触同型であるかを判定する事は接触多様体論の基本的な問題である。本論文では、特に接触構造の可微分族が与えられた時、それらは全て接触同型であるかという問題を取り扱っている。

この問題は、1959年にGrayにより、多様体がコンパクトで境界のない場合には肯定的あることが証明された。また、1991年にEliashbergは、非コンパクトで境界のない、ある3次元多様体上に、接触同型でないものを無限個含む接触構造の可微分族の例を構成し、Grayの結果が非コンパクト多様体上に一般化できない事を示した。

本論文では、Eliashbergの例が、$2n-1$次元のある非コンパクト多様体上での例として一般化出来ることを示している。

この様な例の存在は高次元では全く新しいものであり、特に高次元で接触同型でない接触構造の例を与えている点でも、価値ある結果である。

以上により、本論文は博士(理学)の学位論文として十分価値があるものと認める。