Title	Examples of compact Lefschetz solvmanifolds without the Hard Lefschtez property
Author(s)	山田, 拓身
Citation	大阪大学, 2003, 博士論文
Version Type	
URL	https://hdl.handle.net/11094/44084
rights	
Note	著者からインターネット公開の許諾が得られていないため、論文の要旨のみを公開しています。全文のご利用をご希望の場合は、大阪大学の博士論文についてをご参照ください。

氏名	山田拓身（やまだたくみ）
博士の専攻分野の名称	博士（理学）
学位記番号	第 17502 号
学位授与年月日	平成 15 年 3 月 25 日
学位授与の要件	学位規則第4条第1項該当 理学研究科数学専攻
学位論文名	Examples of compact Lefschetz solvmanifolds without the Hard Lefschtez property （強レフシェッツ性質をもたないコンパクトレフシェッツ可解多様体の例）
論文審査委員	（主査） 教授 坂根 由昌 （副査） 教授 小磯 憲史　教授 藤木 明　教授 満渕 俊樹

論文内容の要旨

$(M^{2m},\ \omega)$ をシンプレクティック多様体とする。写像 $L: \Omega^k(M) \to \Omega^{k+2}(M)$ を $L(\alpha)=\alpha\wedge\omega$ で定義する。ω は閉形式であるから、$Ld=dL$ が成り立つ。したがって、L はコホモロジー群の間の写像を誘導する。それを同じ記号 L であらわすことにする。コンパクトシンプレクティック多様体 $(M^{2m},\ \omega)$ はレフシェッツ写像 $L^{m-1}: H^1_{DR}(M) \to H^{2m-1}_{DR}(M)$ が同型である時、レフシェッツ多様体と呼ばれる。さらに、任意の k に対して、レフシェッツ写像 $L^k: H^{m-k}_{DR}(M) \to H^{m+k}_{DR}(M)$ が同型である時、強レフシェッツ性質をもつという。これは、ケーラー構造をもつための必要条件の1つである。Benson と Gordon はトーラス以外のコンパクト巾零多様体 M はレフシェッツ多様体でないことを示し、したがって、M はケーラー構造をもたないことを示した。さらに次の予想を提起した。

Benson-Gordon の予想. コンパクト可解多様体 G/Γ がケーラー構造をもつならば、G/Γ はトーラスと微分同相である。ただし、ここで G は単連結 *completely solvable* リー群、Γ は G の *lattice* とする。

Benson と Gordon はレフシェッツ写像を調べることにより、いくつかの必要条件を構成した。しかし、一方 Andrés、Fernández、León、Mencía は強レフシェッツ性質をもつ6次元コンパクトシンプレクティツク可解多様体を構成した。この可解多様体にケーラー構造がはいるかどうかはまだわかっていない。また、Fernández、León、Saralegui は強レフシェッツ性質をもたない6次元コンパクトシンプレクティツク可解多様体を構成した。

今回の博士論文では、Fernández らの例を拡張し、一般次元の 1attice をもつ completely solvable リー群を構成した。実際、A_i, B_j を次のような行列とする。

$$A_i=\sum_{k=1}^{m} a_i^k\left(E_{2k-1,2k-1}-E_{2k,2k}\right) \qquad i=1,\ldots,l,$$

$$B_j=\sum_{k<h} b_j^{kh}\left(E_{2k-1,2h-1}+E_{2k,2h}\right) \qquad j=1,\ldots,n$$

ただし、a_i^k, $b_j^{kh}\in\mathbf{Q}$ かつ $[A_i,\ B_j]=[B_i,\ B_j]=0$ をみたすと仮定する。線形写像 $\varphi_*:\ \mathbf{R}^{n+l}\to End(\mathbf{R}^{2m})$ を

$$\varphi_*(t_1,\ldots,t_1,x_1,\ldots,x_n)=\sum_{i=1}^{l} t_1 A_i+\sum_{i+1}^{n} x_i B_i$$

により定義し、$\mathbf{R}^{n+l}\times\mathbf{R}^{2m}$ に群構造を

$$(\mathbf{t}_1,\ \mathbf{x}_1,\ \mathbf{y}_1)*(\mathbf{t}_2,\ \mathbf{x}_2,\ \mathbf{y}_2)=(\mathbf{t}_1+\mathbf{t}_2,\ \mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2,\ \mathbf{y}_1+\varphi(\mathbf{t}_1,\ \mathbf{x}_1)\mathbf{y}_2).$$

ただし、$\mathbf{t}_1\in\mathbf{R}^l$，$\mathbf{x}_i\in\mathbf{R}^n$, $\mathbf{y}_i\in\mathbf{R}^{2m}$ とし、$\varphi(\mathbf{t},\mathbf{x})=\exp(\varphi_*(\mathbf{t},\mathbf{x}))$とする。このとき、$G=(\mathbf{R}^{n+l}\times\mathbf{R}^{2m}, *)$は lattice Γをもつ completely solvable リー群である。これらがシンプレクティック構造をもつときにレフシェッツ写像を調べ、強レフシェッツ性質をもつコンパクトレフシェッツ可解多様体と強レフシェッツ性質をもたないコンパクトレフシェッツ可解多様体をそれぞれ構成した。さらに、上記のコンパクト可解多様体 G/Γから複素構造をもつコンパクト可解多様体 $\tilde{G}/\tilde{\Gamma}$ を構成した。G/Γがシンプレクティック構造をもつならば、$\tilde{G}/\tilde{\Gamma}$ は擬ケーラー構造をもつ。また、$(G/\Gamma,\ \omega)$が強レフシェッツ性質をもたないならば、$\tilde{G}/\tilde{\Gamma}$ は強レフシェツツ性質をもたない。すなわち、強レフシェッツ性質をもたないコンパクト擬ケーラー可解多様体が構成できる。ケーラー構造をもたない擬ケーラー構造をもつ正則シンプレクティック可解多様体も構成できる。

論文審査の結果の要旨

$2m$次元のシンプレクティック多様体（M, ω）に対して、シンプレクティック構造ωとの外積をとることによって定まるド・ラムコホモロジー群の間の写像 $L_{[\omega]}$: $H^k_{DR}(M)\to H^{k+2}_{DR}(M)$はレフシェッツ写像とよばれる。コンパクトシンプレクティック多様体はレフシェツ写像 $L^{m-1}_{[\omega]}$: $H^1_{DR}(M)\to H^{2m-1}_{DR}(M)$が同型であるとき、レフシェッツ多様体と呼ばれる。また、すべての kに対して、$L^k_{[\omega]}$: $H^{m-k}_{DR}(M)\to H^{m+k}_{DR}(M)$が同型であるとき、強レフシェッツ性質をもつという。よく知られているようにコンパクトケーラー多様体は強レフシェッツ性質をもつ。一方、可解リー群 Gとその離散部分群Γで等質空間 G/Γがコンパクトである例は、あまり知られていなかった。本論文では、可解リー群 Gとその離散部分群Γで G/Γがコンパクトシンプレクティック多様体となる例の系列を構成し、これらはレフシェッツ多様体であることを示した。また、これらの中で強レフシェッツ性質をもつものを特徴づけた。さらに、これらから複素構造をもつコンパクトシンプレクティッタ多様体を構成し、これらには強レフシェッツ性質をもたないが、擬ケーラー構造が存在するものがあることを示した。また、ケーラー構造をもたないが擬ケーラー構造をもつ正則シンプレクティック可解多様体も構成した。

以上により、本論文は博士（理学）の学位論文として十分価値あるものと認める。