| | |
|---|---|
| 氏名 | 白井 慎一（しらい しんいち） |
| 博士の専攻分野の名称 | 博士（理学） |
| 学位記番号 | 第 17498 号 |
| 学位授与年月日 | 平成 15 年 3 月 25 日 |
| 学位授与の要件 | 学位規則第4条第1項該当<br>理学研究科数学専攻 |
| 学位論文名 | Eigenvalue asymptotics for the Shroedinger operator with steplike magnetic field and slowly decreasing electric potential<br>（階段状の磁場と緩減少電気ポテンシャルをもつシュレーデインガー作用素に対する固有値の漸近分布） |
| 論文審査委員 | （主査）<br>教授 長瀬 道弘<br>（副査）<br>教授 西谷 達雄　助教授 土居 伸一　教授 林 仲夫<br>教授 小谷 眞一 |

## 論文内容の要旨

本論文では以下に述べる形の二次元シュレーディンガー作用素の固有値の漸近分布を求めた。考察する作用素は $x=(x_1,x_2)$ は $\boldsymbol{R}^2$ の座標を表すとき、$H_V=-\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_2}-b(x_1)\right)^2+V(x_1,x_2)$ である。ここで $(0,b(x_1))$ は磁場のベクトルポテンシャル、$V$ は電気的ポテンシャルである。また、$b(x_1)=\int_0^{x_1}B(t)\,dt$ によって磁場（の強さ）を導入しておく。

以下まず $V$ と $B$ に対する条件を述べる。電気的ポテンシャル $V$ は $\boldsymbol{R}^2$ 上の実数値 $C^2$ 級の関数とし、$0<m<1$、$2m<m'$ を満たす正定数 $m$、$m'$ に対して遠方で $|V(x)|\le C\langle x\rangle^{-m}$、$|\nabla V(x)|\le C\langle x\rangle^{-m'}$ を満たすとする。ただし、

$\langle x\rangle=\left(1+|x|^2\right)^{1/2}$ である。

また、$a_0\in\boldsymbol{R}$ に対して体積関数 $v_\pm(\mu\,;\,a_0)$ を $v_\pm(\mu\,;\,a_0)=\frac{1}{2\pi}\mathrm{vol}\{x\,|\,\pm x_1>a_0,\pm V(x)>\mu\}$ によって導入し、加えて、

$\lim_{\delta\downarrow 0}\lim\ \sup_{\mu\downarrow 0}\mu^{2/m}(v_\pm((1-\delta)\mu\,;\,a_0))-v_\pm((1+\delta)\mu\,;\,a_0)=0$ かつ $\mu\downarrow 0$ のときある $C>0$ に対して $v_\pm(\mu\,;\,a_0)\ge C\mu^{-2/m}$ であると仮定する。

磁場 $B$ に対しては、$B$ は $\boldsymbol{R}$ 上の実数値 $C^2$ 級関数であり、さらに単調増加で、ある正定数 $B_\pm$ に対して $\lim_{t\to\pm\infty}B(t)=B_\pm$ とする。また、ある正定数 $M$、$M'$、$C$ が存在して、$t\to\pm\infty$ のとき、それぞれ、$|B(t)-B_\pm|\le c\langle t\rangle^{-M}$、

$|B'(t)|\le C\langle t\rangle^{-M'}$ であるとする。

$V=0$ のときの非摂動作用素 $H_0$ については岩塚明氏の結果によって $H_0$ のスペクトルは絶対連続であり、さらにバ

ンド構造を持つことが知られている。ここでバンド構造とは、$\sigma(H_0)=\bigcup_{n=1}^{\infty}[\Lambda_n^-, \Lambda_n^+]$ の意味である。ただし、$\sigma$ は作用素のスペクトル集合を表し、$\Lambda_n^{\pm}=(2n-1)B_{\pm}(n=1,2,\cdots)$ である。また、$M_n=(\Lambda_n^+ + \Lambda_{n+1}^-)/2$ とおく。

本論文の主結果を述べる。以上の仮定の下、さらに、ある $n$ が存在して $\Lambda_n^+ < \Lambda_{n+1}^-$ であるとし、また、上記定数の間に $M>m$ 、$M'>3m$ を仮定する。すると、$\mu\downarrow 0$ のとき、$N\left((\Lambda_n^+ + \mu, M_n)\middle| H_V\right)=B_+\nu_+(\mu\,;\,a_0)(1+o(1))$ が成立する。ただし、$N(I|H_V)$ は区間 $I$ の中に存在する $H_V$ の固有値の(重複も込めた)個数とする。また、$N\left((M_n, \Lambda_{n+1}^-)\middle| H_V\right)$ についても $\nu_+$、$B_+$ を $\nu_-$、$B_-$ にそれぞれ置き換えて対応する結果が成立する。

この結果は非摂動作用素の本質的スペクトルの端におけるギャップ内に発生する $H_V$ の固有値の漸近分布が半古典的な意味で相空間内の体積関数で表されることを示している。なお、磁場の強さ $B$ が定数の場合の対応する結果は既に G.D. Raikov 氏によって得られているが、本論文の結果は（上記の $V$ の仮定の下で）磁場のクラスを拡張したものとも見做せる。

## 論文審査の結果の要旨

非定数磁場をもつシュレディンガー作用素のスペクトルはバンド構造をもつが、当論文ではそれに穏やかな電場の摂動を加えると、スペクトルのバンドとバンドの間に無限個の固有値があらわれること、およびこれらの固有値はバンドの端点に集積することを示した。さらにバンドの端点から一定の距離内に存在する固有値の個数の距離に関する漸近挙動を求めたものである。精密なミニマックスの手法を用い、全空間の固有値問題を電場のレベル集合に応じていくつかの領域の固有値問題に帰着させ、各領域では精密なエネルギー評価を用いて固有値の個数を評価し、これらの評価をよせあつめて漸近挙動を求めている。固有値の漸近挙動の主要項が電場ポテンシャルのレベル集合の一方方向の体積で表現される、という新しいタイプの結果である。以上のことから、本論文は博士（理学）の学位論文として十分価値があるものと認める。