【29】

氏　　　　　名	丸（まる） 井（い） 洋（よう） 子（こ）
博士の専攻分野の名称	博　士（理　学）
学　位　記　番　号	第　18368　号
学位授与年月日	平成16年3月25日
学位授与の要件	学位規則第4条第1項該当 理学研究科数学専攻
学　位　論　文　名	THE YAMADA POLYNOMIAL OF SPATIAL GRAPHS WITH Zn-SYMMETRY （回転対称性を持つ空間グラフの山田多項式）
論　文　審　査　委　員	（主査） 教　授　川中　宣明 （副査） 教　授　大鹿　健一　　教　授　梅原　雅顕　　助教授　作間　　誠

論　文　内　容　の　要　旨

空間グラフ、すなわち3次元空間内に埋め込まれた1次元単体的複体の位相的不変量として、山田修司氏によって発見された山田多項式と呼ばれる A を不定元とする整係数ローラン多項式がある。これは3-正則の空間グラフの正則図（空間グラフのある良い条件の下での射影図に、交叉の上下の情報を付加したもの）に対して定義される量で、いくつかのreduction formulaを持ち、かつ$(-A)^n$ を除いて、拡張されたライデマイスター変形の下での不変量である。

この論文では Z_n-回転対称性、即ちある回転軸の周りの $2\pi/n$ 回転による対称性を持つ空間グラフが、どのような山田多項式の値を取りうるかを考察している。

回転対称性を持つ空間グラフとその回転軸を境界とする位相的半平面との交点の最小数 w を、空間グラフとその回転対称性に対するラッピング数と定義し $w=1$ 及び $w=2$ の場合について、そのような対称性を持つ空間グラフの山田多項式の構造を解明した。

そのために回転対称性による基本領域を考え、その中にある正則図を、山田多項式が持つreduction formulaを用いて、既約正則図と呼ばれるものの線形結合で表し、更に2つの正則図に積の演算を定義した。Z_n-回転対称性を持つ空間グラフは、n 個の正則図の積をとり、その正則図の両端をつないで得られる。以上の方法により、Z_n-回転対称性を持つ空間グラフの山田多項式は、次の形をしていることが分かった。

$$(a+(b-c)\sigma)^n+\sigma(a+c-c\sigma)^n+a^n(1-\sigma-\sigma^2),\qquad a,\ b,\ c,\ \sigma\in Z[A,\ A^{-1}]$$

また、この結果を用いて、特に p が奇素数の場合に、空間グラフがラッピング数2の Z_p-回転対称性を持つためのひとつの必要条件として、その山田多項式が適当な自然数 k に対し、$(-A)^k$ 倍することにより、イデアル<p, A^p-1>を法として、

$$a_2A^2+a_1A+a_0+a_1A^{-1}+a_2A^{-2}$$

の形をしていることが分った。

また、上の結果を得る際に必要となる既約正則図の個数に関しては、ラッピング数が1のときはその個数は1個、ラッピング数が2のときにはその個数は3個、ラッピング数が3のときはその個数は15個である。一般のラッピング数 w に対しても既約正則図の個数を求める公式を得た。それは次の母関数より得られる。

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{\sqrt{1-3x}}{x\sqrt{1+x}}\right)$$

上の式を Talor 展開することによりその第 n 項の係数が既約正則図の個数を与える。即ち、i、j を非負の整数とするとき、一般のラッピング数 w に対する既約正則図の個数は

$$-\frac{1}{2}\sum_{i+j-1=2w}\binom{\frac{1}{2}}{i}(-3)^i\binom{-\frac{1}{2}}{j}$$

で与えられる。

論文審査の結果の要旨

丸井洋子君は与えられたグラフ（１次元単体的複体）が、３次元空間内に回転対称性を持つように埋め込まれるか否かを判定するひとつの方法を与えた。丸井君は、この目的のために、グラフの位相不変量である山田多項式の代数構造を研究し、与えられたグラフがラッピング数が２であるような空間対称性を持つ埋め込みを有するためには、その山田多項式がある対称性を持たねばならないことを証明した。この結果により、ある種のグラフについては、ラッピング数２の空間対称性を持つ埋め込みが存在し得ないことが明確に結論される。この結果は、空間対称性という幾何学的性質の有無を代数的に判定する新たな路を開いたもので、博士（理学）の学位に十分値すると認める。