The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	Proof of R. Salvati Manni and J. Top's conjecture on Siegel modular forms and Abelian surfaces
Author(s)	岡崎, 武生
Citation	大阪大学, 2004, 博士論文
Version Type	
URL	https://hdl.handle.net/11094/45106
rights	
Note	著者からインターネット公開の許諾が得られていないため、論文の要旨のみを公開しています。全文のご利用をご希望の場合は、大阪大学の博士論文についてをご参照ください。

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

【24】

氏　　名	岡　崎　武　生（おかざき たけお）
博士の専攻分野の名称	博　士（理　学）
学　位　記　番　号	第　１８３６３　号
学位授与年月日	平成 16 年３月 25 日
学位授与の要件	学位規則第４条第１項該当 理学研究科数学専攻
学　位　論　文　名	Proof of R. Salvati Manni and J. Top's conjectures on Siegel modular forms and Abelian surfaces （Siegel 保型形式と Abel 曲面に関する R. Salvati Manni と J. Top の予想の証明）
論　文　審　査　委　員	（主査） 教　授　伊吹山知義 （副査） 教　授　今野　一宏　　教　授　難波　　誠　　助教授　渡部　隆夫 講　師　落合　　理

論　文　内　容　の　要　旨

Abel 曲面の Hasse-Weil ゼータ関数は、次数と重さが２の或る Siegel 保型形式のスピノルゼータ関数と一致する事が、信じられている。R. Salvati Manni と J. Top の予想とは、この関係が成立していそうな Abel 曲面と Siegel 保型形式の候補を与えるものであった。Abel 曲面は、有理数体上定義された超楕円曲線 C : y ^ =x ^ 5−x のヤコビアン J（C）をとる。そして、Siegel 保型形式は、特定の charcteristic の井草テータ constants の４積を８通り取ることで、定義されるものである。このとき R. Salvati Manni と J. Top はこの関数がレベル４の主合同部分群上の或る指標を持った Siegel カスプ形式であることを示し、Fourier 係数を計算機で沢山計算し、次の予想をたてた。（cf. R. Salvati Manni and J. Top in Amer. J. Math 115, (1993)）

［予想１］

上の８つのテータ関数は全て、Hecke 同時固有形式で、それらのスピノルゼータ関数は全て J（C）の Hasse-Weil ゼータ関数と Euler 2-factor を除いて一致する。

他にも同様の方法でカスプ形式 F_1 と F_2 を構成して以下の予想２、３をたてた。

［予想２］

F_1 は Hecke 同時固有形式でそのスピノルゼータ関数は楕円曲線 E_1、E_2、（E_1 : y ^ 2=x ^ 3−x、E_2 : y ^ 2=x ^ 3+x）の Hasse-Weil ゼータ関数の積に、Euler 2-factor を除いて等しい。

［予想３］

F_2 は Hecke 同時固有形式で、スピノルゼータ関数は、Euler 2-factor を除いて、２に関する二次拡大体上の或る Hecke 指標のゼータ関数の積に一致する。（但し、我々はスピノルゼータ関数に修正を加えている）

今回これらの予想に対して、

［主結果］

これらの予想は全て正しい。

という事を証明した。更に、次の結果を得た。

［定理］

重さ２でレベル８の Siegel 非カスプ形式で、予想１の８つのテータ関数達と同じスピノルゼータ関数を持つものが存在する。つまり、カスプ形式と非カスプ形式が同じスピノルゼータ関数を持っているのである。但し、両者の Standard ゼータ関数は異なる。

これらの結果を得る為に、吉田リフトと呼ばれる Siegel-Hecke 固有形式をテータ関数で構成する方法を拡張した。この吉田リフトは、楕円 Hecke 固有形式のペアから Siegel-Hecke 固有形式を構成する方法（実際には、Jacquet-Langlands 理論を介する）なのだが、これを楕円保型形式が Dirichlet 指標を持つ場合に拡張したのである。

ところで、楕円保型形式から２次体の Hilbert 保型形式を構成する方法として土井-長沼リフトと呼ばれるものがあるのだが、そのリフトは２タイプある。元の楕円保型形式が Dirichlet 指標を持たない場合（Haupttypus）と、２次体の Dirichlet 指標を持つ場合 Nebentypus）である。予想１においては、この Nebentypus の場合の楕円保型形式のペアから今回拡張した吉田リフトで８つのカスプ形式が得られ、一方、一旦、土井－長沼リフトで Hilbert 保型形式にリフトしたものから吉田リフトで Siegel 非カスプ形式を定理１において得たのである。（吉田リフトには二次体上の Hilbert 保型形式からリフトする version もある。）

予想２においては、E_1、E_2 に対応する楕円保型形式は Haupttypus の土井－長沼リフトの関係になっており、これらから Hilbert 保型形式にリフトしたものから吉田リフトで予想２のカスプ形式 F_1 を得ている。

論文審査の結果の要旨

有理数体上の楕円曲線は、楕円モジュラー曲線のヤコービ多様体から得られると言う志村・谷山予想は、A. Wiles により証明され、フェルマの大定理の証明に本質的に応用されるなど、極めて重要であった。類似の考えで、有理数体上のアーベル曲面のハツセ・ヴェイユゼータ関数が２次の重さ２のジーゲル保型形式から得られるということが多くの研究者により漠然と信じられている。しかし離散群のレベルと曲面の不変量の関係などを込めた非常に精密な予想が存在しているわけではなく、現状はまだ実例調査の段階と言える。1993 年に発表された Salvati Manni と Top の予想は、具体的に式の与えられた虚数乗法を持つアーベル曲面とテータ関数で与えられるジーゲル保型形式の上述のような対応を数値実験などを根拠に予想したものである。彼らの予想は３種類あった。

本論文では、これらの予想をすべて完全に証明している。実際にはそのうちのひとつは元の予想が少し間違っており、これを訂正した上で証明したものである。

証明の手法としては、虚数乗法をもつアーベル多様体と量指標の関係や１変数保型形式からジーゲル保型形式の持ち上げである Yoshida lifting などを一般化しながら利用している。また、副産物として、カスプ形式と非カスプ形式で、スピノール L 関数が一致するという意外な例を与えている。このように主定理のみならず、そこに至る過程も大変興味深い点が多い。

よって、本論文は博士（理学）の学位論文として十分価値あるものと認める。