

Title	ウィトゲンシュタインのゲーデル理解について
Author(s)	奥, 雅博
Citation	大阪大学人間科学部紀要. 1991, 17, p. 167-183
Version Type	VoR
URL	<a href="https://doi.org/10.18910/4517">https://doi.org/10.18910/4517</a>
rights	
Note	

*Osaka University Knowledge Archive : OUKA*

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

# ウィトゲンシュタインのゲーデル理解について

奥 雅 博

- 1 はじめに
- 2 ウィトゲンシュタインはゲーデルを軽視していなかった。
- 3 ウィトゲンシュタインは数学者ゲーデルよりも哲学者ゲーデルを批判した。
- 4 ゲーデルの不完全性定理はウィトゲンシュタインにとって衝撃ではなかった。
- 5 「数学の基礎づけ」一般がウィトゲンシュタインにとって問題的であった。
- 6 ゲーデルの不完全性定理の功罪はカントールの対角線論法の功罪と類比的である。
- 7 何故ウィトゲンシュタインはゲーデルに対して批判的態度をとったのか。

## ウィトゲンシュタインのゲーデル理解について

### 1 はじめに

後期ウィトゲンシュタインの数学論が多くの数学者や哲学者から否定的な評価をうけたことはよく知られている。『数学の基礎』（初版 1956 年）に対するクライゼルとダメットの書評はその代表的なものである。即ち、クライゼルはウィトゲンシュタインとの親交に触れた後で書評の末尾を「私はこの本を読んで楽しくなかった。15年前の私ならどう考えたか、勿論自分にはわからない。しかし今の私には、この本は才気ある精神による驚くほど無意味な産物である、と思われる」と結んでいる。<sup>1)</sup>他方ダメット<sup>2)</sup>によれば「とりわけ無矛盾性とゲーデルの定理に関する箇所は劣悪で、明白な誤りを含んでいる。」また、「例が乏しすぎるものが難点である。」「ウィトゲンシュタインの本で与えられている諸例は——かれにしては驚くべきことだが——貧弱で説得力に欠ける。これは、私の考えでは、ウィトゲンシュタインの説明に何か不都合なところがある、ということのかなり確かなしるしである。」と述べられている。

この種の批判に対してウィトゲンシュタインを擁護する側からの反論がなかった訳ではない。ウィトゲンシュタインの論点を批判者の多くが看過・誤解していることを指摘する論文が数多く書かれている。本論文が主題とする「ウィトゲンシュタインのゲーデル理解」もその例外ではない。それらの論文のうち、シャンカーが彼自身が編集したゲーデル論に収録した「ゲーデルの定理の意義に関するウィトゲンシュタインの考察<sup>3)</sup>」は出色と言えるであろう。私自身教えられるところが多く、とりわけどのような方向に素材を求めるべきかについて貴重な示唆を得たと考える。

いずれにせよ、この論文では私なりの仕方でもウィトゲンシュタインのゲーデル理解について吟味を施したい。論点を明確にするために、粗野な形で箇条書きに以下の各節の主張を予め示しておくことにする。即ち

- 2 ウィトゲンシュタインはゲーデルを軽視していなかった。
- 3 ウィトゲンシュタインは数学者ゲーデルよりも哲学者ゲーデルを批判した。
- 4 ゲーデルの不完全性定理はウィトゲンシュタインにとって衝撃ではなかった。
- 5 「数学の基礎づけ」一般がウィトゲンシュタインにとって問題であった。
- 6 ゲーデルの不完全性定理の功罪はカントールの対角線論法の功罪と類比的である。

そして最後の節で暫定的な結びとする。

## 2 ウィトゲンシュタインはゲーデルを軽視していなかった。

ウィトゲンシュタインのゲーデル理解を検討するにあたって、我々が初めに覚える当惑は、彼がゲーデルについてごくわずかしき言及していないという印象をうけることにある。

いわゆる中期に属する遺稿や対話の記録、即ち『哲学的考察』『哲学的文法』『ウィトゲンシュタインとウィーン学団』にはゲーデルの名が全く登場しない。『数学の基礎に関する講義、1939年、ケンブリッジ』にもゲーデルの名は見出せない。

確かに後期の遺稿『数学の基礎』ではゲーデルについて言及されているが、分量としてはごくわずかである。新版（第3版）の索引の項目（ゲーデル、ゲーデルの問題、ゲーデルの命題）に従うならば、第I部付録Ⅲの7～19節<sup>9</sup>、第VII部19節、21～23節がこれに該当するが、量的には刊行されたテキストの約3%にすぎない。また、マイクロフィルムから確認できることであるが、これらのテキストが大版ノート（MS118、MS124）に手書きされたのは前者が1937年9月22日～24日、後者が1941年7月2日～4日である。

これらの事情から、ゲーデルに対するウィトゲンシュタインの関心はわずかなものにすぎず、ごく稀にメモを書き記したにすぎない、と推測されるかもしれないのである。

この推測は誤りである。ウィトゲンシュタインの遺稿のごく一部が現在刊行されているにすぎないことを我々は忘れてはならない。ウィトゲンシュタインの作業が、小型ノートへのメモ→大版ノートでの手書き原稿の作成→タイプ原稿の作成→タイプ原稿の推敲・配列替え、といったプロセスを通常辿るものであったことは周知である。このプロセスと比較して述べるならば、『数学の基礎』として今日公刊されているテキストのうち、タイプ原稿によるものは第I部のみであり、それ以外は大版ノート（第VI部については小型ノート）の手書き原稿から編者が選択したものからなっている。いいかえれば、現在著作集として刊行されているテキストと（未）完成度においては同等な覚え書きがなお遺稿の中に存在しうるのである。

そして実際に存在する。この確認のためにはマイクロフィルムを限なく読むまでもない。ネドとランチェッティ編『写真とテキストによるウィトゲンシュタインの生涯』を参照すれば十分である。<sup>9</sup>

この写真集の「369ゲーデル」の項目には7つのテキストが挙げられている。即ち、1935年7月31日付のシュリック宛書簡、小型ノートMS163（1938年、1941年）より4ヶ所、大版ノートMS124（1944年）より1ヶ所、小型ノートMS154（1931年）より1ヶ所である。<sup>9</sup>最後の項目は実は『哲学的文法』第II部25節の末尾より二つ目の段落（地下室のジャガイモの

芽の比喩)に当たるものであるが、ネド達がこれをゲーデルに関する項目とみなした理由は私には不明である。この項目を除外した上でいえることは、ウィトゲンシュタインはゲーデルについて1935年から1944年にわたって書き続けていることである。それ故、彼のゲーデルへの関心は間欠的ではなく、むしろゲーデルは彼にとって常に気になる存在であった、と述べてさしつかえないと思われる。

以下の論議の手がかりともするため、シュリック宛書簡と二つの節を訳出してみる。

1935年7月31日付シュリック宛書簡から。

数学の中に証明不可能な命題が存在するに相違ない、と誰かが証明した、とあなたがお聞きになったとして、このことではさしあたり全く何一つ驚くことはありません。何故なら見かけでは明晰そうなこの散文の命題が何を述べているのか、これだけではあなたには皆目わからないからです。それ故、その命題が何を証明しているのかを見てとるためには、あなたは証明を初めから終わりまで辿らなければなりません。この特定の証明をその詳細の細部に至るまで辿ってしまう以前には、あなたは未だ何一つわからないのです。例えば、この証明の考え方で何が「数学的命題」と考えられているか、あなたにはわかりません。というのも、初等算術がその例になりますが、別な観点からすれば、証明されない命題はそこには存在しない、という具合に、数学が限界づけられたりするからです。証明の結果とみなされている散文の命題が驚くべき響きを持っているにしても、これには何の意味もありません。これと対立する散文の命題もまた証明可能なこと、対立する命題の方を証明の結果として我々が承認する気持ちになることがありうることは明らかです。丁度、全ての直線が一つの円と交わること<sup>7)</sup>が証明でき、また、全ての直線が一つの円と交わる訳ではないことも証明できるように。二つの対立する命題がここで証明可能なことに驚く人があれば、私は彼に次のように語りかけるでしょう。証明をよく見たまえ、そうすると君は「どの意味で」一方が証明され、「どの意味で」他方が証明されるのかがわかるだろう、そして、君が証明を綿密に研究し尽すまでは、驚く理由は何一つないのだ、と。「私の指示」からあなたが学べることは、この特定の証明を検討してしまうまでは、その種の証明や証明の結果について何一つ語りえない、ということに尽きます。即ち、哲学者が数学であたかも何かを予言したくなり、「これこれは不可能である」「これは決して証明できない」と語る時、彼は常に誤っています。……哲学は証明について何一つあなたに語る事ができません。哲学がそれを試みる場合、間違った予言者が嘘言の故に罰せられるように、哲学が現実によって嘘言の故に罰せられることがないかどうか、あなたはいつもおののいていなければならないことでしょう。

MS121 104 頁 (1938 年 12 月 28 日)

ゲーデルが我々に示したのは、人が数学を一つの体系とみなしてきたことに表現されている「数学」という概念の不明瞭さである。

MS124 115 頁 (1944 年 3 月 10 日)

ゲーデルの論文が哲学的に駄目なのは次の点にある。彼は数学とその応用との関係を理解していない。この点で彼は多くの数学者と同じ粘液質の概念の持ち主なのだ。

証明のみが数学的命題が何であるかを語るものであり、それ以外は散文である、というウィトゲンシュタインの指摘は正に至当なものである。我々が一方では「ゲーデルの不完全性定理は、自然数論の無矛盾性の証明が原理的に不可能なことを明らかにした」と聞かされ、他方では「ゲンツェンが自然数論の無矛盾性を証明した」と聞かされる限り、我々は未だ何一つ聞いていないのである。

### 3 ウィトゲンシュタインは数学者ゲーデルよりも哲学者ゲーデルを批判した。

上述の見解に対しては、批判が次のような形で提起されるであろう。

ゲーデルについて語るからにはウィトゲンシュタインは不完全性定理の証明を「綿密に研究し尽くしている」はずである。ところで、彼の理解の程度を示す資料は存在するのか。一般に、彼は数学をどの程度理解できたのか。彼にとってゲーデルが気になる存在であり、しかも彼がゲーデルを十分に理解しているのであれば、何故彼は 1939 年の講義でゲーデルに触れなかったのか。

『数学の基礎』第 I 部付録Ⅲのゲーデル批判の大半は「真であるが証明不可能」という表現に関わるものである。これだけの批判なら、ゲーデルの論文の初めの部分を読めば十分であり、recursive function を使用した長い論文はカットして差支えない。果してウィトゲンシュタインは論文をきちんと検討したのだろうか。多くの哲学者や教養人は証明を読まずに数学者の「散文」をうのみにし、この散文からありとあらゆる帰結を導き出す、ということではウィトゲンシュタインの指摘の通りだが、実はウィトゲンシュタインも証明を読まずに散文による解説を批判したにすぎないのではないか。

この反論は鋭い指摘を含んでいる、と私は考える。ウィトゲンシュタインの数学の素養については直接間接の証拠から推定する他はなく、推定が不徹底にとどまることも十分予想できる。確かなことは、彼が 1920 年代の後半から 30 年代の初めにかけて、ヒルベルト、スコーレム、ラムゼイ、ワイル、ブラウアーといった数学者のメタ数学ないし数学基礎論に関する

かなりの論文を読みこなしており、このことが彼の中期の数学論に厚味を与えていることである。

この厚味と比較すれば、後期のウィトゲンシュタインのゲーデル理解がやや迫力に欠ける印象を与えるものであることは否めない。数学の哲学は依然として主要問題の一つではあっても、もはや第一の中心問題ではない。ゲーデルの定理を巡る数学者の関心をウィトゲンシュタインは共有しない。例えば、ロッサーの定理が発表された *Journal of Symbolic Logic* を読みふける彼の姿などは極めて想像困難である。

この時期の彼の準備の程度をもってしては、1939年の講義でゲーデルを正面からとりあげることが不可能だった、と思われる。そこにはチューリングが出席しており、チューリングの批判に対してウィトゲンシュタインは悪戦苦闘を強いられていたからである。

しかしながら、別の観点から、ウィトゲンシュタインに好意的な推測もまた可能である。即ち、ゲーデルの証明の純数学的な部分に間違いはなく（間違いがある場合にそれを訂正するのは数学者の職務である）、哲学的散文に問題がある、しかもゲーデルの哲学的散文を批判する道具立ては、既にウィトゲンシュタインの中に蓄積されていた、とする推測である。

この解釈は数学者の仕事を数学的要素と「散文的」要素とに区別する、という発想に基いている。これに関連した微妙な問題はウィトゲンシュタイン自身に明瞭に自覚されていた。それ故彼は次のように記したのである。

私の課題はラッセルの論理学を内部から攻撃することではなく、外部から攻撃することである。

即ち、ラッセルの論理学を数学的に攻撃するのではなく、——もし数学的にであれば私は数学を営むことになる——ラッセル論理学の位置、職務を攻撃することである。

私の課題は、例えばゲーデルの証明について論じるのではなく、その証明の傍を通りすぎりに論じることである。

（『数学の基礎』第VII部 19節）

一言でいえば、数学者ゲーデルよりも哲学者ゲーデルをウィトゲンシュタインは批判したのである。

ゲーデルの不完全性定理の証明は様々な仕方で数学的に吟味できる。ゲーデル自身が証明に用いた条件とは異なった（より強い、より弱い）条件の下でも同じ帰結がもたらされるか否か、表現可能性の定式化の相違に応じてどのような異なった結果が生じるか、第一不完全性定理と第二不完全性定理の関係はどのような定式化が可能であり適切であるか、といった類の問題がそれである。これはゲーデルの証明「について論じる」ことであり、数学者の職

務である。

この限り、不完全性定理は数学の数多くの定理の中の一つである。確かに、この定理は偉大であろう。数学の定理の偉大さを判定する基準としては、数学者仲間の関心をひきつける度合い、定理が証明された後に数学という営みがこうむった変化、定理と数学外での応用の関係、等々いくつか数えあげることが可能であろう。しかしいずれにせよ、定理の「哲学的意義」にその偉大さが示されるのでは全くない。例えば「真の命題のことがごとくが証明可能ではないことをゲーデルが示した。これは形式主義と有限の立場に対するプラトニズムの偉大な勝利である」という主張は哲学的散文の見本例である。

不完全性定理は種々の哲学的混乱を招きかねない点で注意すべき定理である、しかるにゲーデルは彼自身が「哲学的」であった度合いに応じて混乱を助長する点でミスリーディングだった、というのがウィトゲンシュタインの批判の論点である、と言ってよい。それ故「『プリンキピア』の体系の中で真であるが証明不可能な命題」という発想が批判の俎上にのせられるのである。<sup>9)</sup>

ウィトゲンシュタインの批判（『数学の基礎』第I部付録Ⅲ5-9節）は次のように簡潔に要約可能である。① ラッセルの体系で真な命題とは証明された定理のことである。② ラッセルの体系で真であるが証明不可能な命題は公理である。③ ①と②以外にラッセルの体系で真な命題は存在しない。尤も、他の体系とラッセルの体系とが表記法を偶然に共有することはありうる。④ それ故、「ラッセルの体系の公理でも定理でもないにも拘らずラッセルの体系で真な命題」という問題は、多義性から生じる誤謬である、と。

この批判に対しては、ゲーデルの側から激しい反論がよせられるであろう。即ち、ゲーデルの哲学的解説への批判は一理あるにせよ、上述の要約はウィトゲンシュタインの無理解を露呈したものである、ゲーデルの功績は「表現定理」にある、ゲーデルは形式的体系についての超数学的概念の或るものが再び形式的体系の中で数値別に表現可能なことを示したのだ、と。

この反論を吟味するには、ウィトゲンシュタインが「超数学」についてどう考えたかを論じる必要がある。問題を、形式的体系に対するウィトゲンシュタインの態度と、数学の基礎づけという考えに対する彼の態度とに分けて論じることにする。

#### 4 ヴェーデルの不完全性定理はウィトゲンシュタインにとって衝撃ではなかった。

形式的体系に対する公理的考察方法が、その骨格を顕わにするのは1920年代であるが、通常の考察方法と比較してみるとウィトゲンシュタインの立場は極めて特異である。体系的考察に対する感受性・問題意識を欠いている点で彼は「旧世代」に属するように見える



一方、「意味論的視点」を徹底的に排除した特異な体系観を抱いてもいたからである。この点を明らかにするために、ありふれた形で形式的体系の与え方をまず例示してみる。

初めに、当の公理系に登場可能な記号が指定される。次に、これらの記号から論理式を形成する規則が与えられる。いくつかの論理式が公理として選び出され、公理から証明を通して定理を得るための規則が枚挙される。その上で、論理式の全てが定理となる訳ではないことに注意が払われ、これに基づいて無矛盾性の原則が種々の形で定式化される。定理となる論理式が備えているべき性質との関係で、種々の形で完全性が定式化される。最後に公理間の相互関係、個々の公理の要不要が独立性の問題として吟味される。

これに対して中期のウィトゲンシュタインが堅持した立場は「公理系という世界では証明された定理のみがその世界の住民である<sup>9)</sup>」というものであり、いいかえれば意味論的視点の排除であった。この点に関しては中期の立場は後期に至るまで基本的に維持されたとは私考える。<sup>10)</sup>

この立場からの帰結の一例が「ラッセルの第5公理が独立でないことの証明は不可能」という主張である。

ラッセルの第5公理については普通次のように言われる。ラッセルの第5公理が独立でないことをベルナイスが証明した、彼は5つの公理の代りに4つの公理から出発し、第5公理が4つの公理からの定理に他ならないことを証明した、と。

これに対するウィトゲンシュタインの批判は次のようになる。公理と規則が体系を指定するのだから、5つの公理と所与の規則からなるラッセルの公理系と、4つの公理と所与の規則からなるベルナイスの公理系は、二つの全く別な世界である。それ故一方が他方を含んだり、一方の公理の一部が不要であることを証明したりすることは不可能である。(もしこれが「証明」なら、証明はどのような体系において行われるのか。)我々ができるのは二つの体系の類似と相違を「見てとる」ことだけである。何かが見てとられたら、人は以後ベルナイスの公理系を使用することがありうるのである。<sup>11)</sup>

ところで、ベルナイスの公理系が多用されるようになるとしても、このことは二つの公理系にとっては外的である。また、ベルナイスの公理系が十分であることが「証明」されないように、ラッセルの初めの三つの公理では不十分なことも「証明」されないのである。

このような立場は全ての意味論的考察を排除するに留まらない。通常は構文論的概念と目される「定理ではない論理式」という概念をも無意義なものとするのである。このことを先に示した通常の形式的体系の与え方との対比で明らかにしたい。

証明可能な定理のみが当該の公理系の登場人物である、とする立場からみれば、論理式の形成規則は不要である。これに代えて、定理から不適切な式が導出されないように、代入規則を入念に述べるだけで十分である。公理系に登場する字母の指定は印刷業者に対する指定

に他ならず、不要である。どのような字母が登場可能かは、公理と推論規則によって内的に示されるのである。

おそらく「定理ではない論理式」という概念は「ある公理系が無矛盾ならば、その公理系における論理式で、しかもその公理系からは証明できない式が、その公理系（の内部？ もしくは外部？）に少なくとも一つ存在する」という要請（即ち、無矛盾性の一つの定式化である）のために必要である、と主張されるかもしれないが、要請を上のように述べてみれば、既にそれ自身にパラドクシカルな響きがあるのである。

完全性概念も問題にならない。それぞれの体系において完全性概念もいくつかの仕方で規定されるが、それらのほとんどが意味論的であるか、矛盾概念に帰着する「強い意味」の完全性であるかのいずれかだからである。

それでは無矛盾性の原則までも不要となるのか。通常の考えによれば、一度矛盾が現れるとそれ以後任意の命題が証明される、従って形式的体系を構成する意味がなくなってしまう、それ故無矛盾であることが絶対に必要なのである。

これに対してウィトゲンシュタインは、規則における矛盾とゲームの駒の配置としての矛盾とをまず区別することを要求する。前者、規則における矛盾は証明というゲームを破壊してしまう。例えば、一つの規則がモードゥス・ポネンスを承認し、もう一つの規則がこれを禁止する場合、我々は途方にくれるのである。これに対してゲームの駒の配置については事情が全く異なっている。「矛盾する論理式」、例えば ' $0 \neq 0$ ' や ' $p \sim p$ ' が公理や定理として登場したとしても、これによって証明というゲームが破壊される訳ではない。矛盾を含む公理系から実に多くのことが証明できるのである。

矛盾を公理の一つとする体系を当初から拒否すること、矛盾が定理として現れたところでそれ以上の展開を打ち切ることは、もとより可能である。しかしこれらは可能な選択の一部にすぎず、他の選択も可能であり、それぞれの選択は形式的体系にとっては外的な事柄である。いずれにせよ、矛盾は恐怖の対象ではなく、それが顔を出したところで適切に対処すれば済む類のものにすぎない。

言いかえれば、隠れた矛盾におびえる必要はない、隠れた矛盾を一掃するために予め各体系の無矛盾性を証明する必要はない、ということである。従って、この種の無矛盾性証明がことごとく可能でなければならない、と考えるべき理由もなければ、事実としても、矛盾を探知する方法が一般に与えられている訳でもないのである。

その故に、ゲーデルの結果が、自然数論の全てを無矛盾な体系で形式化することがある意味では不可能なことを示したとしても、これはウィトゲンシュタインにとって何の衝撃でもなかった。彼にとってはヒルベルトのプログラム自身が疑わしい目論見だったのである。

5 「数学の基礎づけ」一般がウィトゲンシュタインにとって問題的であった。

今度はヒルベルトの精神に対するウィトゲンシュタインの無理解が批判されることになる。即ち、算術の無矛盾性を前提として幾何学の無矛盾性が証明されたからには、次は算術の無矛盾性そのものの証明が当然課題となる。また、公理の独立性の証明に際して種々の人工的な算法がモデルとされたからには、この算法自身の無矛盾性は当然明らかでなければならぬ。従って、何よりもまず自然数論の無矛盾性が基礎づけられねばならない。これは数学者にとって至極当然な要求ではないか、という批判である。

もとより道は一つとは限らない。数論を論理学に還元し、論理学は自らの無矛盾性を何らかの仕方で明証的に示す、というのも一つの可能な方策である。いずれにせよこのような基礎づけの努力を通して数学が一つの整った全体であることが明らかになってくる、またこの過程で多くの成果がえられている。それなのにウィトゲンシュタインは全てを否認するのか、という批判である。

ウィトゲンシュタインからみれば、ラッセルもヒルベルトも「基礎づけ」を考える点で誤っている。記号論理学の位置について、ある箇所 (MS 121, 72 頁) で次のように述べられている。即ち

ところで数学は記号論理学ではない。記号論理学は数学の小さな一部分である。その小さな一部分が、誤解の故に、「数学の基礎」と思われているのである。

ヒルベルトについても

「……私は再びあるゲームを手にするのであってメタゲームを手にするのではない。

ヒルベルトが行っているのは数学なのであってメタ数学ではない。

他の全ての計算と全く同様にそれもまた一つの計算なのである。<sup>12)</sup>

と言われている。

ウィトゲンシュタインからみれば数学は一つの基盤の上に組み立てられた体系ではない。むしろ「数学は証明技術の色とりどりの混合物である。<sup>13)</sup>」そして「証明は命題同士を秩序づけ、それらに連関を与える。<sup>14)</sup>」

つまり、証明の一つ一つが新たなネットワークを作り上げる。しかも、ある箇所で得られた証明技術が、全く別の領域でほとんどそのままの形で適用できるということは日常茶飯事である。いずれにせよ、このようにして作り上げられるネットワークが、存在論的に下から上へ、あるいは線形に左から右へ、という形で全数学を並べてみせることが可能でもなけれ

ば必要でもない。冒頭の引用に示したように、数学を一つの体系とみなす先入見をつきくずしたのは、確かにゲーデルの功績なのである。

6 ゲーデルの不完全性定理の功罪はカントールの対角線論法の功罪と類比的である。

『数学の基礎』第Ⅰ部付録Ⅲ14節によれば、ゲーデルの不完全性定理の眼目は、それが例えばユークリッド幾何学における角の三等分が不可能であることを示すような、不可能性証明である点にある、とウィトゲンシュタインは考えていた。また同書第Ⅱ部16節が示すように、カントールの対角線論法の眼目もその不可能性証明にある、と彼は考えた。その限り、これら二人の数学者に対する彼の態度はかなりの程度類比的である、と筆者は考える。以下これを示していく。

角の三等分の不可能性の証明はユークリッド幾何学における証明ではない。それは一つの代数系における証明であり初等幾何学の定規とコンパスによる作図がそこでは代数方程式に投影されている。そして許された作図法では角の三等分という課題は果せないことが示されるのである。

ウィトゲンシュタインによれば、この証明の効用は人々に無駄な努力を断念させることにある。「無駄な努力をやめたまえ、うまくいかないことが証明されているのだから」と証明は物語る。もとより聞き手は、初等幾何学が一つの代数系に投影されていることを見てとらねばならない。しかし、彼が証明の眼目を理解すれば、角の三等分法を求める努力は打ち切りとなるのである。

同様に、カントールの対角線論法は全ての実数を何らかの順序で並べようとする試みが無駄であることを示す効用がある。その限り対角線論法は有用な技法であるが、技法それ自身としては特に高級なものではない。しかしこの技法が考案された状況とそれに付加された「哲学的散文」が種々の問題を生じる、とウィトゲンシュタインは考えたのである。

対角線論法が高級な技法ではないことを理解するには次のような社会を想像すればよい。<sup>15)</sup>そこでは全ての赤ん坊に背番号が命名されねばならない。名付け親は任意の番号を付けてよいがその番号は未使用でなければならない。このため使用された番号のリストとの照合が不可欠だが、ある時対角数の技法が発見される。それ以後この技法は「リストにない数を示せ」という課題と共に小学校で教えられる。そのような社会である。

この社会では、全ての実数がある順序で並べるという課題の空しさは、極めて平易な事実として受け容れられるであろう。

我々の社会の歴史はこれとは異なっていた。全ての実数は小数に無限展開でき、各々の無限小数にはそれぞれ実数が対応する、というウィトゲンシュタインからみれば疑わしい仮定

の下で、カントールは対角線論法を考案し、それから、実数の濃度は可付番無限より大である、という散文的帰結をひき出した。これと共に「集合論」の無意味なおしゃべりのゲームが創設されたのである。

ゲーデルに対してもこれと類比的なことが指摘できる、と筆者は考える。即ち、素因数分解の一意性を手がかりに、数学的表現を再び数値別に表現しようとするゲーデル数という考案はそれはそれで秀れたものである。また帰納関数の理論も意義のあるものである。その考案が一つの不可能性証明で使用されることも自然である。しかしその結果「ある体系の中で真ではあるが証明不可能な命題が存在する」と述べるのは散文に他ならないのである。

筆者の論述は「数学者が証明を行っている限り問題ない、しかし彼がおしゃべりを始めると注意せねばならない」という精神の下ですすめられてきた。しかしウィトゲンシュタインは、これには留まらない。彼は、内容的にみても集合論にはいかがわしい点がある、と考えていた。ゲーデルに対しても疑惑の目指しを向けていた、と言ってよいであろう。それ故、この理由が問われねばならない。

## 7 何故ウィトゲンシュタインはゲーデルに対して批判的態度をとったのか。

ウィトゲンシュタインのゲーデルに対する言及は不完全性定理の問題にほぼ限られているが、しかしこの定理はゲーデルの極めて秀れた幾つかの業績の中の一つにすぎない。それ故この定理のみを扱って「ウィトゲンシュタインとゲーデル」を論じるのは、初めから限界のある作業である、と思われるかもしれない。しかしながら、たとえウィトゲンシュタインがゲーデルの全業績を通覧したとしても、彼の態度は否定的であり続けた、と筆者は推測する。彼は集合論一般に対して批判的だったからである。

現代集合論の専門家からみれば、ウィトゲンシュタインの集合論の理解は余りにも時代遅れであろう。集合とクラスの区別に対してウィトゲンシュタインが注意を払ったとは思われないし、また彼の中期の数学論は有限集合、もしくは極めて特定された無限のみを認める立場と解釈できるが、これでは集合論の前提と相容れなくなるからである。

小論ではこれらの問題には立ち入らない。後期のウィトゲンシュタインから集合論が、ひいてはゲーデルが、どのようにみえたかを二点について指摘するにとどめることにする。即ち、集合論は数学の一分野にすぎないが、誤って数学の「基礎」と思われていることと、数学の生命は応用にあるのであって集合論はこの「応用」と程遠いところに位置することである。

第一点については、記号論理学と数学との関係について既に指摘したことがそのままあてはまる。集合論は代数学の一分野にすぎない。ところが集合論的表現様式が今日普遍的に採

用されていることもあり、集合論が全数学の「基礎」であるかの如き外観を呈するのである。

『数学の基礎』でウィトゲンシュタインが繰り返して強調したのは、数学の個別的な証明技術に十分注意を払うことであった。例えば十進法や対数といった考案はこれ自身が内実を持っている。27+18=45が『プリンキピア』の表記法に翻訳することが出来、従って27本の棒と18本の棒とを合併して一つの集合を作り、棒の本数を数えると45本になることが示されるかもしれない。しかし十進法という表記法なしには我々の今日の数学はありえなかった。それはラッセルの表記法、あるいは‘0’と“”という二つの記号からなる表記法さえあれば本質的には不要となるものではないのである。それぞれの考案が数学の内実を支えているのであって、これを「基礎づけ」によって解消することなど不可能である、というのがウィトゲンシュタインのくりかえし指摘したところである。

第二の論点は、パラドクスの出現による素朴集合論の危機は数学の危機では決してなかった、と表現できるであろう。この危機に対する深刻な反省から数学全体が大幅に組みかえられたわけではない。素朴集合論から公理的集合論への移行は数学者の営み全体からみると局所的な現象なのである。

同様に自然数論の無矛盾性が証明できないとしても、これによって自然数の使用が一時停止においこまれることはない。ひいては、自然数論に矛盾が発見されることがあっても、我々はおそらく局所的対応で切り抜けようとするであろう。数学は数学外の応用にその生命力を得ており、この応用は極めて安定しているのである。

嘘つきのパラドクスが発見されたのは二千年以上も前のことである。それ以後我々は「自然言語の危機」の中に放置され、我々は無知ないし怠惰の故に危険な自然言語を使い続けているのであろうか。嘘つきのパラドクスが生じないように、自然言語の文法を緊急に変更しなければならないのか。

ウィトゲンシュタインはそうは考えない。自然言語は日常生活での使用にその安定した基盤をもっている。嘘つきのパラドクスなどは周辺的な一つのエピソードにすぎないのである。

数学、とりわけ集合論についてもこれと同様に考えることはできないであろうか。このことを吟味するためには、まず第一に、我々の日常生活における数学の特殊な位置を考慮しなければならないし、第二に、集合論が現在に至るまでに蓄積した成果を検討せねばならない。しかしこれは本論の範囲を超えた課題である。いずれにせよ、ウィトゲンシュタインの姿勢は、基礎づけと危機の中を生きる哲学的数学者に対する批判としては、意味を失う訳ではないと、筆者には思われるのである。

注

- 1) Georg Kreisel: "Wittgenstein's Remarks on the Philosophy of Mathematics," *British Journal for the Philosophy of Science* 9 (1958-1959) 135-158. これ以外にもクライゼルはウィトゲンシュタインについていくつか論文を記している。それらは、彼自身の発想の強さを示す難解なものであるが、必ずしも徹頭徹尾ウィトゲンシュタインに対して批判的であるとは言えない。尤も、最近の回顧的小論（『ウィトゲンシュタインとの対話』'Zu einigen Gesprächen mit Wittgenstein: Erinnerungen und Gedanken, von Georg Kreisel' in *Wittgenstein, eine Ausstellung der Wiener Secession*, Bd. 1, Biologie · Philosophie · Praxis, 1989, Wien, S. 131-143）でも、多くのことがバラ色になってきた現在でもなお残る『数学の基礎』を手にした折の「失望と驚愕」の印象、について述べている。
- 2) Michael Dummett, "Wittgenstein's Philosophy of Mathematics", *The Philosophical Review* 68 (1959) 324-338. なお三つの引用はそれぞれ 324, 331, 332 頁からである。この論文は後に *Truth and Other Enigmas* に収録され、この論文集の抄訳が、『真理とその謎』（藤田晋吾訳、勁草書房）として刊行されている。引用箇所は日本語訳では、それぞれ 128, 140, 141 頁にあたる。
- 3) S. G. Shanker, "Wittgenstein's Remarks on the Significance of Gödel's Theorem," in S. G. Shanker (ed.), *Gödel's Theorem in focus*, 1988, Croom Helm, pp. 155-256.
- 4) 私自身としては、付録Ⅲ全体（1-20 節）をゲーデルへの言及とみなしてよいと思っている。
- 5) M.Nedo u. M. Rancetti (Hrsg.), *Wittgenstein, Sein Leben in Bildern und Texten*, Suhrkamp 1983.
- 6) なお、マイクロフィルムに一部眼を通した段階での文献学的な中間報告。MS163 の四項目のうち 1938 年の項目は大版ノート MS121 に再録されている。MS121 は『数学の基礎』第Ⅱ部、MS124 は第Ⅶ部のもとになる大版ノートであるから、編集方針如何によっては、前者の項目を『数学の基礎』の第Ⅱ部 57 節と 58 節との間に、後者を第Ⅶ部 31 節の一部として、我々が眼にすることもありえたのである。  
これ以外にも筆者は MS117（147 頁）にゲーデルへの言及を発見している。
- 7) 即ち、実点及び虚点で。
- 8) ゲーデルの「哲学的解説」の過剰を物語る他の一例を挙げるなら、彼が「嘘つきのパラドクス」について早々と触れている点である。彼自身が注意しているように、証明そのものはパラドクスの論法に従っている訳ではないにも拘らず。
- 9) これに関しては筆者は『ウィトゲンシュタインの夢』（1982, 勁草書房）所収の論文「数学・ゲーム・言語」の第 4 章「プラトニズム」の問題（とりわけその 5. 証明と体系）で詳論したことがある。参照して頂ければ幸いである。
- 10) 「ウィトゲンシュタインにおける意味論的視点の排除」については、それ自体改めて論じる必要がある。まず第一に『論理哲学論考』は真理値表や真理関数の理論に象徴されるように意味論的に構成されている。従って、初期から中期への変化については何らかの説明を必要とする。また中期の構文論一辺倒の立場を「ゲームとしての数学」として特徴づけることは可能であり、私自身この観点で前注の論文を書いたのであった。しかし、数学と応用、という問題については中期と後期とは力点のおき方が異なっている、と思われるのである。

- 11) ただ一つの論理定項で十分である、というシェッファーの発見について全く同じことが主張できる。
- 12) 『ウィトゲンシュタインとウィーン学団』1930年12月17日
- 13) 『数学の基礎』第Ⅲ部46節。ここでの「証明」はもとより公理論的な証明論の意味での「証明」ではなく、数学者が「非形式的に」証明と呼んでいるものことである。
- 14) 『数学の基礎』第Ⅵ部1節。
- 15) これは『数学の基礎』第Ⅱ部18節の例の変形である。



## Wittgenstein on Gödel's Incompleteness Theorem

Masahiro OKU

The philosophy of mathematics in the later Wittgenstein has been variously criticized. His understanding of Gödel's incompleteness theorem is one of the main targets. In this essay I reexamine this topic from a Wittgensteinian point of view.

I start with philological discussions showing that his concern about Gödel was not intermittent but constant and, moreover, that he mainly criticized Gödel's philosophical prose rather than his mathematical achievements.

Next I survey Wittgenstein's general attitude against formal systems and make the following three points clear : (i) his approach was extraordinarily syntactical and completely lacking in semantical considerations ; (ii) he doubted all sorts of "foundations" of mathematics ; and (iii) Hilbert's programme was no concern of him, therefore Gödel's theorem was not shocking at all.

From these it becomes clear that Wittgenstein could criticize Gödel, in the main, without further scrutinizing mathematical details of the proof. With this regard two topics are discussed ; (i) the prose "a true but unprovable proposition in a formal system" and (ii) the analogy between Cantor's diagonal proof and Gödel's theorem.

Lastly I present a brief examination of Wittgenstein's attitude against set theory.