The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

| Title | Studies on curves on toric surfaces |
|---|---|
| Author(s) | 川口, 良 |
| Citation | 大阪大学, 2009, 博士論文 |
| Version Type | VoR |
| URL | https://hdl.handle.net/11094/454 |
| rights | |
| Note | |

*The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA*

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

【32】

| | |
|---|---|
| 氏　　　　　　名 | 川口　良（かわぐち　りょう） |
| 博士の専攻分野の名称 | 博　士（理　学） |
| 学　位　記　番　号 | 第　22666　号 |
| 学 位 授 与 年 月 日 | 平成 21 年 3 月 24 日 |
| 学 位 授 与 の 要 件 | 学位規則第４条第１項該当<br>理学研究科数学専攻 |
| 学　位　論　文　名 | Studies on curves on toric surfaces<br>（トーリック曲面上の曲線の研究） |
| 論 文 審 査 委 員 | （主査）<br>教　授　今野　一宏<br>（副査）<br>教　授　臼井　三平　　准教授　川口　　周　　准教授　高橋　篤史 |

## 論 文 内 容 の 要 旨

本論文は, トーリック曲面に埋め込まれた非特異曲線に関して申請者がこれまでに得た２つの結果をまとめたものである. トーリック曲面とは, 射影平面 $\mathbb{P}^2$ または $a$ 次ヒルツェブルフ曲面 $\Sigma_a$ から有限回のブローアップで得られる曲面であり, トーリック写像と呼ばれる射影直線 $\mathbb{P}^1$ への標準的な写像を有限個もつことが知られている. また, トーリック曲面には代数的トーラスからの作用が存在し, その作用で不変な因子をトーラス不変因子と呼ぶ. 以下, トーリック曲面は非特異コンパクトであると仮定し, 単に曲線といえば非特異既約な射影的代数曲線を考える.

一つ目の結果はゴナリティ予想に関するものである. ゴナリティとは, 曲線 $C$ に対し $\mathrm{gon}(C) = \min\{\deg\varphi \mid \varphi : C \to \mathbb{P}^1\}$ で定義される不変量であり, 非特異 $d$ 次平面曲線なら $\mathrm{gon}(C) = d-1$ になることが知られている. また, Martens は $\Sigma_a$ 上の曲線 $C$ のゴナリティが, $\Sigma_a$ から $\mathbb{P}^1$ へのルーリング写像の $C$ への制限で与えられることを示した (Theorem 3.1.3). 一般に, 与えられた曲線のゴナリティを求めるのは容易ではないが, Green と Lazarsfeld により提唱されたゴナリティ予想は, 曲線上の直線束から定まる加群の極小自由分解に関する情報からゴナリティが調べられるという新しい可能性を示唆している (Conjecture 3.1.5). Aprodu はこの予想を $\Sigma_a$ 上の曲線に対して証明し, Martens の結果とは別の方法でゴナリティを計算してみせた ([1]). 申請者は, $\mathbb{P}^1$ へのトーリック写像を一つしか持たないようなトーリック曲面上の曲線に対しては, 一般にゴナリティ予想が正しいことを証明した (Theorem 3.1.6). なお, $\Sigma_a$ $(a \neq 0)$ はそのようなトーリック曲面の例であるので, これは Aprodu の結果の部分的な拡張にあたる.

二つ目の結果はワイエルシュトラスギャップ列に関するものである. 曲線 $C$ 上の点 $P$ に対し, $h^0(C, \mathcal{O}_C(jP)) = h^0(C, \mathcal{O}_C((j-1)P))$ を満たす正整数 $j$ を $C$ の $P$ におけるギャップ値と呼び, ギャップ値全体からなる集合を $P$ における（ワイエルシュトラス）ギャップ列と呼ぶ. $C$ の種数を $g$ とすると, ギャップ列は $\{1, 2, \ldots, 2g-1\}$ の中の $g$ 個の整数からなることが知られており, $C$ が超楕円曲線の場合には, $P$ が $C$ から $\mathbb{P}^1$ への 2 重被覆の分岐点ならば $\{1, 3, \ldots, 2g-1\}$, そうでなければ $\{1, \ldots, g\}$ となる. また, $C$ のゴナリティが 3 の場合には, Coppens と Kim によりギャップ列のタイプが 5 種類に分類された (Theorem 4.1.1, 4.1.2). 申請者はトーリック曲面上の曲線とトーラス不変因子の交点について考察し, そのような点において正整数がギャップ列となるための十分条件を得た (Theorem 4.1.3). さらにこれは, 適当な状況では必要十分条件となり, その場合にはギャップ列を完全に求めることができる (Corollary 4.1.4).

## 論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

川口良君の学位申請用の論文は，次の２つの結果を含んでいる．第１に，コンパクト非特異トーリック曲面から射影直線へのトーリック幾何の意味での正則写像がただひとつ定まる場合に，この曲面上の非特異既約な代数曲線に対して，Aprodu の方法を改良することによってゴナリティー予想を肯定的に解決した．同時に曲線の重要な不変量であるゴナリティーも決定されている．この結果は極小有理曲面上の曲線に対する既知の研究結果の非自明な拡張である．第２に，コンパクト非特異トーリック曲面上の非特異かつネフな曲線に対して，その曲線上のワイアシュトラス点とそのギャップ値を与える興味深い十分条件を，曲線に付随する格子点多角形内の格子の配置で記述した．例えば，超楕円曲線やトリゴナル曲線の場合には，これらの曲線から射影直線への標準的な分岐被覆写像の分岐の状況によってワイアシュトラス点とそのギャップ列が記述できる（トリゴナル曲線については Coppens や Kim らによる既知の研究結果）が，川口君の結果はこれら先行結果をほとんど包括する新しい知見である．よって，本論文は博士（理学）の学位論文として十分価値のあるものと認める．