Osaka University Knowledge Archive

| | |
|---|---|
| Title | Mobius Transformations on Quaternions |
| Author(s) | 木戸, 哲也 |
| Citation | 大阪大学, 2005, 博士論文 |
| Version Type | |
| URL | https://hdl.handle.net/11094/45593 |
| rights | |
| Note | 著者からインターネット公開の許諾が得られていないため、論文の要旨のみを公開しています。全文のご利用をご希望の場合は、<a href="https://www.library.osaka-u.ac.jp/thesis/#closed">大阪大学の博士論文について</a>をご参照ください。 |

*Osaka University Knowledge Archive : OUKA*

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

Osaka University

【25】

| | |
|---|---|
| 氏　　名 | 木（き）　戸（ど）　哲（てつ）　也（や） |
| 博士の専攻分野の名称 | 博　士（理　学） |
| 学　位　記　番　号 | 第　１９１７９　号 |
| 学位授与年月日 | 平成 17 年 3 月 25 日 |
| 学位授与の要件 | 学位規則第４条第１項該当<br>理学研究科数学専攻 |
| 学　位　論　文　名 | Möbius Transformations on Quaternions<br>（四元数とメビウス変換） |
| 論文審査委員 | （主査）<br>教　授　難波　　誠<br>（副査）<br>教　授　大鹿　健一　　教　授　満渕　俊樹　　助教授　作間　　誠 |

## 論　文　内　容　の　要　旨

四元数を $\mathbf{H}$ を成分とする行列は１次分数変換 $f_A(z)=(az+b)(cz+d)^{-1}$ によって $\hat{\mathbf{H}}=\mathbf{H}\cup\{\infty\}$ の Möbius 変換を定める。

このとき四元数の上半空間 $\mathbf{H}^4=\{z=x_0+x_1i+x_2j+x_3k\in\mathbf{H}\mid x_3>0\}$ に働く群は $\mathrm{Sp}^k(1,1)=\{A\in\mathrm{GL}(2,\mathbf{H})\mid {}^t\overline{A}KA=K\}$ であり（$\mathbf{H}^4$, $\mathrm{Sp}^k(1,1)$）は４次元双曲幾何学のモデルとなる。

$A\in\mathrm{Sp}^k(1,1)$ に対し分類の基準となる２次式を次のように定義する。

$$\Delta(A)=(a_1+d_1)^2+(a_2+d_2)^2+(a_3-d_3)^2+4c_3b_3\,,$$
$$\Lambda(A)=(\Re(\mathrm{tr}(A)))^2=(a_0+d_0)^2\,.$$

この $\Delta(A)$, $\Lambda(A)$ は $\mathrm{Sp}^k(1,1)$ の共軛に対して不変であり次の性質をもつ。

$$\Delta(BAB^{-1})=\Delta(A),\quad \Lambda(BAB^{-1})=\Lambda(A)$$

３次元の場合の分類基準は群 $\mathrm{SL}(2,\mathbf{C})$ のトレースであるが４次元の $\Delta(A)$ と $\Lambda(A)$ はその虚数部分と実数部分に相当し、次の分類定理を得る。

**定理１．** $\mathbf{H}^4$ の Möbius 変換 $f_A(z)=(az+b)(cz+d)^{-1}$ は不変量 $\Delta(A)$, $\Lambda(A)$ によって以下のように分類される。

(1) $-4\le\Delta(A)<0\Leftrightarrow f_A(z)$ は $\mathbf{H}^4$ 内に唯一の固定点をもつ楕円型

(2) $\Delta(A)>0\Leftrightarrow f_A(z)$ は斜航型（回転を伴う強い意味での斜航型）

(3) $\Delta(A)=0$ の場合

(3-1)　$\Lambda(A)>4\Leftrightarrow f_A(z)$ は双曲型（回転を伴わない斜航型）

(3-2)　$\Lambda(A)=4\Leftrightarrow f_A(z)$ は放物型（回転を伴わない平行移動）

(3-3)　$\Lambda(A)<4\Leftrightarrow\begin{cases} b_3^2+c_3^2\neq 0\Leftrightarrow \text{回転を伴う放物型}\\ b_3^2+c_3^2=0\Leftrightarrow \text{２次元球面を固定する楕円型}\end{cases}$

行列の成分で定義された $\Delta(A)$, $\Lambda(A)$ は以下のような幾何的な量によって表記される。

**定理２．** 変換 $f_A(z)$ について $\Delta(A)\ge 0$ のとき

$$\Delta(A)=4\sinh^2\frac{\lambda}{2}\sin^2\frac{\theta}{2},\quad \Lambda(A)=4\cosh^2\frac{\lambda}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}$$

ただし $\lambda=\inf_{z\in \mathrm{H}^3}\rho(z,\ f_A(z))$ は $f_A(z)$ の translation length、$\theta$ は回転角

**定理3．** 変換 $f_A(z)$ について $\Delta(A)\leq 0$ のとき

$$\Delta(A)=-4\sin^2\frac{\theta_1}{2}\sin^2\frac{\theta_2}{2},\quad \Lambda(A)=4\cos^2\frac{\theta_1}{2}\cos^2\frac{\theta_2}{2}$$

ここで $\theta_1$, $\theta_2$ は4次元の楕円型変換によって定まる回転角とする。

$A\in \mathrm{Sp}^k(1,1)$ に対し $f_A(z)$ が斜航型のとき $A$ は部分群 $\mathrm{SL}(2,\ \mathbf{C})$ の元に共軛であり変換の標準型として次の形のものがとれる。

$$f(z)=e^{\lambda+\theta i}u+e^{\lambda}vj=e^{\lambda}(e^{i\theta}u+vj)\ \text{ただし}\ z=u+vj,\quad u,\ v\in \mathbf{C}$$

$f_A(z)$ が放物型のときには $a\in \mathbf{H}$ が存在して標準型は次の形に表される。

$$f(z)=az\bar{a}+1\ \text{ここで}\ a=\cos\frac{\theta}{2}+k\sin\frac{\theta}{2},\quad |a|=1$$

この $f(z)$ は $(i,\ j)$-平面の回転を伴う実数軸方向の平行移動である。

楕円型のときは単位球体モデル $\mathbf{D}^4=\{z\in \mathbf{H}\,|\,|z|<1\}$ を使って標準型として次のような4次元の回転をとることができる。

$$f(z)=f(u+vj)=e^{i\theta_1}u+e^{i\theta_2}vj,\quad z=u+vj\in \mathbf{D}^4$$

したがって $f_A(z)$ が斜航型のとき isometry の類は実数の組（$\lambda$, $\theta$）で表され、放物型のときには回転角 $\theta$ で代表される。楕円型のときは実数の組（$\theta_1$, $\theta_2$）で代表され、一方が0のときは2次元平面固定型に対応する。

## 論文審査の結果の要旨

木戸哲也氏は、4元数体の上半空間を4次元双曲空間のモデルと見て、双曲空間の等長変換を4元数を用いて研究した。向きを保つ等長変換はこのモデルでは、4元数を係数とする、ある種の一次分数変換と考えられる。木戸氏は、それらの係数から作られる二次形式を2つ考え、向きを保つ等長変換はこれら二次形式の性質により、6種類に分類できることを示した。この結果は、2次元、3次元の知られた結果の自然な4次元版と考えられる。木戸氏はさらに、これら二次形式が共役不変量であることを示し、またこれらを等長変換の「平行移動距離」と「回転角」で表現して、これら二次形式の幾何学的意味を明らかにした。この結果は4次元双曲空間の等長変換の群を研究するために、実用性の高い一つの方法を示している。

よって本研究は博士（理学）の学位論文として十分価値あるものと認める。