氏　　　　　　名　木戸哲也（きどてつや）

博士の専攻分野の名称　博　士（理　学）

学　位　記　番　号　第　19179　号

学 位 授 与 年 月 日　平成17年3月25日

学 位 授 与 の 要 件　学位規則第4条第1項該当

理学研究科数学専攻

学　位　論　文　名　Möbius Transformations on Quaternions
（四元数とメビウス変換）

論 文 審 査 委 員　（主査）
教　授　難波　　誠
（副査）
教　授　大鹿　健一　　教　授　満渕　俊樹　　助教授　作間　　誠

論 文 内 容 の 要 旨

四元数を H を成分とする行列は１次分数変換 $f_A(z)=(az+b)(cz+d)^{-1}$ によって $\hat{\mathrm{H}}=\mathrm{H}\cup\{\infty\}$ の Möbius 変換を定める。

このとき四元数の上半空間 $\mathrm{H}^4=\{z=x_0+x_1i+x_2j+x_3k\in\mathrm{H}\mid x_3>0\}$ に働く群は $\mathrm{Sp}^k(1,1)=\{A\in\mathrm{GL}(2,\ \mathrm{H})\mid{}^t\bar{A}KA=K\}$ であり（H^4, $\mathrm{Sp}^k(1,1)$）は４次元双曲幾何学のモデルとなる。

$A\in\mathrm{Sp}^k(1,1)$ に対し分類の基準となる２次式を次のように定義する。

$$\Delta(A)=(a_1+d_1)^2+(a_2+d_2)^2+(a_3-d_3)^2+4c_3b_3\,,$$
$$\Lambda(A)=(\Re(\mathrm{tr(A)}))^2=(a_0+d_0)^2\,.$$

この $\Delta(A)$, $\Lambda(A)$ は $\mathrm{Sp}^k(1,1)$ の共軛に対して不変であり次の性質をもつ。

$$\Delta(BAB^{-1})=\Delta(A),\ \Lambda(BAB^{-1})=\Lambda(A)$$

３次元の場合の分類基準は群 SL(2, C) のトレースであるが４次元の $\Delta(A)$ と $\Lambda(A)$ はその虚数部分と実数部分に相当し、次の分類定理を得る。

定理１．H^4 の Möbius 変換 $f_A(z)=(az+b)(cz+d)^{-1}$ は不変量 $\Delta(A)$, $\Lambda(A)$ によって以下のように分類される。

⑴ $-4\le\Delta(A)<0\Leftrightarrow f_A(z)$ は H^4 内に唯一の固定点をもつ楕円型

⑵ $\Delta(A)>0\Leftrightarrow f_A(z)$ は斜航型（回転を伴う強い意味での斜航型）

⑶ $\Delta(A)=0$ の場合

(3-1) $\Lambda(A)>4\Leftrightarrow f_A(z)$ は双曲型（回転を伴わない斜航型）

(3-2) $\Lambda(A)=4\Leftrightarrow f_A(z)$ は放物型（回転を伴わない平行移動）

(3-3) $\Lambda(A)<4\Leftrightarrow\begin{cases}b_3^2+c_3^2\neq0\Leftrightarrow \text{回転を伴う放物型}\\ b_3^2+c_3^2=0\Leftrightarrow \text{２次元球面を固定する楕円型}\end{cases}$

行列の成分で定義された $\Delta(A)$, $\Lambda(A)$ は以下のような幾何的な量によって表記される。

定理２．変換 $f_A(z)$ について $\Delta(A)\ge0$ のとき

$$\Delta(A)=4\sin\mathrm{h}^2\frac{\lambda}{2}\sin^2\frac{\theta}{2},\ \Lambda(A)=4\cos\mathrm{h}^2\frac{\lambda}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}$$

ただし$\lambda=\inf_{z\in \mathrm{H}^3}\rho(z,\ f_A(z))$は$f_A(z)$の translation length、$\theta$は回転角

定理3． 変換$f_A(z)$について$\Delta(A)\leq 0$のとき

$$\Delta(A)=-4\sin^2\frac{\theta_1}{2}\sin^2\frac{\theta_2}{2},\quad \Lambda(A)=4\cos^2\frac{\theta_1}{2}\cos^2\frac{\theta_2}{2}$$

ここでθ_1, θ_2は4次元の楕円型変換によって定まる回転角とする。

$A\in \mathrm{Sp}^k(1,1)$に対し$f_A(z)$が斜航型のときAは部分群$\mathrm{SL}(2,\ \mathrm{C})$の元に共軛であり変換の標準型として次の形のものがとれる。

$$f(z)=e^{\lambda+\theta i}u+e^{\lambda}vj=e^{\lambda}(e^{i\theta}u+vj) \text{ ただし } z=u+vj,\quad u,\quad v\in \mathrm{C}$$

$f_A(z)$が放物型のときには$a\in \mathrm{H}$が存在して標準型は次の形に表される。

$$f(z)=az\bar{a}+1 \text{ ここで } a=\cos\frac{\theta}{2}+k\sin\frac{\theta}{2},\quad |a|=1$$

この$f(z)$は$(i,\ j)$-平面の回転を伴う実数軸方向の平行移動である。

楕円型のときは単位球体モデル$\mathrm{D}^4=\{z\in \mathrm{H}\,||\,z|<1\}$を使って標準型として次のような4次元の回転をとることができる。

$$f(z)=f(u+vj)=e^{i\theta_1}u+e^{i\theta_2}vj,\quad z=u+vj\in \mathrm{D}^4$$

したがって$f_A(z)$が斜航型のとき isometry の類は実数の組（λ, θ）で表され、放物型のときには回転角θで代表される。楕円型のときは実数の組（θ_1, θ_2）で代表され、一方が0のときは2次元平面固定型に対応する。

論文審査の結果の要旨

木戸哲也氏は、４元数体の上半空間を４次元双曲空間のモデルと見て、双曲空間の等長変換を４元数を用いて研究した。向きを保つ等長変換はこのモデルでは、４元数を係数とする、ある種の一次分数変換と考えられる。木戸氏は、それらの係数から作られる二次形式を２つ考え、向きを保つ等長変換はこれら二次形式の性質により、６種類に分類できることを示した。この結果は、２次元、３次元の知られた結果の自然な４次元版と考えられる。木戸氏はさらに、これら二次形式が共役不変量であることを示し、またこれらを等長変換の「平行移動距離」と「回転角」で表現して、これら二次形式の幾何学的意味を明らかにした。この結果は４次元双曲空間の等長変換の群を研究するために、実用性の高い一つの方法を示している。

よって本研究は博士（理学）の学位論文として十分価値あるものと認める。