

Title	Grobner bases associated with positive roots and Catalan numbers
Author(s)	北村, 知徳
Citation	大阪大学, 2005, 博士論文
Version Type	
URL	<a href="https://hdl.handle.net/11094/45595">https://hdl.handle.net/11094/45595</a>
rights	
Note	著者からインターネット公開の許諾が得られていないため、論文の要旨のみを公開しています。全文のご利用をご希望の場合は、 <a href="https://www.library.osaka-u.ac.jp/thesis/#closed">〈a href="https://www.library.osaka-u.ac.jp/thesis/#closed"〉</a> 大阪大学の博士論文について <a href="https://www.library.osaka-u.ac.jp/thesis/#closed">〈/a〉</a> をご参照ください。

***Osaka University Knowledge Archive : OUKA***

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

氏名	きたむらとものり 北村知徳
博士の専攻分野の名称	博士(理学)
学位記番号	第 19182 号
学位授与年月日	平成 17 年 3 月 25 日
学位授与の要件	学位規則第 4 条第 1 項該当 理学研究科数学専攻
学位論文名	Gröbner bases associated with positive roots and Catalan numbers (正根に付随するグレブナー基底とカタラン数)
論文審査委員	(主査) 教授 日比 孝之 (副査) 教授 川中 宣明 教授 坂根 由昌 助教授 山根 宏之

## 論文内容の要旨

Gel'fand-Graev-Postnikov は根系  $A_{n-1}$  のすべての正根に原点を加えた配置の凸閉包の正則単模三角形分割を具体的に構成し、その配置の凸閉包の正規化体積がカタラン数に一致することを示した。彼等の結果の本質はその配置に付随するトーリックイデアルの次数 2 の squarefree な単項式によって生成されるイニシャルイデアルを発見したことである。さらに、大杉・日比は根系  $B_n, C_n, D_n$  の各々について、その根系のすべての正根に原点を加えた配置に付随するトーリックイデアルの次数 2 の squarefree な単項式によって生成されるイニシャルイデアルを発見した。従って、根系  $A_{n-1}, B_n, C_n, D_n$  の各々について、その根系のすべての正根から成る配置に付随するトーリックイデアルに対して同様の問題を考察することは自然なことである。本論文では、根系  $A_{n-1}$  のすべての正根から成る配置  $A_{n-1}^+$  およびその配置に付随するトーリックイデアル  $I_{A_{n-1}^+}$  について代数的および組合せ論的に考察した。その後、大杉・日比は根系  $B_n, C_n, D_n$  の各々について、その根系のすべての正根から成る配置に付随するトーリックイデアルのイニシャルイデアルで次数が高々 3 の squarefree な単項式によって生成されるものを発見した。

本論文で得られた結果を列挙する。第一に、イデアル  $I_{A_{n-1}^+}$  の被約グレブナー基底を具体的に求めることにより、イデアル  $I_{A_{n-1}^+}$  のイニシャルイデアルで次数が高々 3 の squarefree な単項式によって生成されるものを発見し、そのイニシャルイデアルを使って、配置  $A_{n-1}^+$  の凸閉包の正則単模三角形分割を具体的に構成した。この結果と Gel'fand-Graev-Postnikov の結果を比較すると、原点が本質的な役割を果たしていることは明白である。多項式環のイデアルのグレブナー基底を求めるアルゴリズムとして Buchberger のアルゴリズムがよく知られているが、このアルゴリズムを適用してグレブナー基底を求めるためには、そのイデアルの生成系があらかじめ分かっていることが必要である。しかし、根系に付随するトーリックイデアルに対しては、一般には生成系をあらかじめ得ることができず、Buchberger のアルゴリズムを適用してグレブナー基底を求めることができない。そこで、生成系をあらかじめ得ることができない場合に重要な役割を果たす手法を適用して、イデアル  $I_{A_{n-1}^+}$  の被約グレブナー基底を求めた。

第二に、上記で構成した配置  $A_{n-1}^+$  の凸閉包の正則単模三角形分割  $\Delta$  の極大な面をグラフ論的な観点から特徴付けた。具体的には、配置  $A_{n-1}^+$  の部分集合に付随する有向グラフを定義し、 $\Delta$  の極大な面に付随する有向グラフは頂点が  $n$  個、有向辺が  $n$  個で、唯一つのサイクルとして長さ 3 のサイクルを持つ連結グラフであることを示した。さらに、配置  $A_{n-1}^+$  の部分集合  $\sigma$  に対して、 $\sigma$  が  $\Delta$  の極大な面であるための  $\sigma$  に付随する有向グラフの満たすべき必要十分条件を

求めた。

第三に、配置  $A_{n-1}^+$  の凸閉包の正規化体積がカタラン数から 1 を引いたものであることに着目し、既に 70 通りを超える組合せ論的表示が知られているカタラン数の新しい組合せ論的表示を得ることに成功した。

### 論文審査の結果の要旨

当該論文の主要結果は、A 型根系の正根の全体から成る配置に付随するトーリックイデアルの squarefree な被約グレブナー基底を発見し、その配置の凸閉包の正則単模三角形分割を構成したことである。加えて、その正則単模三角形分割の極大な面を有限グラフの観点から特徴付けることに成功し、カタラン数の組合せ論的な解釈の一つを得た。

よって、本論文は博士（理学）の学位論文として十分価値あるものと認める。