Title	BORSUK-ULAM TYPE THEOREMS ON STIEFEL MANIFOLDS
Author(s)	井上, 明
Citation	大阪大学, 2005, 博士論文
Version Type	
URL	https://hdl.handle.net/11094/45631
rights	
Note	著者からインターネット公開の許諾が得られていないため、論文の要旨のみを公開しています。全文のご利用をご希望の場合は、大阪大学の博士論文についてをご参照ください。

【26】

氏名　井上　明（いのうえ　あきら）

博士の専攻分野の名称　博　士（理　学）

学位記番号　第　19180　号

学位授与年月日　平成 17 年 3 月 25 日

学位授与の要件　学位規則第４条第１項該当

理学研究科数学専攻

学位論文名　BORSUK-ULAM TYPE THEOREMS ON STIEFEL MANIFOLDS
（シュティーフェル多様体上のボルスク-ウラム型定理）

論文審査委員　（主査）
教　授　大鹿　健一
（副査）
教　授　満渕　俊樹　　助教授　大和　健二　　講　師　長崎　生光

論文内容の要旨

Borsuk と Ulam は n 次元球面 S^n から m 次元球面 S^m への連続写像 f ですべての $x \in S^n$ に対して $f(-x)=-f(x)$ を満たすならば、$n \leqq m$ が成り立つことを示した。これは次の命題、すなわち、『$f(-x)=-f(x)$ を満たす連続写像 f: $S^n \to S^n$ の写像度が奇数である。』ことから直ちに導かれる。よって、これも Borsuk-Ulam の定理と呼ばれる。また、このことは変換群論の立場に立つと、n 次元球面 S^n に対心作用により Z_2 作用を与え、『任意の Z_2 写像 f : $S^n \to S^n$ に対して、その写像度は奇数である。』と表現できる。

この Borsuk-Ulam の定理は様々な形で拡張され、例えば R^m における正規直交 m 枠全体の集合、すなわち、実 Stiefel 多様体 $V_k(R^m)$ においても研究されている。実 Stiefel 多様体 $V_k(R^m)$ には通常の行列の積により、直交群 $O(k)$ が自由に作用するが、このとき『任意の $O(k)$ 写像 f: $V_k(R^m) \to V_k(R^m)$ に対して、その写像度は奇数である。』ことが知られている。しかしこの命題は、この作用する群は直交群でなくてもより小さい群でも同様の定理が得られる。

そこで本論文では、この作用を直交群 $O(k)$ の部分群 $(Z_2)^k$ に制限したときを考えた。ここで、$(Z_2)^k = Z_2 \times Z_2 \times \cdots \times Z_2$（$k$ 個の Z_2 の直積）は対角成分に ± 1 が並んだ行列全体の集合である。その為に、E. Fadell-S. Husseini や J. Jawarowski により定義されたコホモロジー・インデックスを考えた。このコホモロジー・インデックスはコンパクト群 G が空間 X に作用するとき、X から一点集合への写像を考え、この写像から誘導される同変コホモロジー群の準同型写像の核として定義されるものである。この核は空間 X の G インデックスとも呼ばれ、定義よりコンパクト群 G の分類空間のコホモロジー群の部分群である。この G インデックスで G として $(Z_2)^k$、X として $V_k(R^m)$、すなわち、実 Stiefel 多様体 $V_k(R^m)$ の $(Z_2)^k$ インデックスで特にコホモロジーの次元が $V_k(R^m)$ の次元のものである $\mathrm{Ind}^{(Z_2)^k}_{\dim V_k(R^m)}(V_k(R^m); Z_2)$ を計算し、これが $(Z_2)^k$ の分類空間のコホモロジー群 $H^{\dim V_k(R^m)}(B(Z_2)^k; Z_2)$ と一致しないことを確かめた。このことから、『任意の $(Z_2)^k$ 写像 f: $V_k(R^m) \to V_k(R^m)$ に対して、その写像度は奇数である。』ことを証明した。また、$l < k$ のときを考えると、$(Z_2)^l$ は $(Z_2)^k$ の部分群となり、$V_k(R^m)$ は自由な $(Z_2)^l$ 多様体となる。このとき、先に述べた、$\mathrm{Ind}^{(Z_2)^k}_{\dim V_k(R^m)}(V_k(R^m); Z_2)$ の計算結果より、『$\dim V_k(R^m) = \dim V_l(R^n)$ であるとき、任意の $(Z_2)^l$ 写像 f: $V_k(R^m) \to V_l(R^n)$ に対し、f の写像度は偶数となる。』ことを証明した。

また、同様の命題が複素 Stiefel 多様体の場合にも得られた。つまり、$V_k(C^m)$ を C^m における正規直交 k 枠全体からなる集合とし、$U(k)$ をユニタリ群とする。すると実数のときと同様に $U(k)$ は $V_k(C^m)$ に自由に作用し、また p を

素数として、この作用を対角成分に1の p 乗根が並ぶ行列全体からなる部分群 $(Z_p)^k$ に制限する。このとき $\mathrm{Ind}^{(Z_p)^k}(V_k(C^m); Z_p)$ を計算することによって、『f: $V_k(C^m) \to V_k(C^m)$ を $(Z_p)^k$ 写像とすると fの写像度は pの倍数でない。』ことを示し、『$\dim V_k(C^m) = \dim V_l(C^n)$ ならば、任意の $(Z_p)^l$ 写像 f: $V_k(C^m) \to V_l(C^n)$ に対し、fの写像度は pの倍数となる。』ことを証明した。

論文審査の結果の要旨

球面に関する Borsuk-Ulam の定理は古くから知られている有名な定理であるが近年様々な研究者によりこの定理の一般化が研究されている。井上氏は、写像度の観点から Borsuk-Ulam の定理の一般化を研究し、p-トーラス群の作用をもつ実または複素 Stiefel 多様体のコホモロジー指数の詳細な分析により、次の結果を得た。

(1) 階数 k の 2-トーラス群作用をもつ k-枠のなす実 Stiefel 多様体の同変自己写像の写像度は奇数である。

(2) 階数 k の p-トーラス群作用をもつ k-枠のなす複素 Stiefel 多様体の同変自己写像の写像度は、p を法として、零でない。

これらの結果は、球面に関する Borsuk-Ulam の定理の自然な一般化であるのみならず、写像度とコホモロジー指数との密接な関係を明らかにしたという意味で重要な意義をもち、学位を授与するにふさわしい仕事であると考える。