



Title	Sur la réduction modulo p des groupes linéaires algébriques
Author(s)	Ono, Takashi
Citation	Osaka Mathematical Journal. 1958, 10(1), p. 57-73
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/4567
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

*Sur la Réduction Modulo $\mathfrak{p}$ des Groupes Linéaires Algébriques**

Par Takashi ONO

Dans son travail récent [1] A. Borel a développé une théorie des groupes linéaires algébriques sur le corps de caractéristique p quelconque par la méthode algébrique-géométrique, et généralisé les résultats de E. Kolchin [4, 5] et de C. Chevalley [2, 3]. D'autre part, G. Shimura [7] a établi une théorie de "réduction modulo $\mathfrak{p}$ " des variétés algébriques en application de la théorie de A. Weil [9]. Dans ses travaux [7, 8], il a démontré plusieurs théorèmes du type suivant: Soit k un corps ayant un nombre infini de valuations discrètes $\{w_\lambda\}$ avec les idéaux de valuations $\{\mathfrak{p}_\lambda\}$. (Il est supposé que tout élément, autre que 0, de k est une $\mathfrak{p}_\lambda$ -unité pour presque tous les λ ¹⁾). Alors diverses propriétés des variétés algébriques V sur k , telles que l'irréductibilité, sont préservées après la réduction modulo $\mathfrak{p}_\lambda$ pour presque tous les λ . On peut aussi envisager les théorèmes du type réciproque: si presque toutes les variétés $V^{(\lambda)}$, obtenues par la réduction modulo $\mathfrak{p}_\lambda$ d'une variété algébrique V , ont une certaine propriété, alors V elle-même possède cette propriété. On pourrait nommer ces deux sortes de théorèmes principes de *dispersion* et d'*agglomération*, respectivement (ou encore: de Shimura et de Hasse, quoique nous ayons défini autrement le "principe de Hasse" dans notre travail antérieur [6].)

Dans le présent mémoire, nous montrerons que ces principes sont valables pour tous les concepts sur les groupes linéaires algébriques qui apparaissent dans [1]: résolubilité, d'être un tore, etc. Nous examinerons ces concepts successivement selon l'ordre d'exposé de [1]. Nous démontrerons en particulier qu'un sous-groupe H d'un groupe algébrique G est un sous-groupe résoluble connexe maximal de G ou un sous-groupe de Cartan de G , si et seulement si $H^{(\lambda)}$ est un sous-groupe résoluble connexe maximal de $G^{(\lambda)}$ ou un sous-groupe de Cartan de $G^{(\lambda)}$ respectivement pour presque tous les λ (Théorème 2.14, 2.30). Le "principe de

* Ce travail a été accompli pendant que l'auteur était boursier de la Fondation Yukawa.

1) Nous nous servons de l'expression "pour presque tout les λ " au sens de "pour tous les λ sauf pour les exceptionnels en nombre fini".

dispersion" pour le sous-groupe résoluble connexe maximal de G (Proposition 2.10) est fondamental en ce sens, que tous les résultats importants de ce travail s'en dérivent. La démonstration de cette proposition utilise un résultat important de [1] sur la variété des drapeaux, et un théorème général de Shimura-Taniyama sur le principe de dispersion, qui va être publié prochainement. Pour établir le principe de dispersion pour le sous-groupe de Cartan de G (Proposition 2.24), nous utiliserons les résultats de C. Chevalley [2, 3] sur les algèbres de Lie de caractéristique p quelconque, (mais nous serons obligés de nous limiter ici au cas, où la caractéristique de k est 0, —l'hypothèse que nous devrons faire à la seconde moitié du § 2.)*

Nous supposerons les travaux [1], [7] comme connus du lecteur.

§ 1. Réduction des groupes algébriques.

Soit k un corps ayant une valuation discrète. Nous désignons par $\mathfrak{o}$ l'anneau de la valuation, par $\mathfrak{p}$ l'idéal de la valuation, par κ le corps résiduel $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$. Pour la simplicité du langage, nous supposons dorénavant que deux corps k, κ sont *parfaits*²⁾. Dans tout ce paragraphe, nous fixons k et $\mathfrak{o}$, et nous utilisons les notations $k, \mathfrak{o}, \mathfrak{p}, \kappa$ au sens ci-dessus. Soit Ω (resp. Ω_κ) le corps universels sur k (resp. κ) choisi une fois pour toutes. Pour tout corps K , on note $M(n, K)$ l'espace des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans K , et $GL(n, K)$ le groupe multiplicatif des éléments inversibles de $M(n, K)$.

Suivant A. Borel³⁾, par un groupe algébrique G défini sur k , on entend un sous-groupe G de $GL(n, \Omega)$ qui est l'intersection de ce dernier avec un ensemble algébrique A de $M(n, \Omega)$ défini sur $k: G = A \cap GL(n, \Omega)$. On notera $A^{(\kappa)}$ l'ensemble algébrique, défini sur κ , de $M(n, \Omega_\kappa)$, obtenu de A par la réduction modulo $\mathfrak{p}$ au sens de G. Shimura⁴⁾. Il est clair que l'ensemble $G^{(\kappa)} = A^{(\kappa)} \cap GL(n, \Omega_\kappa)$ ne dépend que de G et non pas de A .

Théorème 1.1. *L'ensemble $G^{(\kappa)}$ devient un groupe algébrique défini sur κ .*

Pour démontrer ceci, il suffit de remarquer que $G^{(\kappa)}$ forme un groupe abstrait. Pour ξ, η quelconques dans $G^{(\kappa)}$, il existe $x, y \in A$ tels que

* Récemment Monsieur J. Dieudonné a étendu tous nos théorèmes sans restriction sur la caractéristique en utilisant sa théorie des hyperalgèbres de Lie. Sa note [10] est publiée dans le même journal que la nôtre. J'exprime ici ma sincère reconnaissance à M. Dieudonné qui a bien voulu s'intéresser à mes résultats et me donner de précieux conseils.

2) En vertu de cette hypothèse, les termes "défini sur k (resp. κ)" et "quasidéfini sur k (resp. κ)" signifient la même chose. c.f. [1], (1.3).

3) [1], (2.1).

4) [7], § 3.

$x \xrightarrow{0} \xi, y \xrightarrow{0} \eta^5$. On peut ici supposer que x, y sont indépendants sur k . Comme tous les composants de la matrice $x \cdot y$ sont contenus dans l'anneau de la spécialisation: $(x, y) \xrightarrow{0} (\xi, \eta)$, on voit que $x \cdot y \xrightarrow{0} \xi \cdot \eta$, d'où $\xi \cdot \eta \in G^{(\kappa)}$. De plus, il est clair que l'identité de $GL(n, \Omega_\kappa)$ est contenue dans $G^{(\kappa)}$. Enfin, puisque tous les composants de la matrice x^{-1} sont la forme dans $P_{ij}(x)/\det x$, où $P_{ij}(X) \in \mathfrak{o}[X]$, $\det \xi \neq 0$, ils sont contenus l'anneau de la dans spécialisation: $x \xrightarrow{0} \xi$. On a donc $x^{-1} \xrightarrow{0} \xi^{-1}$, d'où $\xi^{-1} \in G^{(\kappa)}$, c.q.f.d.

Définition. Nous appellerons $G^{(\kappa)}$ le groupe algébrique obtenu du groupe algébrique G par la réduction modulo $\mathfrak{p}$.

Nous utilisons souvent dans la suite le fait que $\dim G^{(\kappa)} = \dim G^{(5)}$.

Nous allons examiner maintenant la réduction modulo $\mathfrak{p}$ de divers sous-groupes de G suivant l'ordre d'exposé dans le mémoire de A. Borel.

Proposition 1.2. Soient G un groupe algébrique, H un sous-groupe algébrique de G . Supposons que k est un corps de définition pour G, H . Alors le centralisateur $Z(H)$ de H dans G est défini sur $k^{(7)}$, et on a $(Z(H))^{(\kappa)} \subseteq Z(H^{(\kappa)})$.

Soient, en effet, $\xi \in (Z(H))^{(\kappa)}, \eta \in H^{(\kappa)}$. Il existe donc $x \in Z(H), y \in H$ tels que $x \xrightarrow{0} \xi, y \xrightarrow{0} \eta$, où on peut supposer que x, y sont indépendants sur k . Comme tous les composants de la matrice $x \cdot y = y \cdot x$ sont contenus dans l'anneau de la spécialisation: $(x, y) \xrightarrow{0} (\xi, \eta)$, on a $x \cdot y = y \cdot x \xrightarrow{0} \xi \cdot \eta = \eta \cdot \xi$, c.q.f.d.

Il en résulte en particulier :

Corollaire 1.3. Si G est un groupe algébrique commutatif défini sur k , $G^{(\kappa)}$ est commutatif.

Proposition 1.4. Soient G un groupe algébrique, H un sous-groupe algébrique de G . Supposons que k est un corps de définition pour G, H . Alors le normalisateur $N(H)$ de H dans G est défini sur $k^{(7)}$, et on a $(N(H))^{(\kappa)} \subseteq N(H^{(\kappa)})$.

Ceci se démontre de la même façon que Proposition 1.2.

5) $x \xrightarrow{0} \xi$ signifie que ξ est une spécialisation de x sur $\mathfrak{o}$. c.f. [7], § 1.

6) [7], § 3, Proposition 19.

7) [1], (2. 5, e).

Il en résulte en particulier :

Corollaire 1.5. *Si H est invariant dans G , $H^{(\kappa)}$ est invariant dans $G^{(\kappa)}$.*

Proposition 1.6. *Soient G un groupe algébrique, H, K des sous-groupes algébriques connexes de G . Supposons que k est un corps de définition pour G, H, K . Alors $[H, K]$ est un sous-groupe algébrique connexe défini sur $k^{(8)}$, et on a $[H^{(\kappa)}, K^{(\kappa)}] \subseteq [H, K]^{(\kappa)}$.*

Soient, en effet, $\xi \in H^{(\kappa)}$, $\eta \in K^{(\kappa)}$. Il existe donc $x \in H$, $y \in K$ tels que $x \xrightarrow{v} \xi$, $y \xrightarrow{v} \eta$, où on suppose que x, y sont indépendants sur k . Comme tous les composants de la matrice $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$ sont contenus dans l'anneau de la spécialisation : $(x, y) \xrightarrow{v} (\xi, \eta)$, on a $[x, y] \xrightarrow{v} [\xi, \eta]$, d'où $[\xi, \eta] \in [H, K]^{(\kappa)}$, c.q.f.d.

Proposition 1.7. *Soit G un groupe algébrique connexe défini sur k . Soit $C^i G$ (resp. $D^i G$), $i \geq 0$, la série centrale descendante (resp. la série des groupes dérivés) de $G^{(9)}$. Alors tous les groupes $C^i G$ (resp. $D^i G$) sont définis sur k , et on a $C^i(G^{(\kappa)})_0 \subseteq (C^i G)^{(\kappa)}$ (resp. $D^i(G^{(\kappa)})_0 \subseteq (D^i G)^{(\kappa)}$), $i \geq 0^{(10)}$.*

Démonstration par récurrence sur i . On a $C^0(G^{(\kappa)})_0 = (G^{(\kappa)})_0 \subseteq G^{(\kappa)}$, et si $C^i(G^{(\kappa)})_0 \subseteq (C^i G)^{(\kappa)}$, alors $C^{i+1}(G^{(\kappa)})_0 = [(G^{(\kappa)})_0, C^i(G^{(\kappa)})_0] \subseteq [G^{(\kappa)}, (C^i G)^{(\kappa)}] \subseteq [G, C^i G]^{(\kappa)} = (C^{i+1} G)^{(\kappa)}$. Même démonstration dans le cas de $D^i G$.

Il en résulte en particulier :

Corollaire 1.8. *Si G est un groupe algébrique nilpotent (resp. résoluble) connexe défini sur k , $(G^{(\kappa)})_0$ est nilpotent (resp. résoluble).*

Proposition 1.9. *Si $x \xrightarrow{v} \xi$, et x est unipotente, alors ξ est unipotente.*

En effet, x est unipotente si et seulement si le déterminant de $x - T \cdot I$ est égal à $(T-1)^n$, ce qui est une condition algébrique pour x , à coefficients dans l'anneau $\mathfrak{o}$.

Il en résulte en particulier :

Corollaire 1.10. *Soit G un groupe algébrique, défini sur k , formé de matrices unipotentes. Alors $G^{(\kappa)}$ est formé de matrices unipotentes.*

Proposition 1.11. *Soit G un groupe algébrique nilpotent connexe défini sur k . Alors G est le produit direct de G_s et G_u : $G = G_s \times G_u^{(11)}$, et*

8) [1], Lemma 4.3.

9) [1], (4.1).

10) Pour tout groupe algébrique G , on note G_0 la composante connexe de l'élément neutre.

11) [1], Théorème 11.1.

G_s, G_u sont définis sur $k^{(12)}$. Supposons que $G^{(K)}$ est connexe et $(G_s)^{(K)}$ est formé de matrices semi-simples. Alors $(G_s)^{(K)} = (G^{(K)})_s$, $(G_u)^{(K)} = (G^{(K)})_u$, et on a $G^{(K)} = (G_s)^{(K)} \times (G_u)^{(K)}$.

En effet, par hypothèse, on a $(G_s)^{(K)} \subseteq (G^{(K)})_s$, et on voit que $(G_u)^{(K)} \subseteq (G^{(K)})_u$ d'après Corollaire 1.10. Comme $G^{(K)}$ est nilpotent connexe, on a $G^{(K)} = (G^{(K)})_s \times (G^{(K)})_u$, d'où $\dim G = \dim G^{(K)} = \dim G_s + \dim G_u = \dim (G_s)^{(K)} + \dim (G_u)^{(K)} = \dim (G^{(K)})_s + \dim (G^{(K)})_u$, ce qui montre l'assertion par les inclusions ci-dessus.

Proposition 1.12. Soient G un groupe algébrique résoluble connexe défini sur k , Q un tore maximal de G défini sur k . Alors G est le produit semi-direct de Q par $G_u : G = Q \cdot G_u^{(13)}$. Supposons que $G^{(K)}$ est connexe et $Q^{(K)}$ est un tore de $G^{(K)}$. Alors $(G_u)^{(K)} = (G^{(K)})_u$ et $G^{(K)}$ est le produit semi-direct du tore maximal $Q^{(K)}$ par $(G_u)^{(K)} : G^{(K)} = Q^{(K)} \cdot (G_u)^{(K)}$.

En effet, comme G_u est invariant dans G , $(G_u)^{(K)}$ est invariant dans $G^{(K)}$ d'après Corollaire 1.5. Il en résulte que $Q^{(K)} \cdot (G_u)^{(K)}$ est un sous-groupe algébrique de $G^{(K)}$. Par hypothèse sur Q , on voit tout de suite que $Q^{(K)} \cap (G_u)^{(K)} = \{I^{(K)}\}^{(14)}$, d'où $\dim Q^{(K)} \cdot (G_u)^{(K)} = \dim Q^{(K)} + \dim (G_u)^{(K)} = \dim Q + \dim G_u = \dim G = \dim G^{(K)}$. On a donc $G^{(K)} = Q^{(K)} \cdot (G_u)^{(K)}$, ce qui montre que $Q^{(K)}$ est un tore maximal de $G^{(K)}$. D'autre part, comme $G^{(K)}$ est résoluble d'après Corollaire 1.8, on a $G^{(K)} = Q^{(K)} \cdot (G^{(K)})_u$ (semi-direct), d'où s'ensuit notre assertion.

Nous allons donner maintenant quelques exemples qui montreront que les réciproques des propositions précédentes ne sont pas toujours vraies. Dans ce qui suit k désignera le corps des rationnels ayant la valuation par rapport à un nombre premier p . Le corps κ est donc un corps à p éléments.

I. Soit G le groupe orthogonal spécial par rapport à la forme quadratique $X^2 + Y^2$. On a donc

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \in GL(2, \Omega), \quad x, y \in \Omega, \quad x^2 + y^2 = 1 \right\}.$$

C'est un groupe algébrique commutatif connexe de dimension 1 défini sur k . De plus, il est diagonalisable, c'est-à-dire un tore. Supposons $p=2$. Alors tout élément de $G^{(K)}$ étant de la forme

$$\begin{pmatrix} \xi & \eta \\ \eta & \xi \end{pmatrix} \text{ avec } \xi^2 + \eta^2 = 1,$$

12) [1], (11.3).

13) [1], Théorème 12.2.

14) $I^{(K)}$ désigne l'identité de $GL(n, \Omega_K)$.

le polyôme caractéristique en est de la forme $(T + \xi)^2 + \eta^2 = (T + 1)^2$, ce qui montre que $G^{(\kappa)}$ est formé seulement des matrices unipotentes, et par conséquent il n'est pas un tore. (c.f. Corollaires 1.10)

II. Soit p un nombre premier quelconque. Désignons par $t(x, y)$ la matrice

$$\begin{pmatrix} 1+px & x & y \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Posons $G = \{t(x, y), x, y \in \Omega, 1+px \neq 0\}$. On voit tout de suite que $t(x, y) \cdot t(u, v) = t(x+u+pxu, y+v+pxv)$, $t(x, y)^{-1} = t(-x(1+px)^{-1}, -y(1+px)^{-1})$. Il en résulte que G est un groupe algébrique résoluble connexe de dimension 2 défini sur k . Il est clair que $G^{(\kappa)}$ est commutatif connexe et formé de matrices unipotentes. Nous allons montrer que G n'est pas nilpotent. (c.f. Corollaire 1.3, Corollaire 1.8 et Corollaire 1.10) On voit immédiatement que $G_u = \{t(0, y), y \in \Omega\}$. Puisque le polynôme minimal de $t(x, y)$ pour $x \neq 0$ est $(T - px - 1)(T - 1)$, il s'ensuit que tous les éléments $t(x, y)$, $x \neq 0$ sont semi-simples. En particulier, $t(1, 0)$ est semi-simple. De la relation $t(1, 0) \cdot t(0, 1) = t(1, p+1) \neq t(0, 1) \cdot t(1, 0) = t(1, 1)$, on peut conclure que G n'est pas nilpotent¹⁵⁾. De plus, $Q = \{t(x, 0), x \in \Omega, 1+px \neq 0\}$ est un tore maximal de G , et $G = Q \cdot G_u$ (semi-direct).

III. Soit G le groupe orthogonal spécial par rapport à la forme quadratique $X^2 + Y^2 + 2Z^2$. C'est un groupe algébrique connexe de dimension 3 défini sur k . On sait que G est simple comme un groupe algébrique¹⁵⁾. On voit facilement que $x = (x_{ij}) \in G$ si et seulement si $x_{1j}^2 + x_{2j}^2 + 2x_{3j}^2 = 1$ ($j = 1, 2$), $x_{13}^2 + x_{23}^2 + 2x_{33}^2 = 2$, $x_{1i}x_{1j} + x_{2i}x_{2j} + 2x_{3i}x_{3j} = 0$, $(i, j) = (2, 1), (3, 1), (3, 2)$ et $\det x = 1$. Supposons $p = 2$. Il en résulte que tout élément de $G^{(\kappa)}$ est de la forme

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_{11} & \xi_{11} + 1 & 0 \\ \xi_{11} + 1 & \xi_{11} & 0 \\ \xi_{31} & \xi_{32} & 1 \end{pmatrix},$$

et on voit tout de suite que $G^{(\kappa)}$ est formé de matrices de cette forme. Maintenant il est facile de voir que tous les éléments de $G^{(\kappa)}$ ont la valeur propre 1, d'où s'ensuit que $G^{(\kappa)}$ est nilpotent¹⁶⁾ (c.f. Corollaire 1.8).

15) [3], Ch. IV, §§ 6-7.

16) [1], Théorème 19.4.

§ 2. Réduction des groupes algébriques par rapport à un nombre infini des valuations du corps de définition.

Soit k un corps ayant un ensemble infini des valuations discrète $\{w_\lambda\}$. Nous désignons par $\mathfrak{o}_\lambda$, $\mathfrak{p}_\lambda$ et κ_λ l'anneau de la valuation, l'idéal de la valuation et le corps résiduel de w_λ , pour chaque λ . Supposons que k , κ_λ sont parfaits. De plus, on suppose que l'ensemble $\{w_\lambda\}$ suffit à la condition (I) dans le mémoire de G. Shimura, c'est-à-dire que tout élément non nul de k est $\mathfrak{p}_\lambda$ -unité pour presque tous les λ ¹⁷⁾. On notera $\Omega_{\kappa_\lambda} = \Omega_\lambda$ et $G^{(\kappa_\lambda)} = G^{(\lambda)}$ pour un groupe algébrique G défini sur k . Nous utiliserons souvent le fait que si G est connexe défini sur k , alors $G^{(\lambda)}$ est aussi connexe pour presque tous les λ ¹⁷⁾.

D'abord nous allons chercher la relation entre un groupe algébrique et son algèbre de Lie dans le procédé de la réduction par rapport à un nombre infini des valuations.

Théorème 2.1. Soient $G(\subseteq GL(n, \Omega))$ un groupe algébrique défini sur k , $\mathfrak{g}(\subseteq M(n, \Omega))$ l'algèbre de Lie de G ¹⁸⁾. Soit $\{X_1, \dots, X_r\}$, $r = \dim G = \dim \mathfrak{g}$, une base de $\mathfrak{g}$ telle que $X_i \in M(n, k)$, $1 \leq i \leq r$. Pour presque tous les λ , on a $X_i \in M(n, \mathfrak{o}_\lambda)$ ¹⁹⁾, $1 \leq i \leq r$, et $X_i^{(\lambda)}$ ²⁰⁾ sont linéairement indépendants sur Ω_λ . Désignons par $\mathfrak{g}^{(\lambda)}$ l'espace vectoriel engendré par $X_i^{(\lambda)}$ à coefficients dans Ω_λ . Alors $\mathfrak{g}^{(\lambda)}$ est l'algèbre de Lie de $G^{(\lambda)}$ pour presque tous les λ .

Démonstration. Soit $\mathfrak{A}$ l'idéal associé à G :

$$\mathfrak{A} = \{F(Y) \in \Omega[Y], \quad Y = (Y_{ij}), \quad F(x) = 0 \quad \text{pour tout } x \in G\}.$$

Comme G est défini sur k , on peut trouver une base $F_\nu(Y)$ ($1 \leq \nu \leq t$) de $\mathfrak{A}$ telle que $F_\nu(Y) \in k[Y]$. Pour presque tous les λ , on a $F_\nu(Y) \in \mathfrak{o}_\lambda[Y]$. Par définition de l'algèbre de Lie de G , on a

$$\mathfrak{g} = \left\{ X = (X_{ij}) \in M(n, \Omega); \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial F_\nu}{\partial X_{ij}} \right)_I X_{ij} = 0, \quad 1 \leq \nu \leq t \right\}.$$

Posons $\mathfrak{A}_\lambda = \{F(Y) \in \mathfrak{o}_\lambda[Y], \quad F(x) = 0 \quad \text{pour tout } x \in G\}$.

Alors on sait que

$$G^{(\lambda)} = \{\xi_\lambda \in GL(n, \Omega_\lambda), \quad F^{(\lambda)}(\xi_\lambda) = 0 \quad \text{pour tout } F(Y) \in \mathfrak{A}_\lambda\}^{21)},$$

17) [7], § 6 Théorème 26.

18) [2], Ch. II, § 8.

19) $M(n, \mathfrak{o}_\lambda)$ note la totalité des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans l'anneau $\mathfrak{o}_\lambda$.

20) Pour toute matrice $X = (x_{ij}) \in M(n, \mathfrak{o}_\lambda)$, on posera $X^{(\lambda)} = (x_{ij}^{(\lambda)})$, $x_{ij}^{(\lambda)}$ étant la classe de x_{ij} modulo $\mathfrak{p}_\lambda$.

21) [7], § 3, Théorème 7.

où $F^{(\lambda)}(Y)$ désigne la classe de $F(Y)$ modulo $\mathfrak{p}_\lambda$. Soit maintenant $\mathfrak{B}^{(\lambda)}$ l'idéal associé à $G^{(\lambda)}$. Il est clair que $F_\nu^{(\lambda)}(Y) \in \mathfrak{B}^{(\lambda)}$ pour presque tous les λ . Notons $\mathfrak{g}_1^{(\lambda)}$ l'algèbre de Lie de $G^{(\lambda)}$:

$$\mathfrak{g}_1^{(\lambda)} = \left\{ X_\lambda \in M(n, \Omega_\lambda) ; \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial F_\lambda}{\partial Y_{ij}} \right)_{I^{(\lambda)}} X_{\lambda;i,j} = 0 \quad \text{pour tout } F_\lambda(Y) \in \mathfrak{B}^{(\lambda)} \right\}.$$

Si l'on pose

$$\mathfrak{g}_2^{(\lambda)} = \left\{ X_\lambda \in M(n, \Omega_\lambda) ; \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial F_\nu^{(\lambda)}}{\partial Y_{ij}} \right)_{I^{(\lambda)}} X_{\lambda;i,j} = 0, \quad 1 \leq \nu \leq t \right\},$$

il résulte que $\mathfrak{g}_1^{(\lambda)} \subseteq \mathfrak{g}_2^{(\lambda)}$ et que $\dim \mathfrak{g}_2^{(\lambda)} = r$ pour presque tous les λ , car

$$\text{rang} \left\| \left(\frac{\partial F_\nu^{(\lambda)}}{\partial Y_{ij}} \right)_{I^{(\lambda)}} \right\| = \text{rang} \left\| \left(\frac{\partial F_\nu}{\partial Y_{ij}} \right)_I \right\| = n - r$$

pour presque tous les λ . Comme $\dim \mathfrak{g}_1^{(\lambda)} = \dim G^{(\lambda)} = r$, on a $\mathfrak{g}_1^{(\lambda)} = \mathfrak{g}_2^{(\lambda)}$ pour presque tous les λ . Maintenant on voit immédiatement que $X_i^{(\lambda)} \in \mathfrak{g}_2^{(\lambda)}$ pour presque tous les λ , d'où $\mathfrak{g}^{(\lambda)} \subseteq \mathfrak{g}_1^{(\lambda)}$. Puisque $\dim \mathfrak{g}^{(\lambda)} = r = \dim \mathfrak{g}_1^{(\lambda)}$, il en résulte notre assertion.

Proposition 2.2.*) Soit G un groupe algébrique connexe défini sur k , et soient $F_\nu \in k[Y]$ ($1 \leq \nu \leq t$) des générateurs de l'idéal associé à G . Alors $G^{(\lambda)}$ est une composante connexe de l'ensemble algébrique défini par le système d'équations $F_\nu^{(\lambda)}(\xi) = 0$ pour presque tous les λ .

Cela résulte de l'égalité des rangs dans la démonstration du Théorème 2.1 et du critère de simplicité de Zariski**).

Corollaire 2.3. Soient G, H des groupes algébriques connexes définis sur k . On a $\dim(G \cap H) = \dim(G^{(\lambda)} \cap H^{(\lambda)})$ pour presque tous les λ .

En effet, en vertu de la Proposition 2.2, pour presque tous les λ , la composante connexe de $G^{(\lambda)} \cap H^{(\lambda)}$ contenant $I^{(\lambda)}$ est contenue dans la composante connexe de $(G \cap H)^{(\lambda)}$, et comme $(G \cap H)^{(\lambda)}$ est contenu dans $G^{(\lambda)} \cap H^{(\lambda)}$, ces deux composantes connexes sont égales, c.q.f.d.

Nous allons maintenant continuer de suivre le cours du mémoire de Borel et examiner la réduction des groupes algébriques par rapport à un nombre infini des valuations de k .

Proposition 2.4. Soit G un tore défini sur k . Alors $G^{(\lambda)}$ est un tore pour presque tous les λ .

* Cette Proposition et le Corollaire suivant m'ont été communiqués per J. Dieudonné.

** p. ex. voir P. Samuel, Méthodes d'algèbre abstraite en géométrie algébrique, Erg. Math. Berlin, 1955, II. § 4 p. 74.

D'après Corollaire 1.3, il suffit de remarquer que tout élément de $G^{(\lambda)}$ est semi-simple pour presque tous les λ . Comme G est défini sur k , il existe $s \in GL(n, \bar{k})$ tel que $sGs^{-1} \subseteq D(n)$. Soit k' un sur-corps de k de degré fini tel que $s \in GL(n, k')$. Les prolongations de $\mathfrak{o}_\lambda$ (resp. $\mathfrak{p}_\lambda$) dans k' seront désignées par $\mathfrak{o}'_{\lambda'}$ (resp. $\mathfrak{p}'_{\lambda'}$). Alors il résulte que $s, s^{-1} \in M(n, \mathfrak{o}'_{\lambda'})$ pour presque tous les λ' . Pour tout $\xi \in G^{(\lambda)} = G^{(\lambda')^{21)}$, il existe $x \in G$ tel que $x \xrightarrow{\mathfrak{o}'_{\lambda'}} \xi$, et il s'ensuit que tous les composants de la matrice sxs^{-1} sont contenus dans l'anneau de la spécialisation : $x \xrightarrow{\mathfrak{o}'_{\lambda'}} \xi$, d'où $\sigma\xi\sigma^{-1} \in D(n)^{(\lambda)}$, σ étant la classe de s modulo $\mathfrak{p}'_{\lambda'}$, c.q.f.d.

Proposition 2.5. *Soit G un groupe algébrique nilpotent connexe défini sur k . Alors $G = G_s \times G_u$ et on a $(G_s)^{(\lambda)} = (G^{(\lambda)})_s$, $(G_u)^{(\lambda)} = (G^{(\lambda)})_u$, $G^{(\lambda)} = (G_s)^{(\lambda)} \times (G_u)^{(\lambda)}$ pour presque tous les λ .*

Cela résulte de la Proposition 1.11 et de la Proposition 2.4.

Proposition 2.6. *Soient G un groupe algébrique résoluble connexe défini sur k , Q un tore maximal de G défini sur k . Alors $G = Q \cdot G_u$ (semi-direct), et on a $(G_u)^{(\lambda)} = (G^{(\lambda)})_u$, $G^{(\lambda)} = Q^{(\lambda)}$ (semi-direct) pour presque tous les λ , et $Q^{(\lambda)}$ est un tore maximal de $G^{(\lambda)}$ pour presque tous les λ .*

Cela résulte de la Proposition 1.12 et de la Proposition 2.4.

Pour démontrer la Proposition 2.10 sur des sous-groupes résolubles connexes maximaux de G , il nous faut quelques lemmes sur la variété des drapeaux. Rappelons la définition de la variété des drapeaux²²⁾. On appelle drapeau dans un espace vectoriel V à n dimensions le système formé par n sous-espaces emboîtés E_i :

$$E_1 \subset E_2 \subset \dots \subset E_{n-1} \subset E_n = V, \quad \dim E_i = i \quad (1 \leq i \leq n).$$

Une base d'un drapeau (E_i) est une base (e_i) de V telle que $e_1, \dots, e_i$ sous-tendent E_i , $1 \leq i \leq n$. L'ensemble des drapeaux de Ω^n s'identifie à une variété projective non singulière, de dimension $n(n-1)/2$, définie sur le corps premier, que nous appelons *la variété des drapeaux* de Ω^n et désignons par $F(n)$. Pour $F = (E_i) \in F(n)$, $x \in GL(n, \Omega)$, posons $xF = (xE_i)$. Alors il est clair que $F(n)$ est un espace de transformations pour $GL(n, \Omega)$ et que $GL(n, \Omega)$ y est transitif. Soit F_0 le drapeau ayant les vecteurs coordonnées de Ω^n comme base, F un drapeau et $g \in GL(n, \Omega)$ tel que $F = gF_0$. Alors $xF = F$ si et seulement si x est représenté par une matrice triangulaire relativement à une base (e_i) de F ou encore si $g^{-1}xg \in T(n)$. Soit K un sur-corps de k . Alors un drapeau F est rationnel sur K si et seulement si on peut trouver une base (e_i) de F

22) [1], (16.1).

formée de vecteurs à coordonnées dans K , donc si l'on peut trouver $g \in GL(n, K)$ tel que $F = gF_0$.

Lemme 2.7. *Soient G un groupe algébrique connexe et R un sous-groupe algébrique résoluble connexe maximal de G . G opère donc sur $F(n)$, et il y possède un point fixe F^{23} . Alors on a $R = \{h \in G; h(F) = F\}_0$, c'est-à-dire R coïncide avec la composante connexe de l'élément neutre du sous-groupe algébrique de G laissant fixe le drapeau F .*

En effet, $h(F) = F$ si et seulement si $h \in gT(n)g^{-1}$, où $F = gF_0$. On a donc $\{h \in g; h(F) = F\} = G \cap gT(n)g^{-1}$. Notre assertion résulte du fait que le groupe $T(n)$ est résoluble.

Lemme 2.8. *Soient G un groupe algébrique connexe défini sur k et R un sous-groupe algébrique résoluble connexe maximal de G défini sur k . Alors il existe un drapeau F rationnel sur $\bar{k}$ tel que F est un point fixe par G et que $W = G(F)$ est une orbite fermée définie sur $\bar{k}$.*

En effet, on sait qu'il existe une orbite fermée W définie sur $\bar{k}^{24}$. On peut trouver $F' \in F(n)$, rationnel sur $\bar{k}$, tel que $W = G(F')$. Soit H' le sous-groupe laissant fixe le drapeau F' . Alors il résulte que H'_0 est résoluble connexe maximal²⁵. Il existe donc un élément, rationnel sur $\bar{k}$, de G tel que $R = xH'_0x^{-1}$ ²⁶. Puisque H'_0 laisse fixe F' , R laisse fixe $F = xF'$, ce dernier drapeau étant rationnel sur $\bar{k}$. On voit tout de suite que $G(F) = G(F') = W$, c.q.f.d.

Soient k' un sur-corps de degré fini de k , et $F = gF_0$ un drapeau rationnel sur k' , $g \in GL(n, k')$. Si l'on désigne par $\mathfrak{o}'_{\lambda'}$ (resp. $\mathfrak{p}'_{\lambda'}$) les prolongations de $\mathfrak{o}_{\lambda}$ (resp. $\mathfrak{p}_{\lambda}$) dans k' , alors on a $g, g^{-1} \in M(n, \mathfrak{o}'_{\lambda'})$ pour presque tous les λ' . Pour ces λ' , on a donc $g^{(\lambda')} \in GL(n, \kappa'_{\lambda'})$, où $\kappa'_{\lambda'}$ désigne le corps résiduel $\mathfrak{o}'_{\lambda'}/\mathfrak{p}'_{\lambda'}$. Le corps $\kappa'_{\lambda'}$ peut être considéré comme un sous-corps de Ω_{λ} contenant κ_{λ} . Soit $F_0^{(\lambda)}$ le drapeau ayant les vecteurs coordonnées de Ω_{λ}^n . On peut donc définir un drapeau $F^{(\lambda')} \in F(n)^{(\lambda)}$ ²⁷ par $F^{(\lambda')} = g^{(\lambda')}F_0^{(\lambda)}$ pour presque tous les λ' . On appelle $F^{(\lambda')}$ le drapeau obtenu de F par la réduction modulo $\mathfrak{p}'_{\lambda'}$.

Lemme 2.9. *Soient G un groupe algébrique connexe défini sur k , F un drapeau rationnel sur un sur-corps k' de k de degré fini, et H le sous-groupe de G laissant fixe le drapeau F . Alors H est défini sur k' et on*

23) [1], Proposition 15.5.

24) [1], Proposition 15.4, (15.6).

25) Voir la démonstration de Théorème 16.5 dans [1].

26) [1] Théorème 16.5, Proposition 16.10.

27) On note $F(n)^{(\lambda)}$ la variété des drapeaux de Ω_{λ}^n .

$a \ H^{(\lambda')} \subseteq \{h^{(\lambda')} \in G^{(\lambda')}; h^{(\lambda')}(F^{(\lambda')}) = F^{(\lambda')}\}$ et les dimensions des deux membres sont égaux pour presque tous les λ' .

En effet, d'après Lemme 2.7, on a $H = G \cap gT(n)g^{-1}$, $F = gF_0$, d'où s'ensuit que H est défini sur k' . On voit tout de suite que

$$\begin{aligned} H^{(\lambda')} &\subseteq G^{(\lambda')} \cap (gT(n)g^{-1})^{(\lambda')} = G^{(\lambda')} \cap g^{(\lambda')}T(n)^{(\lambda')}g^{(\lambda')^{-1}} \\ &= \{h^{(\lambda')} \in G^{(\lambda')}; h^{(\lambda')}(F^{(\lambda')}) = F^{(\lambda')}\} \end{aligned}$$

pour presque tous les λ' . L'égalité des dimensions résulte du Corollaire 2.3, c.q.f.d.

La proposition suivante est fondamentale dans ce travail, et presque toutes les propositions ultérieures se basent sur cette proposition.

Proposition 2.10. *Soit G un groupe algébrique connexe défini sur k , et R un sous-groupe algébrique résoluble connexe maximal de G , défini sur k . Alors $R^{(\lambda)}$ est un sous-groupe résoluble connexe maximal de $G^{(\lambda)}$ pour presque tous les λ .*

Démonstration. D'après Lemme 2.8, il existe un drapeau F rationnel sur $\bar{k}$ tel que F est un point fixe par G et que $W = G(F)$ est une orbite fermée définie sur $\bar{k}$. Soit k' un sur-corps de k de degré fini sur laquelle F est rationnel et W est définie. Il résulte du Lemme 2.7 que

$$R = \{h \in G; h(F) = F\}_0.$$

D'après Lemme 2.9, on voit donc que

$$R^{(\lambda')} = \{h^{(\lambda')} \in G^{(\lambda')}; h^{(\lambda')}(F^{(\lambda')}) = F^{(\lambda')}\}_0$$

pour presque tous les λ' . Soit τ l'application rationnelle partout définie : $(g, F) \rightarrow g(F)$ de $G \times F$ sur W . Puisque G, F, W, τ sont définis sur k' , il en résulte que l'application $\tau^{(\lambda')}$ de $G^{(\lambda')} \times F^{(\lambda')}$ dans $W^{(\lambda')}$ est surjective et partout définie pour presque tous les λ' , où $\tau^{(\lambda')}$, $W^{(\lambda')}$ désignent les objets obtenus de τ, W par la réduction modulo $\mathfrak{p}_{\lambda'}$, au sens de G. Shimura²⁸⁾. Comme W est projective, $W^{(\lambda')} = G^{(\lambda')}(F^{(\lambda')})$ est aussi projective. Pour tel λ' , soit $S_{\lambda'}$ un sous-groupe algébrique résoluble connexe contenant $R^{(\lambda')}$, ce dernier groupe étant résoluble d'après Corollaire 1.8. L'application $g^{(\lambda')} \rightarrow g^{(\lambda')}(F^{(\lambda')})$ de $G^{(\lambda')}$ sur $W^{(\lambda')}$ passe au quotient par

28) Cela résulte de la proposition suivante : "Soient V, W des variétés algébriques (abstraites), f une application rationnelle partout définie de V sur W . Supposons que V, W, f sont définis sur k . Soient $V^{(\lambda)}, W^{(\lambda)}, f^{(\lambda)}$ les objets obtenus de V, W, f par la réduction modulo $\mathfrak{p}_{\lambda}$. Alors l'application $f^{(\lambda)}$ de $V^{(\lambda)}$ dans $W^{(\lambda)}$ est surjective et partout définie pour presque tous les λ ". La démonstration de cette proposition sera donnée dans un mémoire (pas encore publié) de G. Shimura-Y. Taniyama sur la théorie de la multiplication complexe.

$R^{(\lambda')}$ et induit une application rationnelle, partout définie de $G^{(\lambda')}/R^{(\lambda')}$ sur $W^{(\lambda')}$. Il est clair que l'image réciproque de chaque point se compose de m points, où m désigne l'indice de $R^{(\lambda')}$ dans le groupe $\{h^{(\lambda')} \in G^{(\lambda')}; h^{(\lambda')}(F^{(\lambda')}) = F^{(\lambda')}\}$. Comme $G^{(\lambda')}/R^{(\lambda')}$ est non singulière, on voit que $G^{(\lambda')}/R^{(\lambda')}$ est une variété projective²⁹⁾. Maintenant $S_{\lambda'}$ opère sur $G^{(\lambda')}/R^{(\lambda')}$ par les translations à gauche et y possède un point fixe²⁸⁾, donc il est conjugué à un sous-groupe de $R^{(\lambda')}$. On a donc $S_{\lambda'} = R^{(\lambda')} = R^{(\lambda)}$, car R est défini sur k , ce qui montre notre assertion.

Proposition 2.11. *Soient G un groupe algébrique connexe défini sur k . Si $G^{(\lambda)}$ est résoluble pour presque tous les λ , alors G est résoluble.*

En effet, on sait qu'il existe un sous-groupe R résoluble connexe maximal de G défini sur $\bar{k}^{30)}$. Soit k' un sur-corps de k de degré fini, sur lequel R est défini. Alors $R^{(\lambda')}$ est résoluble connexe maximal dans $G^{(\lambda')}$ pour presque tous les λ' d'après la Proposition 2.10. On a donc $R^{(\lambda')} = G^{(\lambda')}$ pour presque tous les λ' , d'où $R = G$, c.q.f.d.

Théorème 2.12. *Soit G un groupe algébrique connexe défini sur k . Alors G est résoluble si et seulement si $G^{(\lambda)}$ est résoluble pour presque tous les λ .*

Cela résulte du Corollaire 1.8 et de la Proposition 2.11.

Proposition 2.13. *Soient G un groupe algébrique connexe défini sur k , et R un sous-groupe algébrique connexe de G défini sur k . Si $R^{(\lambda)}$ est un sous-groupe résoluble connexe maximal de $G^{(\lambda)}$ pour presque tous les λ , alors R est un sous-groupe résoluble connexe maximal de G .*

D'après Proposition 2.11, R est résoluble. Soit S un sous-groupe résoluble connexe de G contenant R . On peut supposer que S est défini sur $\bar{k}$. Soit k' un sur-corps de degré fini de k sur lequel S est rationnel. Alors $S^{(\lambda')}$ est un sous-groupe résoluble connexe de $G^{(\lambda')}$ contenant $R^{(\lambda')}$ pour presque tous les λ' , on a donc $S^{(\lambda')} = R^{(\lambda')}$ pour presque les λ' , d'où $S = R$, c.q.f.d.

Théorème 2.14. *Soient G un groupe algébrique connexe défini sur k , et R un sous-groupe algébrique connexe de G , défini sur k . Alors R est un sous-groupe résoluble connexe maximal de G si et seulement si $R^{(\lambda)}$ est un sous-groupe résoluble connexe maximal de $G^{(\lambda)}$ pour presque tous les λ .*

Cela résulte de la Proposition 2.10 et de la Proposition 2.14.

29) [1], Lemme 14.1.

30) [1], Lemme 16.9.

Proposition 2.15. *Soient G un groupe algébrique connexe défini sur k , et Q un tore maximal de G défini sur k . Alors $Q^{(\lambda)}$ est un tore maximal de $G^{(\lambda)}$ pour presque tous les λ .*

En effet, soit R un sous-groupe algébrique résoluble connexe maximal de G le contenant, défini sur un sur-corps k' de k de degré fini. Alors $Q^{(\lambda)} = Q^{(\lambda')}$ est un tore maximal de $R^{(\lambda')}$ pour presque tous les λ' d'après Proposition 2.6. Puisque $R^{(\lambda')}$ est un sous-groupe résoluble connexe maximal de $G^{(\lambda')}$ pour presque tous les λ' d'après Proposition 2.10, $Q^{(\lambda)}$ est un tore maximal de $G^{(\lambda)}$ pour presque tous les $\lambda^{31)}$, c.q.f.d.

A partir de maintenant, le corps k sera toujours supposé être de caractéristique 0, parce que nous nous servirons des résultats dûs à C. Chevalley sur la correspondance entre groupes et algèbres de Lie.

Proposition 2.16. *Soit G un groupe algébrique connexe défini sur k . Si $G^{(\lambda)}$ est commutatif pour presque tous les λ , alors G est commutatif.*

Supposons que G n'est pas commutatif. Alors l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G n'est pas commutatif³²⁾. Alors il existe $X, Y \in \mathfrak{g} \cap M(n, k)$ tels que $[X, Y] \neq 0$. On a donc $X, Y \in M(n, \mathfrak{o}_\lambda)$ et $[X^{(\lambda)}, Y^{(\lambda)}] = [X, Y]^{(\lambda)} \neq 0$ pour presque tous les λ . Comme $\mathfrak{g}^{(\lambda)}$ est l'algèbre de Lie de $G^{(\lambda)}$ pour presque tous les λ d'après Théorème 2.1, il résulte que $\mathfrak{g}^{(\lambda)}$ est contenu dans l'algèbre enveloppante de $G^{(\lambda)}$ ³³⁾, ce qui montre que $G^{(\lambda)}$ n'est pas commutatif pour presque tous les λ , c.q.f.d.

Théorème 2.17. *Soit G un groupe algébrique connexe défini sur k . Alors G est commutatif si et seulement si $G^{(\lambda)}$ est commutatif pour presque tous les λ .*

Cela résulte du Corollaire 1.3 et de la Proposition 2.16.

Proposition 2.18. *Soit G un groupe algébrique connexe défini sur k . Si $G^{(\lambda)}$ est un tore pour presque tous les λ , alors G est un tore.*

D'après Proposition 2.16, G est commutatif. On a donc $G = G_s \times G_u$, et $G^{(\lambda)} = (G_s)^{(\lambda)} \times (G_u)^{(\lambda)}$, $(G_s)^{(\lambda)}$ étant un tore pour presque tous les λ en vertu de la Proposition 2.5. Comme $(G_u)^{(\lambda)} = \{I^{(\lambda)}\}$ pour presque tous les λ , on a $G_u = \{I\}$, d'où $G = G_s$ est un tore.

Théorème 2.19. *Soit G un groupe algébrique connexe défini sur k .*

31) [1], Corollaire 16.6.

32) [3], Ch. III, § 8 Proposition 12, Corollaire 2.

33) [2], Ch. II, § 8 Proposition 6.

Alors G est un tore si et seulement si $G^{(\lambda)}$ est un tore pour presque tous les λ .

Cela résulte de la Proposition 2.4 et de la Proposition 2.18.

Proposition 2.20. *Soient G un groupe algébrique connexe défini sur k , et Q un sous-groupe algébrique connexe de G . Si $Q^{(\lambda)}$ est un tore maximal de $G^{(\lambda)}$ pour presque tous les λ , alors Q est un tore maximal de G .*

En effet, d'après Proposition 2.18 Q est un tore. Soit Q_1 un tore de G contenant Q , défini sur k' . Alors $Q_1^{(\lambda')}$ est un tore contenant le tore $Q^{(\lambda')} = Q^{(\lambda)}$ pour presque tous les λ' , d'où $Q_1 = Q$, c.q.f.d.

Théorème 2.21. *Soient G un groupe algébrique connexe défini sur k , et Q un sous-groupe algébrique connexe de G . Alors Q est un tore maximal de G si et seulement si $Q^{(\lambda)}$ est un tore maximal de $G^{(\lambda)}$ pour presque tous les λ .*

Cela résulte de la Proposition 2.15 et de la Proposition 2.20.

Pour démontrer la Proposition 2.24 sur les sous-groupes de Cartan de G , il nous faut deux lemmes suivants.

Lemme 2.22. *Soit K un corps parfait infini. Soient $G(\leq GL(n, K))$ un K -groupe algébrique, et $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G . Désignons par $\nu_{\mathfrak{g}}(x)$ la nullité de $I - \text{Ad} \cdot x$, $x \in G^{34)}$. Alors on a $\dim Z(x_s) \leq \nu_{\mathfrak{g}}(x)$.*

En effet, posons

$$\mathfrak{a} = \{X \in \mathfrak{g}; (I - \text{Ad} \cdot x)^m X = 0, \quad m \text{ étant un certain entier } > 0\}.$$

On sait que $\dim \mathfrak{a} = \nu_{\mathfrak{g}}(x)^{35)}$. Comme $\text{Ad} \cdot$ est une représentation rationnelle du groupe algébrique G , on a $\text{Ad} \cdot x = \text{Ad} \cdot (x_s \cdot x_u) = (\text{Ad} x_s) \cdot (\text{Ad} x_u) = (\text{Ad} \cdot x)_s \cdot (\text{Ad} \cdot x)_u^{36)}$, ce qui montre que la composante semi-simple de $\text{Ad} \cdot x$ est $\text{Ad} \cdot x_s$, d'où $(I - \text{Ad} \cdot x)_s = I - \text{Ad} \cdot x_s$. On a donc

$$\begin{aligned} \mathfrak{a} &= \{X \in \mathfrak{g}; (I - \text{Ad} x)_s \cdot X = 0\} = \{X \in \mathfrak{g}; (I - \text{Ad} x_s) \cdot X = 0\} \\ &= \{X \in \mathfrak{g}; x_s \cdot X = X \cdot x_s\}. \end{aligned}$$

Soit $\mathfrak{z}$ l'algèbre de Lie de $Z(x_s)$. Comme $\mathfrak{z}$ est contenue dans l'algèbre enveloppante de $Z(x_s)^{33)}$, il résulte que $\mathfrak{z} \leq \mathfrak{a}$, d'où

$$\dim Z(x_s) = \dim \mathfrak{z} \leq \dim \mathfrak{a} = \nu_{\mathfrak{g}}(x), \quad \text{c.q.f.d.}$$

34) [3], Ch. VI, § 3.

35) [3], Ch. VI, § 3. Proposition 2.

36) [1] Théorème 9.3, Remarque 9.5.

Remarque. On a l'égalité : $\dim Z(x_s) = \nu_g(x)$ lorsque K est de caractéristique $0^{37)}$.

Lemme 2.23. Soient G un groupe algébrique défini sur k , et g un élément semi-simple de G , rationnel sur k . Alors on a $\dim (Z(g))^{(\lambda)} = \dim Z(g^{(\lambda)})$ pour presque tous les λ , où $g^{(\lambda)}$ désigne la matrice obtenue de g modulo $\mathfrak{p}_\lambda$.

En effet, on voit immédiatement que $Z(g)^{(\lambda)} \subseteq Z(g^{(\lambda)})$. D'après Lemme 2.22, Remarque ci-dessus et Théorème 2.1, on a

$$\nu_g(g) = \dim Z(g) = \dim Z(g)^{(\lambda)} \leq \dim Z(g^{(\lambda)}) \leq \nu_{g^{(\lambda)}}(g^{(\lambda)})$$

pour presque tous les λ . Alors il suffit de remarquer, pour démontrer notre Lemme, que $\nu_g(g) = \nu_{g^{(\lambda)}}(g^{(\lambda)})$ pour presque tous les λ . Mais cela résulte des faits que le polynôme caractéristique de $I^{(\lambda)} - \text{Ad} \cdot g^{(\lambda)}$ est obtenu de celui de $I - \text{Ad} g$ par la réduction modulo $\mathfrak{p}_\lambda$ pour presque tous les λ et que les multiplicités de valeurs propres nulles de ces polynômes sont égaux pour presque tous les λ , c.q.f.d.

Proposition 2.24. Soient G un groupe algébrique connexe défini sur k , et C un sous-groupe de Cartan de G défini sur k . Alors $C^{(\lambda)}$ est un sous-groupe de Cartan de $G^{(\lambda)}$ pour presque tous les λ .

En effet, il existe un tore maximal de G défini sur $\bar{k}$ tel que $C = Z(Q)^{38)}$. Soit g un élément régulier semi-simple rationnel sur $\bar{k}$ tel que $C = Z(Q) = Z(g)$. Soit k' un sur-corps de k de degré fini sur lequel Q est défini et g est rationnel. Désignons par $d^{(\lambda)}$ la dimension de sous-groupe de Cartan de $G^{(\lambda)}$. On a

$$\dim Z(Q) = \dim Z(g) = \dim Z(g^{(\lambda')}) \geq d^{(\lambda)}$$

pour presque tous les λ' d'après Lemme 2.23, et

$$\dim Z(Q) = \dim (Z(Q))^{(\lambda)} \leq \dim Z(Q^{(\lambda')}) = d^{(\lambda)} \quad 38)$$

pour presque tous les λ' d'après Proposition 1.2, Proposition 2.15, d'où

$$\dim Z(Q)^{(\lambda)} = \dim C^{(\lambda)} = d^{(\lambda)}, \quad \text{c.q.f.d.}$$

Proposition 2.25. Soit G un groupe algébrique connexe défini sur k . Si $G^{(\lambda)}$ est nilpotent pour presque tous les λ , alors G est nilpotent.

Soit C un groupe de Cartan de G défini sur k' . Alors $C^{(\lambda')}$ est un

37) [3], Ch. VI, § 4, Proposition 8.

38) [1] Théorème 20.4, Proposition 20.8.

groupe de Cartan de $G^{(\lambda')}$ pour presque tous les λ' d'après Proposition 2.24. On a donc $C^{(\lambda')} = G^{(\lambda)}$ pour presque tous les λ' , d'où $C = G$, c.q.f.d.

Théorème 2.26. *Soit G un groupe algébrique connexe défini sur k . Alors G est nilpotent si et seulement si $G^{(\lambda)}$ est nilpotent pour presque tous les λ .*

Cela résulte du Corollaire 1.8 et de la Proposition 2.25.

Proposition 2.27. *Soit G un groupe algébrique connexe défini sur k . Si $G^{(\lambda)}$ est formé de matrices unipotentes pour presque tous les λ , alors G est formé de matrices unipotentes.*

En effet, on sait que $G^{(\lambda)}$ est nilpotent pour ces $\lambda^{16)}$. Il en résulte que G est nilpotent d'après Proposition 2.25. On a donc $G = G_s \times G_u$, et $G^{(\lambda)} = (G_s)^{(\lambda)} \times (G_u)^{(\lambda)}$, $(G_s)^{(\lambda)}$ étant un tore pour presque tous les λ d'après Proposition 2.5. Comme $(G_s)^{(\lambda)} = \{I^{(\lambda)}\}$ pour presque tous les λ , on a $G_s = \{I\}$, d'où $G = G_u$, c.q.f.d.

Théorème 2.28. *Soit G un groupe algébrique connexe défini sur k . Alors G est formé de matrices unipotentes si et seulement si $G^{(\lambda)}$ est formé de matrices unipotentes pour presque tous les λ .*

Cela résulte du Corollaire 1.10 et de la Proposition 2.27.

Proposition 2.29. *Soient G un groupe algébrique connexe défini sur k , et C un sous-groupe algébrique connexe de G défini sur k . Si $C^{(\lambda)}$ est un sous-groupe de Cartan de $G^{(\lambda)}$ pour presque tous les λ , alors C est un sous-groupe de Cartan de G .*

En effet, comme $C^{(\lambda)}$ est nilpotent pour presque tous les λ , C est nilpotente d'après Proposition 2.25. De plus il est clair que $C^{(\lambda)}$ est nilpotent maximal pour presque tous les λ . Il suffit donc démontrer que $\dim N(C) = \dim C^{39)}$. Mais c'est la conséquence de la relation suivante :

$$\dim C \leq \dim N(C) = \dim (N(C))^{(\lambda)} \leq \dim N(C^{(\lambda)}) = \dim C^{(\lambda)} = \dim C,$$

vu Proposition 1.4, c.q.f.d.

Théorème 2.30. *Soient G un groupe algébrique connexe défini sur k , et C un sous-groupe algébrique connexe de G défini sur k . Alors C est un sous-groupe de Cartan de G si et seulement si $C^{(\lambda)}$ est un sous-groupe de Cartan de $G^{(\lambda)}$ pour presque tous les λ .*

39) [1], (20.2).

Cela résulte de la Proposition 2.24 et de la Proposition 2.29.

(Reçu le 24. Février, 1958)

Bibliographie

- [1] A. Borel: Groupes linéaires algébriques, *Ann. of Math.* **64** (1956), 20–82.
- [2] C. Chevalley: Théorie des groupes de Lie, Tome II: Groupes algébriques, Paris, 1951, Hermann éd.
- [3] —————: Théorie des groupes de Lie, Tome III: Groupes algébriques, Paris, 1954, Hermann éd.
- [4] E. R. Kolchin: Algebraic matrix groups and the Picard-Vessiot theory of homogeneous linear differential equations, *Ann. of Math.* **49** (1948), 1–42; Chapter I.
- [5] —————: On certain concepts in the theory of algebraic matrix groups, *Ibid.*, 774–789.
- [6] T. Ono: Arithmetic of orthogonal groups, *J. Math. Soc. Japan* **7** (1955), 79–91.
- [7] G. Shimura: Reduction of algebraic varieties with respect to a discrete valuation of the basic field, *Amer. J. Math.* **77** (1955), 134–176.
- [8] —————: On complex multiplications, *Proc. Int. Symp. Alg. Number Theory*, Tokyo-Nikko (1955), 23–30.
- [9] A. Weil: Foundations of algebraic geometry, *Amer. Math. Soc. Colloquium Publication*, No. 29, 1946.
- [10] J. Dieudonné: Remarques sur la réduction mod. $\mathfrak{p}$ des groupes linéaires algébriques, *Osaka Math. J.* **10** (1958), 75–82.

