



Title	Anderson localization for random magnetic Schrodinger operators on graphs
Author(s)	野村, 祐司
Citation	大阪大学, 2004, 博士論文
Version Type	
URL	<a href="https://hdl.handle.net/11094/46018">https://hdl.handle.net/11094/46018</a>
rights	
Note	著者からインターネット公開の許諾が得られていないため、論文の要旨のみを公開しています。全文のご利用をご希望の場合は、<a href="https://www.library.osaka-u.ac.jp/thesis/#closed">大阪大学の博士論文について</a>をご参照ください。

*The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA*

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

氏 名 の むら ゆう じ 野 村 祐 司

博士の専攻分野の名称 博 士 (理 学)

学 位 記 番 号 第 19004 号

学 位 授 与 年 月 日 平成 16 年 9 月 22 日

学 位 授 与 の 要 件 学位規則第 4 条第 2 項該当

学 位 論 文 名 Anderson localization for random magnetic Schrödinger operators on graphs  
(グラフ上のランダム磁場シュレーディンガー作用素のアンダーソン局在)

論 文 審 査 委 員 (主査)  
教 授 小 谷 眞一

(副査)  
教 授 松 村 昭 孝 教 授 西 谷 達 雄 教 授 林 仲 夫  
教 授 杉 田 洋

## 論 文 内 容 の 要 旨

### 1. 序論

ランダムなポテンシャルを持つシュレーディンガー作用素については、多くの研究がなされてきた。特に一次元系における精緻な理論（小谷理論）や、アンダーソン局在の理論等が整備されてきた。しかしランダムな磁場を持つシュレーディンガー作用素についての結果は多くはない。主論文①において、正方格子上のランダム磁場シュレーディンガー作用素のスペクトルの両端で、アンダーソン局在が生じることを示した。

グラフ上のシュレーディンガー作用素のスペクトル理論が、グラフの幾何構造との関係等の観点から研究されてきた。主論文②において、正方格子、三角格子、六角格子のライニンググラフ上でランダム磁場シュレーディンガー作用素を考察し、アンダーソン局在と、孤立した多重度無限大の固有値が存在し、対応する固有関数はコンパクトな台を持つことを示した。さらに、その固有値で状態密度関数が不連続となることを示し、その跳びの値を求めた。

### 2. アンダーソン局在

正方格子上の向き付けられた辺の集合から、絶対値 1 の複素数の集合への写像で、逆向きの辺上では符号が変わるものをベクトルポテンシャルと呼ぶ。これを用いて、有界自己共役作用素である離散的磁場シュレーディンガー作用素が定義される。最小のサイクルの上で、ベクトルポテンシャルを正の向きに足し上げた量を磁場と呼ぶ。作用素のスペクトルは磁場のみによることが分かる。この磁場をランダムにしたときに、スペクトルの両端の近傍において、アンダーソン局在が生じる。即ち、稠密な点スペクトルのみを持ち、対応する固有関数は指数関数的に減衰する。証明は multiscale analysis と呼ばれる方法に基づく。これは、大きな領域のグリーン関数を、それに含まれる小さな領域のグリーン関数により展開し、帰納的にその指数関数的減衰の評価を導き出す方法である。その帰納法の第一段階に当たるのが Lifshitz tail という評価であり、帰納法を遂行するうえで必要な命題が Wegner estimate に対応する。Lifshitz tail は状態密度関数のスペクトルの下端での挙動を評価するもので、非常に遅い立ち上がりをするを示す。これは、スペクトルの下端近くのエネギーを持つ状態が、非常に少ないことを主張している。Wegner estimate は、スペクトルの下端近傍の点の近くに固有値が存在する確率を評価するものである。Wegner estimate から、有界

領域に制限した作用素の固有値の分布が、スペクトルの下端近傍において密度関数を持つことが分かる。特に状態密度関数はそこでリプシッツ連続になることが導かれる。

### 3. ライニンググラフ上のランダム磁場シュレーディンガー作用素

正方格子のライニンググラフ上でランダム磁場シュレーディンガー作用素を考えると、正方格子上的作用素のスペクトルと対応するスペクトル領域において、アンダーソン局在が示され、さらにライニンググラフの幾何的構造から、孤立した多重度無限大の固有値が存在することが分かる。この固有空間は、台がコンパクトな固有関数で張られる。またこの固有値において状態密度関数は2分の1だけ跳ぶ。同様なことが三角格子、六角格子のライニンググラフ上の作用素についても成り立ち、状態密度関数の不連続点における跳びの値は、2をグラフの次数で割ったものを1から引いた値になる。

## 論文審査の結果の要旨

物理学者のアンダーソンは不規則媒質中の電子の運動をランダムなポテンシャルを持ったシュレーディンガー方程式でモデル化し、電子の運動が局在することを議論した。以来数学均な立場からの研究も進められてきたが、申請者の本研究はランダムな磁場中の電子の挙動に関するものである。多次元の場合の関連する数学的研究は、フレリッヒ・スペンサーにより、磁場がない場合に、スペクトルの端点で局在がおこる（点スペクトルになる）ことの証明が出発点であった。その方法は状態密度関数の評価、及びそれに基づくマルチスケール解析であった。申請者は磁場が存在すると対象とする作用素が単調性を失うために一般に困難となる状態密度関数の評価を、磁場がある場合にも実行した。これにより、2次元で磁場がある場合にスペクトルの端点でアンダーソン局在が起こることを示した。また申請者はこの結果をライニンググラフとよばれるグラフに対しても考察し、特にこの場合には無限の多重度をもつ孤立した固有値が現れ、状態密度関数はそこで不連続になることも示した。

よって、本論文は博士（理学）の学位論文として十分価値あるものと認める。