Title	The Study of Sigma Functions for Telescopic Curves
Author(s)	綾野, 孝則
Citation	大阪大学, 2013, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://hdl.handle.net/11094/46091
rights	
Note	

【25】

氏　　　　名　綾野孝則（あやの・たか・のり）

博士の専攻分野の名称　博　士（理学）

学 位 記 番 号　第　２５８０６　号

学位授与年月日　平成 25 年 3 月 25 日

学位授与の要件　学位規則第４条第１項該当
理学研究科数学専攻

学 位 論 文 名　The Study of Sigma Functions for Telescopic Curves
（Telescopic 曲線に付随するシグマ関数の研究）

論 文 審 査 委 員　（主査）
教　授　伊吹山　知義
（副査）
教　授　臼井　三平　　教　授　今野　一宏　　教　授　鈴木　　譲
准教授　安田　正大

論 文 内 容 の 要 旨

楕円シグマ関数とは楕円曲線上の正則な微分形式をホモロジー群の標準基底に沿って積分して得られる周期から構成される１変数の正則関数であり、そこからペー関数などの可積分系、整数論などで重要な関数が構成される。楕円シグマ関数の重要な性質として、周期だけ平行移動した点の値は元の点の値に指数項をかけたものと等しいという性質(準周期性)、及び、原点における級数展開の係数が楕円曲線の定義方程式の係数の多項式になるという性質(代数性)がある。特に後者の性質から、楕円シグマ関数はホモロジー群の標準基底の取り方には依存せず、曲線の定義方程式の係数だけから直接構成可能であることが分かる(この性質をモジュラー不変性という)。この性質からシグマ関数は可積分系の代数幾何的な解の研究において重要であることが知られており、近年これの多変数への拡張が盛んに検討されている。Klein は超楕円曲線に対して、さらに Buchstaber, Enolskii, Leykin は(n,s)曲線と呼ばれる平面代数曲線(超楕円曲線を含む)に対してまでシグマ関数を一般化した。(n,s)曲線に付随するシグマ関数の級数展開の代数性を示す方法として、シグマ関数の代数的積分による表示を作る方法、KP-hierarchy のタウ関数による表示を作る方法が中屋敷厚氏により確立されている。本論文では、シグマ関数のさらなる一般化を検討している。一変数代数関数体を与えたとき、それを関数体に持つような非特異代数曲線の定義方程式をその一変数代数関数体から定まる有限個の自然数の組から構成する方法が三浦晋示氏により確立されている。その自然数の個数を m としたとき、定義方程式の個数は m-1 個以上になる。特に、ちょうど m-1 個となるときを telescopic 曲線という。m=2 のときは定義方程式の個数は必ず 1 であり、このときが(n,s)曲線に相当する。即ち、telescopic 曲線は(n,s)曲線を特別な場合として含んでいる。本論文の結果は、telescopic 曲線に対して、準周期性と代数性をもつ多変数正則関数としてシグマ関数を構成したことである。その核となる部分は、telescopic 曲線に対して、正則な微分形式全体のなすベクトル空間の基底、及び、normalized fundamental form と呼ばれる有理型双線形微分を具体的に構成したことである。その帰結として、シグマ関数をテータ関数を用いて定義すると、シグマ関数は準周期的な多変数正則関数であり、その原点における級数展開の係数は定義方程式の係数の多項式となることを示した。特に、telescopic 曲線に付随するシグマ関数もモジュラー不変性を持っていることが分かる。

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

綾野孝則君の論文「The Study of Sigma Functions for Telescopic Curves」は、telescopic とよばれる一般的な曲線に対して sigma 関数の構成方法を提案するものである。sigma 関数は、種数個の変数の整型関数であり、その周期行列(第 1 種・第 2 種微分形式と標準ホモロジー基底から求まる)を用いて定義される。代数関数体の次数 1 の place O でのみ極をもつ関数からなる集合について、$x_1,\cdots,x_m$ をその極位数全体からなるモノイドの生成元 $a_1,\cdots,a_m$ (互いに素とする)を極位数にもつ関数とする。このとき、不定文字 $X_1,\cdots,X_m$ に関する多項式環から $x_1,\cdots,x_m$ で生成される環への準同型について、その kernel のイデアルとしての生成元を、曲線の定義方程式とみなすことができる(三浦)。telescopic 曲線とは、そのうち a_i/d_i が $a_1/d_{i-1},...a_{i-1}/d_{i-1}$ で生成されるモノイドに含まれる(定義方程式を構成する式が m-1 個である)場合に相当する(d_i は $a_1,...a_i$ の最大公約数, $i=2,...m$)。そのために、提出された博士論文は、telescopic 曲線の範囲で、標準コホモロジー基底を導出している。従来は、楕円(Weierstrass)、超楕円(Klein)、近年でも平面曲線($m=2$ の場合)でしか、この問題は解かれていない(Buchstaber, Enolskii, Leykin. Nakayashiki)。提出された博士論文は、telescopic 曲線というより一般的な条件のもとで、定義方程式からシグマ関数を求める方法を提案していて、代数学のみならず、可積分系、代数曲線暗号といった諸分野への応用も期待できる。

以上のように、綾野孝則君の提出した論文は、博士(理学)の学位論文として十分に価値があるものと認めるものである。