The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	On the Links-Grould invariant of knots and links
Author(s)	石井, 敦
Citation	大阪大学, 2006, 博士論文
Version Type	
URL	https://hdl.handle.net/11094/46434
rights	
Note	著者からインターネット公開の許諾が得られていないため、論文の要旨のみを公開しています。全文のご利用をご希望の場合は、大阪大学の博士論文についてをご参照ください。

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

【24】

氏　　名	石　井　　敦（いし い あつし）
博士の専攻分野の名称	博　士（理　学）
学　位　記　番　号	第　１９９９４　号
学位授与年月日	平成 18 年 3 月 24 日
学位授与の要件	学位規則第４条第１項該当 理学研究科数学専攻
学　位　論　文　名	On the Links-Gould invariant of knots and links （結び目と絡み目の Links-Gould 不変量について）
論文審査委員	（主査） 教　授　大鹿　健一 （副査） 教　授　梅原　雅顕　　助教授　作間　　誠　　助教授　大和　健二

論　文　内　容　の　要　旨

本論文は、次の二つの成果を内容の柱とする。

(1)Links-Gould 不変量のスケイン関係式による扱いやすさの改善

(2)Links-Gould 不変量とアレキサンダー多項式との関係の発見

どちらも結び目および絡み目の量子不変量である Links-Gould 不変量に関する結果であり、Links-Gould 不変量の研究において(1)は基礎的な役割を、(2)は発展的な役割をそれぞれ果たしている。

結び目の相違を判定するためだけでなく、結び目の様々な性質を調べるためにも、不変量は結び目理論において重要な役割を果たしている。Links-Gould 不変量は Links と Gould により導入された量子不変量であり、DeWit、Links、Kauffman らの研究により、結び目を判別する能力が高く有用であることがわかっていた。しかしながら、結び目に対しこの不変量を求める際には、交点ごとに 16×16 の大きさの行列を用いて計算しなければならず、扱いづらい不変量であった。

そこで研究成果(1)にあるように、この有用な不変量の扱いやすさの改善を試み、「closed 3-braid」と「algebraic link」という二つの絡み目の類に対して再帰的な計算法を確立した。さらには、新しいスケイン関係式を発見し、それまでに比べ格段に多くの結び目に対し、不変量の値をより簡単なものに帰着させることができるようになった。このスケイン関係式の有用性は、個々の結び目に対する不変量の計算だけでなく、Links-Gould 不変量の様々な性質を明らかにすることにも及んでいる。

扱いやすさの改善とともに実験が進み、Links-Gould 不変量の量子不変量の中での位置づけもわかってきている。それが研究成果(2)である。研究成果(2)のアレキサンダー多項式との関係は、Links-Gould 不変量とアレキサンダー多項式の間の関係式（公式）を指すとともに、これらの不変量のいくつかの性質における類似をも意味している。本論文では、公式の証明に加え、いくつかの性質において類似があることを観察し、対応する性質の証明を与えた。

この類似は「量子不変量に幾何的意味づけを与える」という大問題に対し、Links-Gould 不変量の研究が問題解決の糸口になることを示唆している。リー環とその表現を固定するごとに得られる量子不変量の中で、Links-Gould 不

変量に着目する理由がここにある。

本論文では、アレキサンダー多項式との関係を示し、Links-Gould 不変量を通した量子不変量の幾何的意味づけへの一つのアプローチを与えた。特に、新しいスケイン関係式の発見による Links-Gould 不変量の扱いやすさの改善は、このアプローチにおける第一歩である。

論文審査の結果の要旨

石井君の研究テーマは結び目の量子不変量、特に Links-Gould 不変量である。一般に量子不変量とは、量子化されたリー代数の表現を用いて構成される不変量を指す。ジョーンズ多項式、ホンフリー多項式、カウフマン多項式は、それぞれ sl(2)、sl(n)、su(n)の量子化、即ち Uq(sl(2))、Uq(sl(n))、Uq(su(n))、の表現を通して構成される。

石井君の研究対象である Links-Gould 不変量はスーパーリー環 gl(2, 1)の量子化 Uq(sl(2, 1))の表現を用いて構成される。リー積がひねられている分、スーパーリー環の取り扱いは通常のリー環に比べて複雑になり、Links-Gould 不変量の定義に従った計算は、結び目ダイアグラムの各交差点に 16 次の正方行列（R-matrix）を対応させてからスタートする。そのため計算は非常に煩雑になり、Links-Gould 不変量は定義されたものの殆ど計算されていなかった。この状況のもと、石井君は次の目覚ましい業績を挙げた。

(1)新しいスケイン関係式を発見し、代数結び目を含む多くの結び目の不変量が再帰的に計算できることを証明した。更に、２橋結び目、金信結び目の LG 多項式の公式を与えた。

(2)古典的不変量である Alexander 多項式は Uq(gl(1, 1))の表現を通して構成出来る事が知られていたため、LG 多項式は Alexander 多項式と同じ系列の不変量のであるといえる。そのため Alexander 多項式との関係があるのではという自然な期待が生じるが、そのような関係式はいままで知られておらず、Links に至ってはそのような期待には否定的な感触を持っていた。その中で、石井君は Alexander 多項式 $\Delta(t)$ と LG 不変量 $LG(t_1, t_2)$ との間に次の等式が成立することを証明した。

$$\Delta(t^2)=LG(t, -t^{-1}).$$

その証明から R-matrix の力ずくの計算が出来ないことが結果的に見て取れるが、それでもなおかつこのような関係式が成り立つことを証明した石井君の独創性と粘りは称賛に値する。また幾何学的な意味が深く理解されている Alexander 多項式と LG 不変量の間の関係式の発見は、一般の量子不変量の幾何的意味を解明するうえでも、非常に喜ばしい成果である。

よって、本論文は博士（理学）の学位論文として十分価値あるものと認める。