

Title	Explicit formulas of Koecher-Maass series and their applications
Author(s)	水野, 義紀
Citation	大阪大学, 2006, 博士論文
Version Type	
URL	https://hdl.handle.net/11094/46498
rights	
Note	著者からインターネット公開の許諾が得られていないため、論文の要旨のみを公開しています。全文のご利用をご希望の場合は、 〈a href="https://www.library.osaka-u.ac.jp/thesis/#closed"〉 大阪大学の博士論文について 〈/a〉 をご参照ください。

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

氏名	水野義紀
博士の専攻分野の名称	博士(理学)
学位記番号	第 20001 号
学位授与年月日	平成 18 年 3 月 24 日
学位授与の要件	学位規則第 4 条第 1 項該当 理学研究科数学専攻
学位論文名	Explicit formulas of Koecher-Maass series and their applications (ケッヒャー・マース級数の具体形と、その応用)
論文審査委員	(主査) 教授 伊吹山知義 (副査) 教授 今野 一宏 教授 渡部 隆夫 講師 落合 理

論文内容の要旨

Koecher-Maass 級数は正則なジーゲル保型形式に対し Koecher と Maass により導入され、その全複素平面への有理型解析接続、関数等式といった基本的な解析的性質が得られている。Koecher-Maass 級数は一変数保型形式に対する Hecke 級数の最も素朴で自然な高次元化と思われるが比較的省みられることが少なかった。最近、発表された伊吹山、桂田による「Koecher-Maass 級数の具体形」の研究により Siegel-Eisenstein 級数、Klingen-Eisenstein 級数、Ikeda lift の像に対し、その Koecher-Maass 級数はリーマンゼータ関数いくつかと一変数保型形式から定まるディリクレ級数の積の有限和で表示されることが示されている。このような背景のもと私は「Koecher-Maass 級数の具体形とその応用」をキーワードにして Koecher-Maass 級数について研究を行ってきた。この学位論文の主な内容は、Koecher-Maass 級数の具体形の新しい例を与えること、Koecher や Maass による手法では取り扱えない実解析的 Siegel-Eisenstein 級数の Koecher-Maass 級数の解析的性質を調べること、次数 2 でレベル付きの Siegel-Eisenstein 級数の Fourier 係数の算術的な公式を得ること、である。全て「Koecher-Maass 級数の具体形」という視点から取り組んだからこそ成しえる事ができる結果である。以下に詳しく述べる。

(1) 次数 2 の Hermitian-Eisenstein 級数の Koecher-Maass 級数の具体形を、虚二次体の類数が 1 という仮定のもとで得た。Siegel-Eisenstein 級数の Koecher-Maass 級数の具体形は伊吹山、桂田により一般次数で得られているが、ジーゲル保型形式以外のタイプの保型形式に対しては知られていた具体形は Krieg による次数 2 の quaternionic Siegel-Eisenstein 級数に対してのみであった。また Siegel 型の Eisenstein 級数の Koecher-Maass 級数が易しく記述されるという根拠はまだ未解明である。私は Hermitian-Eisenstein 級数の場合に次数 2 の特殊性を用いた方法で計算を行い、きれいな形にまとめることができた。結果は 2 次指標に付随する L -関数 4 つの積の有限和である。この結果は、一般次数でも Hermitian-Eisenstein 級数の Koecher-Maass 級数の具体形は易しく記述されるという可能性に対し、ひとつの根拠を与えている。

(2) 一変数半整数 Eisenstein 級数の Rankin-Selberg convolution の解析的性質を調べた。上述した伊吹山、桂田による Siegel-Eisenstein 級数の Koecher-Maass 級数の具体形には一変数の半整数 Eisenstein 級数の Rankin-Selberg convolution があらわれる。積分の収束の問題が生ずるため、この convolution product の解析的性質を調べるのに普通の Rankin-Selberg 法は使えない。私は Zagier の Rankin-Selberg 法を合同部分群に対する weight

付の保型形式に拡張することにより、この convolution product の解析的性質を調べた。伊吹山、桂田の公式とあわせて Siegel-Eisenstein 級数の Koecher-Maass 級数の関数等式の別証を得たことになる。また Zagier の Rankin-Selberg 法の Kudla による改良版を合同部分群に対する保型形式に拡張した。

(3) 実解析的 Siegel-Eisenstein 級数の Koecher-Maass 級数の解析的性質を調べた。正則なジューゲル保型形式に対しては、その Koecher-Maass 級数の満足な解析的性質が得られている。しかしながら非正則の場合はジューゲル保型形式のフーリエ展開が未解明である点が多く、非正則ジューゲル保型形式の Koecher-Maass 級数は、あまり調べられてはいない。一方、非正則、すなわち実解析的な Siegel-Eisenstein 級数のフーリエ展開はよくわかっていて、その Koecher-Maass 級数が荒川により導入され概均質ベクトル空間の理論で用いられた手法により、次数が3以上という仮定のもとで、ベクトル型の関数等式が得られていた。その後、伊吹山、桂田により実解析的 Siegel-Eisenstein 級数の Koecher-Maass 級数の具体形が得られている。そこには(2)で述べた一変数半整数 Eisenstein 級数の実解析的版の Rankin-Selberg convolution があらわれる。伊吹山、桂田の公式から出発して実解析的 Siegel-Eisenstein 級数の Koecher-Maass 級数の解析的性質を調べるため、私はまず伊吹山、桂田の公式にあらわれる、この実解析的な一変数の半整数 Eisenstein 級数が実解析的 Jacobi-Eisenstein 級数と Eichler-Zagier の意味で対応していることを示した。正則な場合、プラス空間に属する保型形式と Jacobi 形式の Eichler-Zagier 対応はよく知られているが、これの実解析的な場合の初めての例となっている。この対応により(2)での研究の大幅な改良、及び拡張が可能となり、結果として実解析的 Siegel-Eisenstein 級数の Koecher-Maass 級数の関数等式を得ることを可能にした。関数等式のガンマ因子にバーンズの一般化超幾何級数が現れ、扱いはかなり複雑なのであるが、一般化超幾何級数の2種類の関数等式を利用することにより、それを普通のガンマ関数で書き下すことに成功した。結果の応用として上記、荒川のベクトル型の関数等式の別証明及び関数等式を簡潔にすることに应用され、さらに荒川の手法では除かざるを得なかった次数が2の場合の符号 $(2, 0)$ の Koecher-Maass 級数の関数等式を得た。

(4) 次数2でレベル付きの Siegel-Eisenstein 級数の Fourier 係数の算術的な公式を得た。Siegel-Eisenstein 級数は保型形式の算術的理論において最も基本的であるので、その Fourier 係数の公式を得ることは重要である。次数2の Siegel-Eisenstein 級数の Fourier 係数の算術的な公式は Fullmodular のときは Maass により得られているが $\Gamma_0(N)$ 型合同部分群については Fourier 係数は知られていなかった。(Fricke involution で捻った場合は、Shimura、Boecherer によって知られているが。) 幾人かにより Maass のような直接的な方法による計算の試みもあったのであるが成功には至っていない。私は Koecher-Maass 級数の理論、(2)(3)での手法、Roelcke-Selberg のスペクトル理論を用いて、ある種のレベル付き Jacobi-Eisenstein 級数の Maass lift (斎藤、黒川リフト) がレベル付きの Siegel-Eisenstein 級数に一致することを示し、さらにレベル付き Jacobi-Eisenstein 級数の Fourier 係数を計算することによりレベル付きの Siegel-Eisenstein 級数の Fourier 係数の算術的な公式を得た。

論文審査の結果の要旨

整数論において、ゼータ関数の研究は中心的な重要性を持つ。保型形式のゼータ関数はオイラー積の無限積で定義されるものが一般的であるが、これ以外に保型形式を直接メルン変換して得られる Koecher-Maass 級数と呼ばれるものの研究が近年始まっている。申請者はジューゲル保型形式の Koecher-Maass 級数について、これまで未解決であった次のような問題を研究し、結果を得た。

- (1) ジューゲルアイゼンシュタイン級数の Koecher-Maass 級数の解析接続と関数等式を、すでに知られていた明示的公式を用いることにより、半整数ウェイトの保型形式の合成積から直接証明した。
- (2) 次数2では3以上に比して体積が無限大に発散するという特殊な状況があり、実解析的アイゼンシュタイン級数の Koecher-Maass 級数の定義が従来は可能ではなかった。これに対する、十分よい定義、およびその場合の解析接続と関数等式を与えた。
- (3) Koecher-Maass 級数の応用として、ある種の合同部分群でのアイゼンシュタイン級数のフーリエ係数の明示的な公式を与えた。

(4) 2次エルミートアイゼンシュタイン級数の Koecher-Maass 級数の明示的公式を与えた。

以上の研究は、この分野の最新の結果を多く利用するとともに、主として特殊関数等の複雑で長い発見的な計算により実行されている。特に結果(4)においては、本質的部分に Koecher-Maass 級数による逆定理を用いるという鋭い着想がある。また、どの結果もこの分野の基本定理としての性格を持っており、きわめて重要な価値がある。

よって、本論文は博士（理学）の学位論文として十分価値あるものと認める。