氏　　　　　名　土井　護（どい　まもる）

博士の専攻分野の名称　博　士（理　学）

学位記番号　第　２０８３７　号

学位授与年月日　平成 19 年 3 月 23 日

学位授与の要件　学位規則第４条第１項該当

理学研究科数学専攻

学位論文名　Gluing Construction of Compact Complex Surfaces with Trivial Canonical Bundle
（自明な標準束をもつコンパクト複素曲面の貼り合わせによる構成）

論文審査委員　（主査）
教　授　藤木　　明
（副査）
教　授　満渕　俊樹　　教　授　並河　良典　　助教授　後藤　竜司

論文内容の要旨

多様体 X が同じ次元の境界つきコンパクト部分多様体 X_0 を含み、X_0 の境界を S としたとき $X\setminus X_0$ がシリンダー $S\times\mathbb{R}_+=\{(p,t)\mid p\in S,\ 0<t<\infty\}$ と微分同相であるとき、X をシリンダー型多様体と呼ぶ。シリンダー型多様体の貼り合わせは特別な Riemann 計量をもつコンパクト多様体を構成するときに有用な手法である。この手法は初め Floer や Taubes により反自己双対計量をもつコンパクトな４次元 Riemann 多様体の構成に使われた。また Joyce や Kovalev による例外型 Lie 群 G_2 をホロノミーとしてもつコンパクトな７次元 Riemann 多様体の構成にもこの手法が用いられる。この論文の目的は、シリンダー型多様体の貼り合わせにより自明な標準束をもつコンパクト複素曲面を構成する方法およびその例を与えることである。主結果は次の定理である。

定理 **4.1.** $i=1$、2 に対して X_i をコンパクト複素曲面とし、D_i を X_i 上の既約で非特異な反標準因子とする。また D_1 から D_2 への正則同型写像 f が存在して f の下で正則法束 N_{D_1/X_1} と N_{D_2/X_2} が互いに双対である、すなわち $N_{D_1/X_1}\otimes f^*N_{D_2/X_2}\cong\mathcal{O}_{D_1}$ とする。このとき $i=1$、2 に対して X_i における D_i の管状近傍 V_i、W_i で $\overline{V_i}\subset W_i$ となるもの、および $W_1\setminus\overline{V_1}$ から $W_2\setminus\overline{V_2}$ への微分同相写像 h が存在して次の主張が成り立つ。写像 h で $W_1\setminus\overline{V_1}$ と $W_2\setminus\overline{V_2}$ を同一視して $X_1\setminus\overline{V_1}$ と $X_2\setminus\overline{V_2}$ を貼り合わせることにより、コンパクト多様体 M を得る。この多様体 M は標準束が自明な複素構造をもつ。

この定理においては X_1、X_2 は Kähler であるとは仮定しない。また貼り合わせのためには N_{D_1/X_1} と N_{D_2/X_2} は自明でなくてよく、互いに双対であればよい。得られた多様体が複素多様体であり、特別な Riemann 計量をもっているわけではないという点も他の貼り合わせ構成法と異なっている。

定理 4.1 は貼り合わせる複素曲面の数が１つ以上、因子の数が２つ以上の場合にも拡張できる（定理 5.2）。その場合には付加的条件が必要となる。

自明な標準束をもつコンパクト複素曲面は Kähler 曲面である複素トーラスと K3 曲面、および非 Kähler 曲面である小平曲面に分類されることが知られている。この論文では得られた貼り合わせ構成法によりすべての種類の曲面の

例を構成する。

向きのついた４次元多様体 M 上の複素２形式 ϕ が $\phi\wedge\bar{\phi}>0$、$\phi\wedge\phi=0$ を満たすとき、ϕ を M 上の SL(2,ℂ) 構造と呼ぶ。ϕ が M 上の SL(2,ℂ) 構造ならば、ϕ は M 上の概複素構造 I_ϕ を定め、ϕ は I_ϕ に関して（2,0）型の微分形式となる。さらに $d\phi=0$ ならば I_ϕ は積分可能、すなわち I_ϕ は M 上の複素構造を定める。このとき $X=(M,\ I_\phi)$ は自明な標準束をもつ複素曲面となる。定理 4.1 を証明するためには M 上に閉じた SL(2,ℂ) 構造に近い微分形式を構成し、それが閉となるように変形できることを準線形楕円型偏微分方程式を解くことにより示す。

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

貼り合わせ構成（Gluing Construction）は Donaldson によるインスタントンの構成、Taubes による自己双対計量の構成、Joyce、Kovalev による G_2、Spin(7) 多様体の構成など幾何学においてとても強力な手法であり、様々な成果を生み出している。申請者（土井護）の研究はこの構成法を標準束が自明な複素曲面に適用するという独創的なものである。

申請者（土井護）の研究は標準束が自明な複素曲面を SL_2(C) 構造という、特別な閉微分形式の定める幾何構造として捉え直し、貼り合わせ構成を SL_2(C) 構造に適用する。

最初に近似的な SL_2(C) 構造を構成する。その後、近似的な構造に微少な変形を施し、偏微分方程式を解くことにより、本当の SL_2(C) 構造（標準束が自明な複素構造）を構成するものである。最初に近似的な SL_2(C) 構造を構成する段階では、トポロジー、代数幾何などを使い、最後の偏微分方程式を解くところでは幾何的な解析を駆使することになり、幅広い数学的な能力が必要となる。

標準束が自明な正規交叉複素曲面を変型し、滑らかな複素曲面にできるか、というスムージング問題は代数幾何において深く研究されている。正規交叉多様体のような、特異点を持った多様体は、従来の微分幾何の手法では取り扱いが難しいのであるが、申請者の得た結果は、既約成分が二つの標準束が自明な d-semi stable 正規交叉複素曲面は、貼り合わせ構成が可能である、という主張であり、代数幾何での既存の結果と比べてみても、新しい重要な結果である。

よって、本論文は博士（理学）の学位論文として十分価値あるものと認める。