【27】

氏名	田（た）村（むら）充（みつ）司（じ）
博士の専攻分野の名称	博　士（理　学）
学位記番号	第　２０８３６　号
学位授与年月日	平成 19 年 3 月 23 日
学位授与の要件	学位規則第４条第１項該当 理学研究科数学専攻
学位論文名	On uniqueness in the Cauchy problem for systems with partial analytic coefficients. （部分的に解析的な係数を持つ偏微分方程式系に於ける Cauchy 問題の解の一意性について）
論文審査委員	（主査） 教　授　西谷　達雄 （副査） 教　授　林　　仲夫　　教　授　土居　伸一　　助教授　杉本　　充

論 文 内 容 の 要 旨

Cauchy 問題の解の一意性に於いて、その係数が解析的か C^∞ かによってその様相が大さく変わることは良く知られている。S. Alinhac と M. Baoendi は timelike な初期曲面においては０次の C^∞ の摂動を許せば解の一意性が崩れることを示し、その後 D. Tataru は 1995 年に考えている偏微分方程式の係数が partial analytic であるという仮定の下で timelike な初期曲面においても解の一意性が成り立つことを示した。しかし、この D. Tataru の結果は単独の偏微分方程式のみを考察しており、現在逆問題と呼ばれる分野で盛んに考察されている弾性方程式系に対してはそのままでは適用できない。そこで我々はこの結果を L. Robbiano の手法を用いて偏微分方程式系に拡張し以下の定理を証明した。

n_a、n_b を非負整数、$n=n_a+n_b\geq 1$ とし x、$\xi\in R^n=R^{n_a}\times R^{n_b}$ を $x=(x_a,\ x_b)$、$\xi=(\xi_a,\ \xi_b)$とする。$P(x,\ D_x)=P(x_a,\ x_b,\ D_{x_a},\ D_{x_b})=(p_{ij}(x,\ D_x))_{1\leq i,\ j\leq N}$ を x_a に関して部分的に解析的な係数を持つ m 次微分作用素系とし、その principal-part を $P_m(x,\ \xi)$とする。

Theorem 0.1

$P_m(x,\ \xi)$は次の条件を満たすとする：

1. $\det P_m(0,\ 0,\ \xi_b)\neq 0\ \forall\ \xi_b\in R^{n_b}\setminus\{0\}$。
2. ξ_b は次の方程式を満たすとする；

$$\det P_m(0,\ i\varphi_a'(0),\ i\varphi_b'(0)+\xi_b)=\det\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\right)(x)\frac{\partial P_m}{\partial\xi_k}(x,\ \xi+i\varphi'(x))\right]=0\ 、\tag{1}$$

　このとき、行列

$$\frac{1}{2i}(\{P_{m,\ \varphi}^*,\ P_{m,\ \varphi}\}-\{P_{m,\ \varphi},\ P_{m,\ \varphi}^*\})(0,\ 0,\ \xi_b)$$

　は正定値、ただし $P_{m,\ \varphi}(x,\ \xi)=P_m(x,\ \xi+i\varphi'(x))$、

3. $|\alpha|=|\beta|=m$ を満たす、任意の α、β に対して、

$$A_\alpha(x)^*A_\beta(x)=A_\beta(x)A_\alpha(x)^*。\tag{2}$$

Vを０の近傍とし $u=(u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_N)\in C^\infty(V)^N$ は、

$$\begin{cases} P(x,\ D_x)u(x)=0,\quad x\in V, \\ \operatorname{supp} u=\bigcup_{k=1}^{N}\operatorname{supp} u_k\subset\{x\in V:\ \varphi(x)\le 0\}。\end{cases}$$

を満たすとする、この時、ある０の近傍 Wがとれて、そこで $u\equiv 0$ となる。

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

線形偏微分方程式の初期値問題における解の一意性の問題は、解析学における古典的かつ中心的課題の一つであり、過去から現在にいたるまで様々な研究が存在する。古典的な結果としては、係数が解析的で初期面が方程式に対して非特性的な場合には Holmgren により、また必ずしも非特性的とは限らない場合に擬凸性の仮定の下で Hörmarnder により、それぞれ一意性が示されている。この問題に関して近年 Tataru らによる新しいアイデアの提示があり、ここ数年新しい進展がみられている。特に Robbiano-Zuilly による FBI 変換の理論を用いた証明方法は、このアイデアが有効である原理をよく伝えてくれている。これにより、係数が一部の変数に関してのみ解析的である場合においても、その他の変数に楕円性の仮定を課すことにより、やはり一意性が示されることがわかっている。

本論文は、Robbiano-Zuilly の方法をさらに改良することにより、単独の方程式の場合に関する以上の結果が、さらに弾性方程式などに代表される方程式系の場合にまで一般化される事を示している。このような一般化は数理物理への応用においても重要であるにもかかわらず、方程式系であること特有の困難さのために、あまりよい結果は知られていない。本論文における成果はこの方面に対する新たな視点を与える重要なものである。

よって、本論文は博士（理学）の学位論文として十分価値あるものと認める。